



Středoškolská technika 2019

Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT

METODY APROXIMACE LUDOLFOVA ČÍSLA

Jiří Zelenka

Gymnázium Zikmunda Wintra Rakovník, příspěvková organizace
Žižkovo náměstí 186, Rakovník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu a prameny uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám důvod protestovat proti zpřístupnění této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Domoušicích dne datum

Jiří Zelenka

Poděkování

Děkuji Mgr. Vojtěchu Delongovi, který velkou část svého volného času věnoval pravidelným konzultacím a řešení problémů s literaturou a s prací na počítači i v pozdních večerních hodinách. Naposledně jsem mu vděčen i za tvorbu latexové šablony, která mi usnadnila psaní práce. Nemohu opomenout jazykovou a odbornou korekturu Mgr. Ludmily Karolové a Mgr. Marty Vojříškové, která mi vylepšila úroveň práce.

Anotace

Cílem této práce je informovat o základních metodách aproximace Ludolfova čísla (dále jen „ π “). V práci je popsán historický vývoj a metody jeho výpočtu. Každá metoda zmíněná v textu je otestována pomocí počítačové simulace, popřípadě je proveden experiment vedoucí k přibližné hodnotě π . Poslední téma, které je zpracované, je využití počítačových technologií k přiblížení se skutečné hodnotě π .

Klíčová slova

Ludolf, číslo, pí, algoritmus, účinnost

Annotation

The purpose of this thesis is to inform about the basic methods of approximation of Archimedes' constant (hereinafter " π "). It is described the historical development and methods of its calculation. Every method which I present in the text we test by a computer simulation. Additionally, we make an experiment which led to an approximate value of π . In the end, we focus on the use of computer technology for π calculation.

Keywords

Archimedes, constant, pi, algorithm, efficiency

OBSAH

1	Úvod	7
1.1	Historie a důkaz transcendentnosti π	7
2	Historický vývoj odhadu π	8
2.1	Starověk	8
2.1.1	První numerické aproximace	9
2.1.2	Archimédův algoritmus	12
2.2	Středověk	15
2.2.1	Leonard Fibonacci	15
2.2.2	Mikuláš Kusánský	15
2.3	Novověk	18
2.3.1	François Viète	18
2.3.2	Descartův algoritmus	22
2.3.3	Willebrord Snell	22
2.3.4	Wallisův nekonečný součin	23
2.3.5	Gregoryho algoritmus	23
2.3.6	Brounckerův řetězový zlomek	24
2.3.7	Gregoryho-Leibnizova řada	24
2.3.8	Kochaňského geometrická aproximace	25
2.3.9	Newtonovy řady	26
2.3.10	Sharpova řada	28
2.3.11	Leonhard Euler	28
2.3.12	Legendreho algoritmus	29

2.4	Moderní algoritmy s využití počítačů	29
3	Metoda Monte Carlo	30
3.1	Obsah kruhu	30
3.2	Buffonova jehla	31
4	Srovnání metod	34
4.1	Závislost počtu operací	34
5	Závěr	42
6	Reference	44
7	Seznam obrázků	46
8	Seznam tabulek	47
	Přílohy	49
A	Míra konvergence	49

1 ÚVOD

Tato odborná práce se zabývá základními metodami aproximace Ludolfova čísla, tedy „ π “. Popisuje historický vývoj a metody výpočtu π .

První část přibližuje stručnou historii konstanty a demonstruje pomocí Lindenmannova důkazu, že π je iracionální, resp. transcendentní¹. Tím si objasněno, proč se nikomu v historii nepovedlo a ani nepovede konečnou metodou vyjádřit celý desetinný rozvoj.

Od druhé části jsou shromážděné informace seřazeny chronologicky. Práce ukazuje, jakou hodnotu používaly jednotlivé starověké civilizace v Evropě a na Blízkém východě. Je odvozen Archimédův algoritmus, který jako první vedl k libovolné přesnosti výpočtu π . Ze středověku je představen Leonarda Fibonacci, který tento algoritmus studoval, a Mikuláš Kusánský, který přispěl světu novým algoritmem.

