



## Středoškolská technika 2015

Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT

# ŘEŠENÍ DOKONALÉHO TVARU MOSTNÍHO NOSNÍKU Z HLEDISKA POTENCIÁLNÍ ENERGIE - ŘETĚZOVKA

Dušan König

Střední průmyslová škola strojnická a Střední odborná škola profesora Švejcara, Plzeň  
Klatovská 109, Plzeň

### Abstrakt

Tato práce je zaměřená na analytické řešení ideálního tvaru hlavních nosníků obloukového mostu z hlediska potenciální energie. K samotnému řešení je použit analogický příklad: Ve dvou bodech zavěšený provaz konstantního průřezu ve volném prostoru zaujme tvar, který je pro něj z hlediska potenciální energie nejpříjemnější. Najdeme-li funkci popisující tvar takto zavěšeného provazu, můžeme na jejím základě definovat ideální tvar hlavních nosníků obloukového mostu.

Tato práce je začátkem většího projektu - návrhu nosné konstrukce obloukového mostu za použití kompozitních materiálů, na kterém je spolupracováno s ČVUT v Praze a ZČU v Plzni.

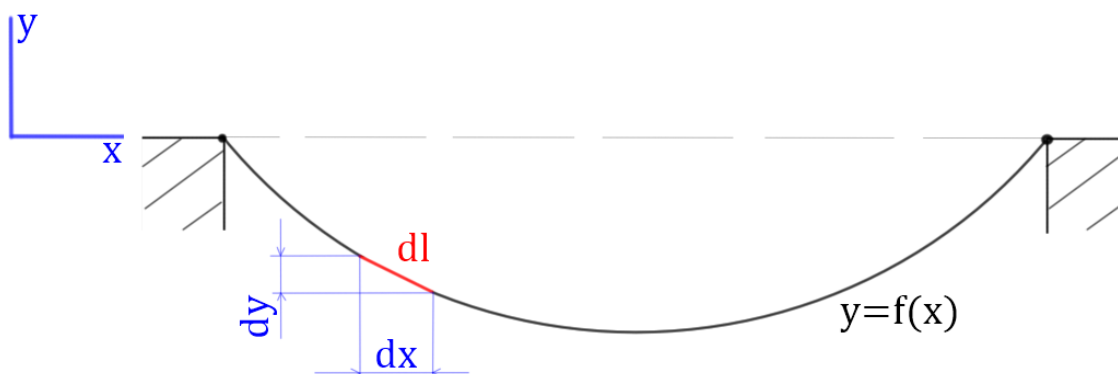
### Obecná rovnice řetězovky

Řetězovka je křivka, kterou zaujme ve dvou bodech zavěšený provaz konstantního průřezu ve volném prostoru.



Obr.1: Náčrt dané situace

Každá fyzikální soustava se snaží dostat do stavu s co možná nejmenší potenciální energií. Každý bod provazu má tedy minimum potenciální energie. **Vyjádření potenciální energie infinitezimálního<sup>1</sup> úseku provazu:**



Obr.2: Schematické zakreslení infinitezimálního úseku řetězovky

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \wedge \dot{y} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = \dot{y} dx.$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (\dot{y} dx)^2} = \sqrt{(dx)^2 \cdot [1 + (\dot{y})^2]} = \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx.$$

#### Hmotnost infinitezimálního úseku provazu:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dl \cdot S = \rho_l \cdot dl = \rho_l \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx ; \text{ substitute: } \rho_l = \rho \cdot S,$$

$\rho$  ... hustota provazu<sup>2</sup>,

$S$  ... obsah průřezu provazu,

$\rho_l$  ... lineární hustota provazu.

#### Potenciální energie infinitezimálního úseku provazu:

$$dE_p = dm \cdot g \cdot y = \rho_l \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx \cdot g \cdot y = \rho_l \cdot g \cdot y \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx.$$

Nyní je zapotřebí stanovit omezení řetězovky. Pro lepší představu prvního omezení použijeme analogický příklad. Uvažujme kuličku vhozenou do kulové nádoby. Kulička se může nacházet v kterémkoliv místě nádoby, po chvíli kmitání se však ustálí na dně, protože právě v této poloze má minimální potenciální energii.

Nechť je  $E_{p_1}$  okamžitá energie<sup>3</sup> kuličky a  $E_p$  minimální potenciální energie kuličky. Jestliže se kulička již nachází v místě s minimem potenciální energie, platí tedy  $E_{p_1} = E_p$ , můžeme psát:

$$\delta E_p = E_{p_1} - E_p = E_p - E_p = 0.$$

$\delta E_p$  je variací<sup>4</sup> funkce  $E_p$ .

<sup>1</sup> Infinitezimální - nekonečně malý.

<sup>2</sup> Obecně hustota materiálu nosníku.

<sup>3</sup> Energie v daném časovém okamžiku.

Daný provaz se bude chovat podobně jako kulička v předcházejícím případě. Provaz zaujme polohu s minimem potenciální energie, stejně jako kulička. **Pro 1. omezení řetězovky:**

$$\delta E_p = 0.$$

Předpokládejme, že provaz bude dokonale tuhý, nebude se tedy měnit jeho délka  $l$ . **Pro 2. omezení řetězovky:**

$$\delta l = 0.$$

Jsou zformulována dvě omezení. Pro získání jedné závislosti, která v sobě bude obsahovat obě omezení, použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů<sup>5</sup>.

**Obecný zápis metody Lagrangeových multiplikátorů:**

$$\frac{\delta}{\delta x} [f(x) - \lambda \cdot g(x)] = 0 = \delta f(x) - \lambda \cdot \delta g(x),$$

$\lambda$  ... Lagrangeův multiplikátor;  $\lambda \in R$ .

**Pro řetězovku:**

$$\begin{aligned} 0 = \delta E_p - \lambda \cdot \delta l &= dE_p - \lambda \cdot dl = \rho_l \cdot g \cdot y \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx - \lambda \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx = \\ &= (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx = F dx \Rightarrow F = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2}. \end{aligned}$$

$F$  ... Funkcionál<sup>6</sup> řetězovky.

$F: F(x, y(x), \dot{y}(x)) \Rightarrow$  **Funkcionál je řešitelný pomocí Eulerovy-Lagrangeovy rovnice:**

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y^j} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) = 0.$$

Tento vztah je zapotřebí upravit do vhodnějšího tvaru z hlediska integrování za pomoci dalších vzorců:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \dot{y}^j \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) &= \frac{d\dot{y}^j}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} + \dot{y}^j \frac{d}{dx} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) ; j \in N^+, \\ \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y^j} \cdot \dot{y}^j + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \cdot \frac{d\dot{y}^j}{dx}. \end{aligned}$$

**Řešíme soustavu tří rovnic:**

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y^j} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) &= 0 \quad / \cdot \dot{y}^j ; j \in N^+, \\ \frac{d}{dx} \left( \dot{y}^j \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) &= \frac{d\dot{y}^j}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} + \dot{y}^j \frac{d}{dx} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right), \\ \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y^j} \cdot \dot{y}^j + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \cdot \frac{d\dot{y}^j}{dx}, \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Variace je změna dané funkce jako celku.

<sup>5</sup> Jedná se o metodu hledání extrémů funkce, která je nějakým způsobem omezená.

<sup>6</sup> Funkcionál chápeme jako funkci jiné funkce. Obecně je to zobrazení z množiny funkcí do množiny čísel, např. množiny všech reálných čísel  $R$ .

$$\sum_{j=1}^n \left( \dot{y}^j \cdot \frac{\partial F}{\partial y^j} - \dot{y}^j \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) = 0,$$

$$-\dot{y}^j \frac{d}{dx} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) = \frac{d\dot{y}^j}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} - \frac{d}{dx} \left( \dot{y}^j \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right),$$

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} = \dot{y}^j \cdot \frac{\partial F}{\partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \cdot \frac{d\dot{y}^j}{dx},$$


---

$$\sum_{j=1}^n \left( \dot{y}^j \cdot \frac{\partial F}{\partial y^j} + \frac{d\dot{y}^j}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} - \frac{d}{dx} \left( \dot{y}^j \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) \right) = 0,$$

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} = \dot{y}^j \cdot \frac{\partial F}{\partial y^j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \cdot \frac{d\dot{y}^j}{dx}.$$


---

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left( \dot{y}^j \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) \right) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dx} \left( F - \dot{y}^j \frac{\partial F}{\partial \dot{y}^j} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\text{Pro } j = 1: \frac{d}{dx} \left( F - \dot{y} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

**Funkcionál  $F$  není explicitně závislý<sup>7</sup> na souřadnici  $x$  tzn.  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ :**

$$\frac{d}{dx} \left( F - \dot{y} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0.$$

**Po integraci:**

$$F - \dot{y} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = c_1,$$

$c_1$  ... integrační konstanta;  $c_1 \in R$ .