Další kapitola se zabývá novověkem, kde je představen Vièteův a Wallisův nekonečný součin a Snellovo vylepšení Archimedova algoritmu. Jedním z témat jsou i řetězové zlomky, hlavně Brounckerův řetězový zlomek. Dále následuje Gregoryho-Leibnizova, Newtonova, Sarpova řada. U Newtonovy řady je podrobně popsáno odvození, protože je to první řada, která byla odvozena pomocí integrálů. Leonhard Euler je zmíněn nejen kvůli tomu, že dal světu symbol π , ale i on představil veřejnosti několik řad. Geometrické algoritmy jsou zastoupeny, např.: Descartovým a Gregoryho algoritmus. Historii zakončí algoritmy hrající roli při výpočtech π na prvních počítačích.

V předposlední části se nachází simulace Monte Carlo² a s tím spojená Buffonova jehla, která je také experimentálně ověřena. V poslední část jsou všechny algoritmy porovnány pomocí mnou definované veličiny \mathfrak{M} [mem].

1.1 Historie a důkaz transcendentnosti π

Člověk si již od dob, když si začal uvědomovat tvary a velikosti, musel být vědom, že existuje jistá závislost mezi průměrem a obvodem kruhu. Nejspíš okolo 2000 př. n. l. lidé ve vyspělých civilizacích začali užívat konstantu, kterou, když ji vynásobili průměr kruhu, dostali obvod kruhu [1]. Zprvu užívali hodnoty experimentálně změřené. Až ve starověku přišel Archimédes ze Syrakus s prvním algoritmem, pomocí něhož lze nalézt hodnotu konstanty s libovolnou přesností.

Vzhledem k tomu, že ve středověku nebyl téměř žádný zájem o tuto oblast matematiky, další přínosy pocházejí až z novověku [1][12]. Velký posun kupředu byl objev nekonečného součtu a součinu a řetězových zlomků. Následkem toho vzniklo bezpočet algoritmů, nicméně většina

¹Transcendentní iracionální čísla nelze vyjádřit zlomkem. Nemají totiž ukončený desetinný rozvoj a zároveň nemají žádnou stále se opakující část desetinného rozvoje. Od algebraických iracionálních čísel se liší tím, že nemohou být kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

²Monte Carlo je libovolná numerická simulace využívající náhodnost. V tomto případě půjde o zjištění poměru obsahu ploch.

měla pomalou konvergenci³.

Zdokonalování a vymyšlení nových algoritmů bylo podmíněno mírou poznatků matematiky, hlavně z oblasti teorie čísel a rovnic. Asi nejcennější příspěvek z konce raného novověku je objev integrálního počtu sirem Isaacem Newtonem. Do 18. století neměla konstanta jednotné označení, až Leonhard Euler začal používat námi již známé řecké písmeno π .

Další velký rozkvět zažilo π až s příchodem počítačů v polovině 20. století. Do té doby bylo π spočítáno jen na 808 desetinných míst. Během několika let bylo vytvořeno mnoho rekordů. Ze začátku to bylo několik desítek tisíc desetinných míst. V roce 2016 bylo ve Švýcarsku π spočítáno na 22,4 biliónů desetinných míst [2]. O 3 roky později v březnu společnost Google oznámila, že jejich zaměstnanec spočítal hodnotu konstanty na 31,4 biliónů desetinných míst [21].

Historicky první důkaz o tom, že π není racionální přinesl roku 1761 Johann Heinrich Lambert. Ten ale nevyvrátil, že π je algebraické. V roce 1794 Adrien-Marie Legendre dokázal, že π^2 je iracionální, a byl přesvědčen, že π^2 není algebraické iracionální číslo, ale že to půjde těžce dokázat. Až Carl Louis Ferdinand von Lindemann v roce 1882 přišel s důkazem, že π je transcendentní iracionální číslo.