**Dosadíme za funkcional  $F$ :**

$$c_1 = F - \dot{y} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2} - \dot{y} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[ (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2} \right].$$

V rovnici je naznačená derivace funkcionalu  $F$ , tuto **derivaci řešíme samostatně**:

---

<sup>7</sup> Není plně definovaný.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{y}} [(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2}] = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (\sqrt{1 + (\dot{y})^2}) = \\
&= (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{y}} [1 + (\dot{y})^2]^{\frac{1}{2}} = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \{f[g(\dot{y})]\} = \\
&= (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \dot{f}(u) \cdot \dot{g}(\dot{y}) ; \text{ substitute: } u = 1 + (\dot{y})^2, \\
(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \dot{f}(u) \cdot \dot{g}(\dot{y}) &= (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{y}} (u^{\frac{1}{2}}) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{y}} [1 + (\dot{y})^2] = \\
&= (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \left(\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot 2\dot{y}, \\
(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \left(\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot 2\dot{y} &= (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \left\{\frac{1}{2} [1 + (\dot{y})^2]^{-\frac{1}{2}}\right\} 2\dot{y} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} 2\dot{y}, \\
\frac{1}{2} \cdot (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} \cdot 2\dot{y} &= (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}.
\end{aligned}$$


---

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}$$

**Hodnotu derivace funkcionálu  $F$  dosadíme do rovnice a řešíme:**

$$c_1 = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2} - \dot{y} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{y}} [(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2}],$$

$$c_1 = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2} - \dot{y} \cdot (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}},$$

$$c_1 = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \left( \sqrt{1 + (\dot{y})^2} - \frac{(\dot{y})^2}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} \right) =$$

$$= (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \left( \frac{(\sqrt{1 + (\dot{y})^2})^2 - (\dot{y})^2}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} \right),$$

$$c_1 = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \left( \frac{1 + (\dot{y})^2 - (\dot{y})^2}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} \right) = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}},$$

$$c_1 \cdot \sqrt{1 + (\dot{y})^2} = \rho_l \cdot g \cdot y - \lambda.$$

**Pro řešení této diferenciální rovnice je zvolena metoda separace proměnných:**

$$c_1 \sqrt{1 + (\dot{y})^2} = \rho_l \cdot g \cdot y - \lambda \quad /^2,$$

$$c_1^2 \cdot [1 + (\dot{y})^2] = (\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda)^2 = c_1^2 + c_1^2 \cdot (\dot{y})^2 = c_1^2 + c_1^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda)^2 - c_1^2 = c_1^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda)^2 - c_1^2}{c_1^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad /^{-1},$$

$$\frac{c_1^2}{(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda)^2 - c_1^2} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \Rightarrow \frac{c_1}{\sqrt{(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda)^2 - c_1^2}} = \frac{dx}{dy},$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda)^2 - c_1^2}} dy = dx,$$

$$\int \frac{c_1}{\sqrt{(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda)^2 - c_1^2}} dy = c_1 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda)^2 - c_1^2}} dy = x + c_2,$$

$c_2$  ... integrační konstanta;  $c_2 \in R$ .

**K integraci levé strany rovnice je použit vzorec:**

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \operatorname{argcosh}\left(\frac{u}{a}\right) + c,$$

$$c_1 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{(\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda)^2 - c_1^2}} dy = x + c_2 = c_1 \cdot \operatorname{argcosh}\left(\frac{\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda}{c_1}\right) + c_3,$$

$c_3$  ... integrační konstanta;  $c_3 \in R$ .

$$\frac{x + c_2 - c_3}{c_1} = \operatorname{argcosh}\left(\frac{\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda}{c_1}\right),$$

$$\cosh\left(\frac{x + c_2 - c_3}{c_1}\right) = \frac{\rho_l \cdot g \cdot y - \lambda}{c_1},$$

$$y = \frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{x + c_2 - c_3}{c_1}\right) \right] \quad ; \quad \text{substituce: } C = c_2 - c_3.$$

$$\text{Rovnice řetězovky pro lano: } f: y = \frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{x + C}{c_1}\right) \right].$$

$\rho_l$  ... lineární hustota,

$g$  ... gravitační zrychlení;  $g = 9,81 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$ ,

$\lambda$  ... Lagrangeův multiplikátor;  $\lambda \in R$ ,

$c_1$  ... integrační konstanta;  $c_1 \in R$ ,

$C$  ... konstanta<sup>8</sup>;  $C \in R$ .