Lindemannův důkaz vychází z Eulerovy identity:

$$e^{i\pi} + e^0 = 0.$$

Jestliže exponenty 0 a $i\pi$ jsou různá čísla, tak musí být navzájem lineárně nezávislá⁴. Podle Lindemannova–Weierstrassova teorému musí být i čísla $e^{i\pi}$ a e^0 algebraicky nezávislá. Z toho také vyplývá, že alespoň jeden exponent je číslo transcendentní. Již na první pohled je jasné, že 0 není transcendentní, protože může být kořenem algebraické rovnice ($x = 0$). V tom případě musí být $i\pi$ transcendentní. Aby ze součinu čísel vyšlo transcendentní číslo, musí alespoň jeden činitel být také transcendentní číslo. A když lze zapsat, že:

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^2 + 1 = 0,$$

musí nutně být π transcendentní [1].

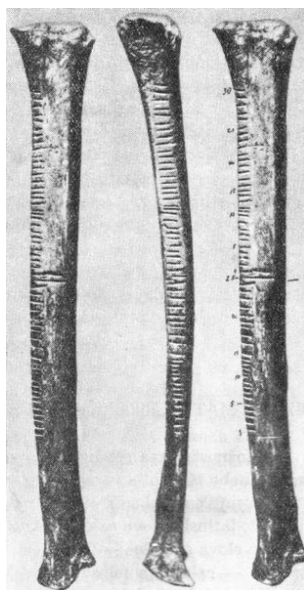
2 HISTORICKÝ VÝVOJ ODHADU π

2.1 Starověk

Již před 1 000 000 let si člověk začal uvědomovat tvary, velikosti (čísla) a vztahy mezi veličinami, například větší kámen je těžší, starší strom je větší. Někdy v době kamenné lidé začali počítat, o čemž svědčí řezy na kostech (obr. 1). V této době člověk začal vnímat monotónní

³Konvergence je rychlost algoritmu. Vyjadřuje, jak moc se přiblížíme skutečné hodnotě s každou další iterací (provedeným krokem).

⁴Dvě čísla jsou lineárně závislá právě tehdy, když jedno lze vyjádřit jako součin druhého čísla s libovolným reálným nenulovým číslem.



Obrázek 1: Zřezy na kostech [3]

funkce⁵, například dvakrát větší pole znamená dvakrát víc úrody. Jenže to u kruhu, jednoho z nepřírozenějších tvarů, neplatilo. Věděli jen, že čím větší průměr, tím větší obvod. Až někdy kolem roku 2000 př. n. l. přišli na to, že, aby tato úměra platila pro výpočet, musí průměr vynásobit konstantou, a tak začaly vznikat první aproximace π [1].

2.1.1 První numerické aproximace

Blízký východ Mezi prvními oblastmi, kde se doloženě rozvíjela matematika, bylo území Blízkého východu. Hlavně u velkých řek, jako je Euphrat a Tigris, se začaly vyvíjet první civilizace. Již od 3. tisíciletí př. n. l. se začínají objevovat první písemné prameny včetně matematiky.

V roce 1936 byla nalezena přibližně 320 km od Babylonu ve městě Susa hliněná destička, která tvrdí, že podíl obvodu pravidelného šestiúhelníku a obvodu kruhu o stejném průměru je [1]:

$$\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = \frac{96}{100}$$

Pokud víme, že obvod pravidelného šestiúhelníku o_s je šestinásobek poloměru r a že obvod kruhu o_k je poloměr krát dvojnásobek π , můžeme si vyjádřit hodnotu π .

$$\frac{o_s}{o_k} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{6r}{2\pi r} = \frac{96}{100} \Rightarrow \frac{3}{\pi} = \frac{96}{100} \Rightarrow \pi = 3\frac{1}{8} \quad (1)$$

Z této destičky je jasné, že v Babylonii používali za hodnotu π číslo 3,125.

Na většině území zpravidla používali hodnotu 3 [3]. Na to poukazují památky Židů, například "První kniha královská" praví o Šalomounově paláci (kapitola 7, verš 23): "Udělal také moře slité, desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol, a pět loket byla vysokost jeho, a okolek jeho třicíti loket vůkol." [4]

⁵ $f(x) : y = x$

Další zmínku nacházíme u Babyloňanů. Na tabulce YBC 7302 ve tvaru kruhu jsou napsána čísla 3, 9 a 45, z nich jde usuzovat, že obvod je dán 3, 9 je druhá mocnina obvodu a 45 je jeho obsah. Tyto hodnoty se dají použít ve vzorci:

$$S = \frac{1}{12}o^2. \quad (2)$$

Zde S je obsah a o je obvod [5]. Pokud si vzorec 2 rozepíšeme, dostaneme, že π je v této aproximaci 3.

$$S = \frac{1}{12}o^2 \Rightarrow \pi r^2 = \frac{1}{12}4\pi^2 r^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{3}\pi \Rightarrow \pi = 3$$



Obrázek 2: Tabulka YBC 7302 [5]

Egypt Matematika v Egyptě musela existovat již v 3. tisíciletím př. n. l., protože v přibližně té době probíhaly stavby pyramid a kanálů, na které byly potřeba pokročilé znalosti matematiky [3].

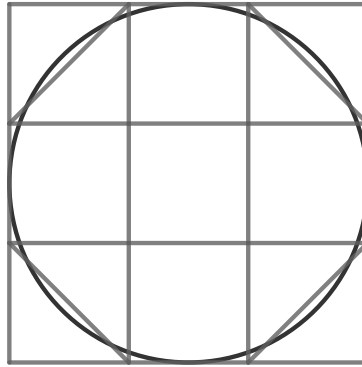
Roku 1858 poblíž Nilu byl nalezen Rhindův papyrus, který obsahuje návod na výpočet obsahu kruhu. V příkladu R50 se tvrdí, že obsah trojúhelníka S je roven číslu $\frac{64}{81}$ vynásobenému druhou mocninou průměru d [1].

$$S = \frac{64}{81}d^2 \quad (3)$$

Když si vztah upravíme, dostaneme hodnotu π .

$$S = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{64}{81}d^2 \Rightarrow \pi = 3\frac{13}{81}$$

Pomocí tohoto vzorce pro obsah kruhu je jasné, že pro Egyptany hodnota π odpovídala číslu 3,16. Jak ke vzorci 3 došli, zůstává záhadou. Ale mnoho historiků matematiky se přiklání k tomu, že na násobek $\frac{64}{81}$ přišli pomocí čtvercové sítě, kterou používali při projektování staveb. Když na čtvercové síti složené z 9 čtverců jako na obrázku 3 aproximujeme kruh osmiúhelníkem, dobereme se k výsledku, že obsah kruhu je $\frac{7}{9}$ druhé mocniny průměru kruhu. Protože $\frac{64}{81}$ je snadno zapisovatelné pomocí kamenných zlomků, které se v té době hojně používaly, je možné, že $\frac{63}{81}$ nahradili $\frac{64}{81}$ [5].



Obrázek 3: Síť pro aproximaci kruhu

Řecko Na úplném vrcholu byla starověká matematika v Řecku a to hlavně díky velkému množství vědců z celé řady oborů. Do dnešní doby se v matematice používá mnoho jejich poznatků, např.: Archimédovy geometrické řady, Pythagorova věta, Euklidovy věty a Archimédův algoritmus na výpočet π , který je rozebrán v kapitole 2.2.2.

Řím Klaudios Ptolemaios, vědec žijící v Alexandrii 85-165 n. l. [12], ve své 1. knize „Almagest“ sestavil tabulku tětiv (sinů). Funkci sinus úhlu α značil jako „chrd α “. K určení základních hodnot užívá do té doby již známých znalostí z matematiky. Pro získání malých úhlů odvodil vzorec pro chrd polovičního úhlu:

$$\text{chrd}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \text{chrd}(180^\circ - \alpha)}{2}.$$

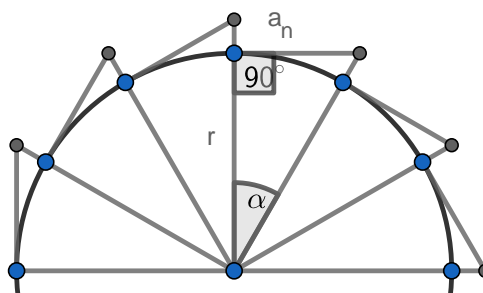
Tento vzorec lze zapsat dnešním zápisem jako:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Po úpravě vzorcem $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, který znal i Ptolemaios, lze dostat algoritmus pro poloviční úhel:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{2}}. \quad (4)$$