Pro určení konkrétní rovnice tvaru nosníků mostu je zapotřebí stanovit konstanty v rovnici řetězovky.

## Konkrétní rovnice řetězovky pro hlavní nosníky mostu

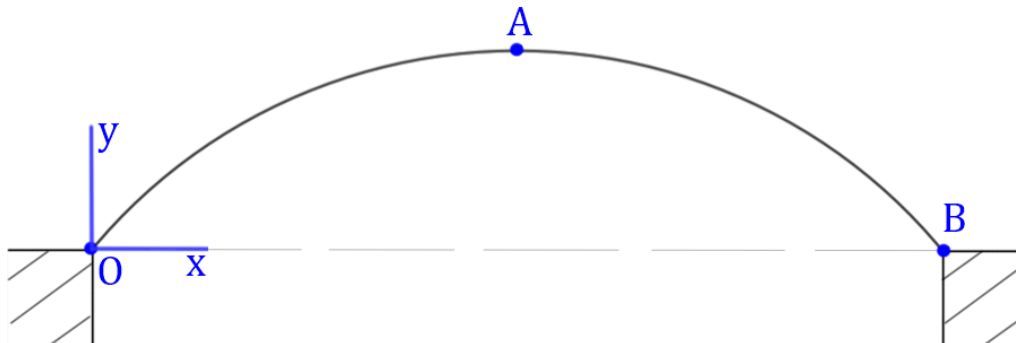
### Předběžně navržené řešení:

Otočením řetězovky z obr.1 o 180° získáme tvar hlavních nosníků mostu:

<sup>8</sup> Tato konstanta je substitučním nahrazením vztahu mezi integračními konstantami  $c_2$  a  $c_3$ . Pro zjednodušení rovnice jsou tyto dvě konstanty složeny do jediné konstanty  $C$ .

$$\text{Rovnice řetězovky pro hlavní nosníky: } f_{\alpha}: y = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{x+C}{c_1}\right) \right].$$

Na takto vzniklé křivce<sup>9</sup> volíme tři body, na základě kterých bude možno definovat konstanty řetězovky:



Obr.3: Stanovení tří bodů

Bod  $O$  je počátkem kartézského systému souřadnic:

$$O = [0 ; 0].$$

Bod  $A$  je globálním extrémem řetězovky:

$$A = \left[ \frac{a}{2} ; b \right].$$

$a$  ... délka mostu,  
 $b$  ... výška mostu.

Bod  $B$  se nachází na konci mostu:

$$B = [a ; 0].$$

Výraz  $(x + C)$  v rovnici řetězovky, určuje posunutí řetězovky po ose  $x$ .  
 $x + C = 0 \Rightarrow x = -C \Rightarrow$  řetězovka je souměrná podle přímky  $p: x = -C$ .

Řetězovka z obr.3 je souměrná podle přímky  $p: x = \frac{a}{2} \Rightarrow -C = \frac{a}{2} \Rightarrow C = -\frac{a}{2}$ .

$$f_{\alpha}: y = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{x+C}{c_1}\right) \right] = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{c_1}\right) \right],$$

$$f_{\alpha}: O = [0 ; 0]; A = \left[ \frac{a}{2} ; b \right]; B = [a ; 0] \wedge f_{\alpha}: y = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{c_1}\right) \right],$$

<sup>9</sup> Taktéž řetězovce.

$$O \in f_{\alpha}: 0 = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{0 - \frac{a}{2}}{c_1}\right) \right] = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{-\frac{a}{2}}{c_1}\right) \right],$$

$$A \in f_{\alpha}: b = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}}{c_1}\right) \right] = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot [\lambda + c_1 \cdot \cosh 0],$$

$$B \in f_{\alpha}: 0 = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{\frac{a}{2}}{c_1}\right) \right] = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{\frac{a}{2}}{c_1}\right) \right].$$


---

$$0 = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{-\frac{a}{2}}{c_1}\right) \right],$$

$$b = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot (\lambda + c_1 \cdot \cosh 0) = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \left(\frac{e^0 + e^{-0}}{2}\right) \right],$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{\frac{a}{2}}{c_1}\right) \right].$$


---

$$0 = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{-\frac{a}{2}}{c_1}\right) \right],$$

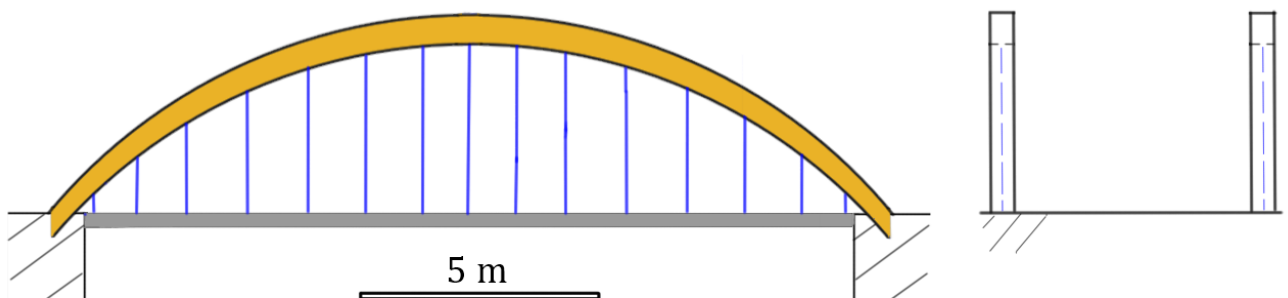
$$b = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot (\lambda + c_1),$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_l \cdot g} \cdot \left[ \lambda + c_1 \cdot \cosh\left(\frac{\frac{a}{2}}{c_1}\right) \right].$$


---

Řešením této soustavy rovnic jsou konstanty  $\lambda, c_1$ .

### Předběžná vizualizace mostu

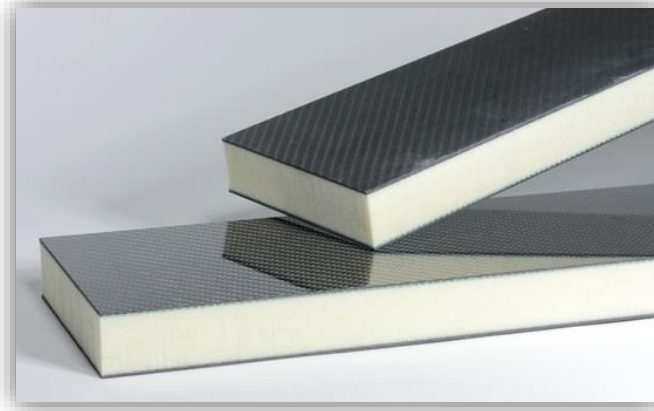


Obr.4: Náčrt představy designu



Hlavní nosníky, znázorněné oranžovým obrazcem, budou vyrobeny ze sendvičových profilů<sup>10</sup>. Podle pevnostních analýz bude dále rozhodnuto o materiálu, ze kterého bude vyrobena závěsná konstrukce, znázorněná modrými svislými čarami.

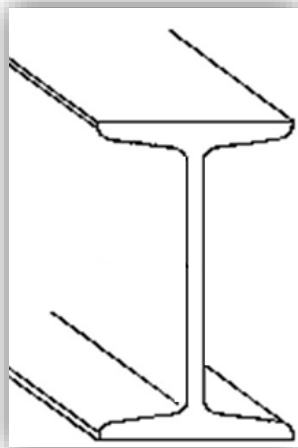
### Sendvičové profily (sendviče)



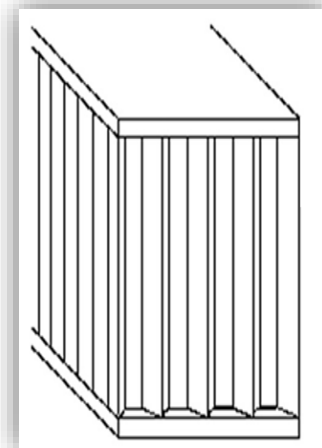
Obr.5: Ukázka sendvičových profilů

Tyto kompozitní materiály jsou zvoleny pro výrobu hlavních nosníků kvůli jejich velké tuhosti v ohybu a nízké hmotnosti.