Když se dostal až na 1° využil novou goniometrickou funkci pro aproximaci obvodu kruhu o , kterou lze vidět na obrázku 4. Tato aproximace by šla zapsat dnešním moderním zápisem takto⁵:



Obrázek 4: Ptolemaiova aproximace kruhu

$$o = \lim_{n \rightarrow \infty} nr \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right),$$

když tento vzorec vložíme do rovnice pro π :

$$\pi = \frac{o}{2r},$$

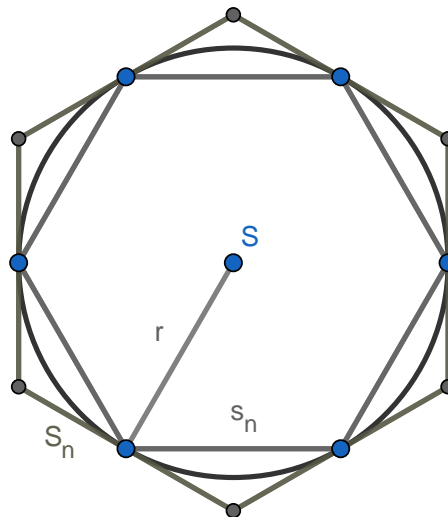
dostaneme, že:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin \left(\frac{360^\circ}{n} \right)}{2}. \quad (5)$$

Ptolemaios pro $\alpha = 1^\circ$ ($n = 360$) dostal pro π hodnotu 3,14166. Důvod, proč nedostal hodnotu 3,14143, je, že během svého výpočtu chrd 1° pomocí vzorce 4 zaokrouhloval [3].

2.1.2 Archimédův algoritmus

Archimédes (287-212 př. n. l.[3]) použil k výpočtu π úvahu, že obvod vepsaného pravidelného n -úhelníku o_n je menší než obvod kruhu o_k a že obvod opsaného pravidelného n -úhelníku O_n je větší než obvod kruhu:



Obrázek 5: Kruh s opsaným a vepsaným n -úhelníkem

$$o_n < o_k < O_n$$

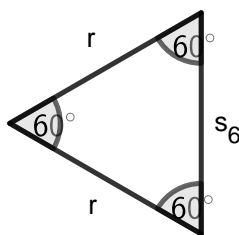
$$ns_n < 2\pi r < nS_n$$

$$\frac{ns_n}{2r} < \pi < \frac{nS_n}{2r}, \quad (6)$$

kde n je počet vrcholů/stran, r je poloměr kružnice, s_n je délka strany vepsaného n -úhelníku a S_n je délka strany opsaného n -úhelníku [1]. Princip tohoto algoritmu je ten, že čím více bude mít n -úhelník vrcholů, tím více bude opisovat kruh a tím bude menší příslušný interval.

⁵Funkce $\sin \alpha$ je sice definovaná jako protilehlá odvěsna ku přeponě, ale pro malou protilehlou odvěsnu ke středu kružnice a_n můžeme přeponu brát přeponu za stejně dlouhou jako přilehlou odvěsnu r (obrázek 4).

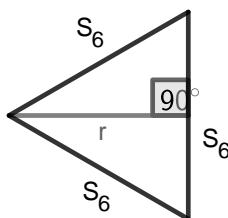
Archimédes začal výpočet na snadno spočitatelném šestiúhelníku, kde délka strany vepsaného šestiúhelníka je poloměr kružnice⁶, pro jednoduchost výpočtu zavedeme jednotkový poloměr ($r = 1$).



Obrázek 6: Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka

$$s_6 = r \Rightarrow s_6 = 1$$

Délka stany opsaného šestiúhelníka jde vypočítat pomocí Pythagorovy věty.



Obrázek 7: Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka

$$\begin{aligned} S_6^2 &= r^2 + \left(\frac{S_6}{2}\right)^2 \Rightarrow 4S_6^2 = 4r^2 + S_6^2 \Rightarrow S_6^2 = \frac{4}{3}r^2 \Rightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r \\ &\Rightarrow S_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Když se hodnoty s_6 a S_6 vloží do vztahu 4, vyjde, že $3 < \pi < 2\sqrt{3}$. Archimédes u této hodnoty nevydržel, a tak počítal dál, ale protože pro víceúhelníky není výpočet tak jednoduchý⁷, odvodil si vztah pro $2n$ -úhelníky.