### Hmotnostní porovnání ocelových I profilů a sendvičových profilů<sup>11</sup>:



Obr.6: I profil



Obr.7: Sendvič

$\rho_{Fe} = 7\,800 \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-3})$  ... přibližná hustota oceli,

$\rho_c = 100 \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-3})$  ... hustota jádra<sup>12</sup>,

$S_{I_{80}} = 758 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^2)$  ... obsah průřezu profilu<sup>13</sup> I 80,  $t = 3 \text{ (mm)}$  ... tloušťka<sup>14</sup> face-u<sup>15</sup>,

$h = 80 \text{ (mm)}$  ... výška nosníku<sup>16</sup>,

<sup>10</sup> Terminologická poznámka: sendvičový profil ... sendvič

<sup>11</sup> Aby bylo porovnávání objektivní, budou mít porovnávané nosníky stejnou délku, výšku i šířku.

<sup>12</sup> Viz obr.7. Jedná se o střední část nosníku, které se říká jádro. Tato hodnota byla poskytnuta na konzultacích na ČVUT v Praze.

<sup>13</sup> Zjištěna ze strojnických tabulek.

<sup>14</sup> Velikost tloušťky byla poskytnuta na konzultacích na ČVUT v Praze.

<sup>15</sup> Viz obr.7. Jedná se o vrchní a spodní část nosníku. Jsou to vlastně desky, v tomto případě vyráběné z oceli.

$b = 42 \text{ (mm)}$ ... šířka nosníku<sup>17</sup>,  
 $l \text{ (mm)}$  ... délka nosníku.

### Hmotnost I profilu:

$$m_{I_{80}} = S_{I_{80}} \cdot l \cdot \rho_{Fe} = 758 \cdot 10^{-6} \cdot 7\,800 \cdot l = 5,912\,4 \cdot l \text{ (kg)}.$$

### Hmotnost sendvičového profilu:

$$m_s = S_{Fe} \cdot \rho_{Fe} \cdot l + S_c \cdot \rho_c \cdot l = (S_{Fe} \cdot \rho_{Fe} + S_c \cdot \rho_c) \cdot l = \\ = [2tb \cdot \rho_{Fe} + b \cdot (h - 2t) \cdot \rho_c] \cdot l,$$

$$m_s = [2 \cdot 3 \cdot 42 \cdot 10^{-6} \cdot 7\,800 + 42 \cdot (80 - 2 \cdot 3) \cdot 100] \cdot l = 0,311\,052 \cdot l \text{ (kg)},$$

$S_{Fe}$  ... obsah ocelových desek,

$S_c$  ... obsah jádra.

### Hmotnostní porovnání:

$$\frac{m_{I_{80}}}{m_s} = \frac{5,912\,4 \cdot l}{0,311\,052 \cdot l} = 19,008 \Rightarrow \text{sendvičový nosník je 19x lehčí než I profil.}$$

Ohybová tuhost obou nosníků je při tom přibližně stejná<sup>18</sup>.

## Použitá literatura

RIEČAN, B.; BERO P.; SMIDA, J.; ŠEDIVÝ, J; BUŠEK, I. *Matematika pro IV. ročník gymnázií*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1987.

LEINVEBER, Jan a Pavel VÁVRA. *Strojnické tabulky: pomocná učebnice pro školy technického zaměření*. 3., dopl. vyd. Úvaly : Albra, 2006, xiv, 914 s. ISBN 80-7361-033-7.

## Internetové stránky

*Encyklopedie fyziky* [online]. [cit 2015-03-24]. Dostupné z WWW: <http://fyzika.jreichl.com/>

*Inovace studijního oboru Geotechnika* [online]. [cit 2015-03-24]. Dostupné z WWW: <http://www.geotechnici.cz/>

*Sbírka řešených úloh z fyziky* [online]. [cit 2015-03-19]. Dostupné z WWW: <http://fyzikalniulohy.cz/>

---

<sup>16</sup> Zjištěno ze strojnických tabulek.

<sup>17</sup> Zjištěno ze strojnických tabulek.

<sup>18</sup> Tato informace získána na konzultaci na ČVUT v Praze.