Z obrázku 8 můžeme sestavit soustavu 3 rovnic, ze kterých se dá vyjádřit s_{2n} :

1. Protože se jedná o mnohoúhelník vepsaný, vrcholy budou ležet vždy na kružnici ve vzdálenosti r od středu S .

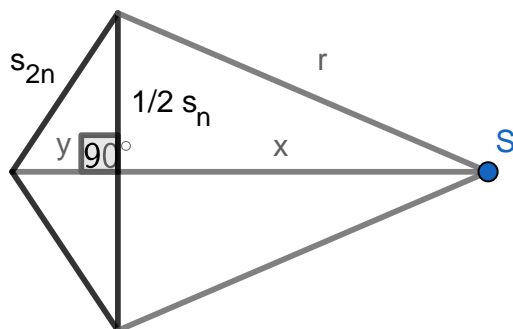
$$r = x + y$$

2. Pro pravoúhlý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

⁶Pravidelný šestiúhelník se skládá z šesti rovnostranných trojúhelníků. To znali již Babyloňané[1].

⁷Za Archiméda nebyly známé goniometrické funkce. První, kdo určil jejich hodnoty, byl Ptolemaios. [3]



Obrázek 8: 1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanáctiúhelníka

3. Pro levý trojúhelník z obrázku 8 podle Pythagorovy věty platí, že:

$$s_{2n}^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = y^2 + \frac{1}{4}s_n^2.$$

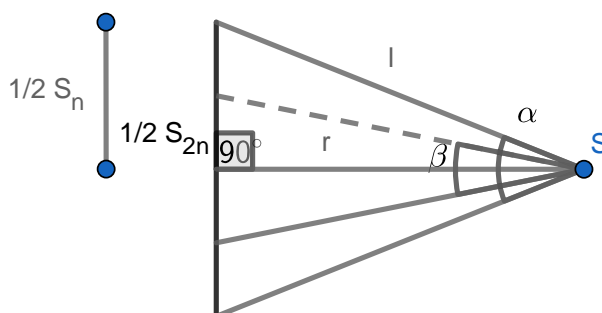
Celá soustava se dá upravit a dá se z ní vyjádřit s_{2n} . (Jednotlivé rovnice soustavy rovnic jsou zapsány ve sloupcích pod sebou a jednotlivé kroky úprav jsou vždy mezi sloupci doprava.)

$$\begin{array}{lll} x + y = r & x + y = 1 & y = 1 - x \\ x^2 + \frac{s_n^2}{4} = r^2 & x^2 + \frac{s_n^2}{4} = 1 & x = \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \\ y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 & y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 & y^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \end{array}$$

$$(1-x)^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2x + x^2 + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2 \Rightarrow 1 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} + 1 - \frac{s_n^2}{4} + \frac{s_n^2}{4} = s_{2n}^2$$

$$\Rightarrow s_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}} \Rightarrow s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad (7)$$

Z obrázku 9 je patrné, že když se zpoloviční úhel α na úhel β (zdvojnásobení počtu vrcholů),



Obrázek 9: 1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhelníka

musí platit:

$$\frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} = \frac{r}{l},$$

protože v libovolném trojúhelníku je poměr libovolných dvou stran svírající úhel φ stejný jako poměr úseček ve zbývajících straně rozdělené osou úhlu φ . Pomocí Pythagorovy věty lze spočítat stranu l .

$$l = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{2}S_n\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}$$

Nyní stačí dosadit a vyjádřit S_{2n} [6].

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}S_{2n}}{\frac{1}{2}(S_n - S_{2n})} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_n - S_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \\ \Rightarrow \frac{S_{2n}}{S_{2n}\left(\frac{S_n}{S_{2n}} - 1\right)} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow \frac{S_n}{S_{2n}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2} \\ \Rightarrow S_{2n} &= \frac{S_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}S_n^2}} \Rightarrow S_{2n} = \frac{2S_n}{2 + \sqrt{4 + S_n^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

Tímto postupem došel až k 96-úhelníku a vypočítal, že $3\frac{10}{71} < \pi < \frac{1}{7}$, neboli $3.1408 < \pi < 3.1429$. Ve výpočtu musel odmocňovat, například $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}$, ale dodnes se neví, jak to udělal.

Je možné, že Archimédes šel později ještě dál, protože v roce 1896 v Istanbulu byla nalezena Metrika z roku 60 př. n. l. od Herona z Alexandrie (10-70 n. l. [7]), kde se Heron odvolává na Archiméda s tím, že $3.1416 < \pi < 3.1738$. Chyba v horním intervalu vznikla asi opisem originálu. [1]

2.2 Středověk

Vzhledem k tomu, že během středověku probíhal souboj vědy a náboženství a starověké poznatky stačily, došlo v řadě vědeckých disciplín, včetně matematiky, k útlumu. Jedni z mála, kteří se v této době zabývali π , byl Leonardo Fibonacci a Mikuláš Kusánský. [1] [12]

2.2.1 Leonard Fibonacci

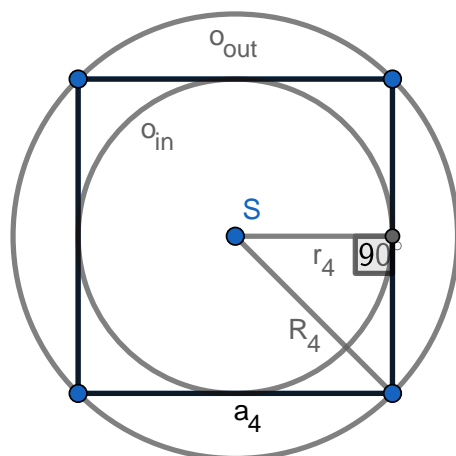
Leonardo z Pizy/Fibonacci (1180-1250) použil ke svému výpočtu π Archimédovu metodu. Pomocí decimální aritmetiky, která ještě za Archiméda nebyla známá, došel u 96-úhelníku k nerovnosti $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$. Když se z mezních hodnot udělá průměr:

$$\frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{5}}{2} = \frac{29}{90} \doteq \frac{1}{3},$$

vyjde Fibonacciho hodnota $\pi \frac{864}{275} \approx 3,141818$. [1] [10]

2.2.2 Mikuláš Kusánský

Mikuláš Kusánský (1401-1464) byl německý filosof, teolog, diplomat, matematik a kardinál v Římě. Objevil novou, tzv. „sendvičovou“ metodu pro výpočet π . Vzal si pravidelný n -úhelník s obvodem 2, který byl vepsán a opsán kružnicemi (obr. 10), a zdvojnásobováním úhlů v mnohoúhelník o stejném obvodu zpřesňoval krajní intervaly výpočtů π .



Obrázek 10: Kusánského algoritmus

Začal na čtverci o straně a_4 , která se rovnala $\frac{1}{2}$. Poloměr vepsané kružnice r_n je polovina strany čtverce, tj. $\frac{1}{4}$. Poloměr opsané kružnice R_n lze spočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$R_4 = \sqrt{r_4^2 + \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Když znal poloměr vepsané a opsané kružnice, začal iterovat pomocí jeho nalezených vzorců pro obvody kružnic v $2n$ -úhelníku.

$$r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad (9)$$

$$R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}} \quad (10)$$

Jak již bylo zmíněno, obvod opsané o_{in} a vepsané o_{out} kružnice tvoří meze intervalu, ve kterém se nachází obvod n -úhelníka o . Interval lze rozepsat do dvou nerovností.

$$\begin{aligned} o_{in} < o &\Rightarrow 2\pi r_n < o \Rightarrow \pi < \frac{2}{2r_n} \Rightarrow \pi < \frac{1}{r_n} \\ o < o_{out} &\Rightarrow o < 2\pi R_n \Rightarrow \frac{2}{2R_n} < \pi \Rightarrow \frac{1}{R_n} < \pi \end{aligned}$$

Z předchozích dvou nerovností lze udělat jednu nerovnost.

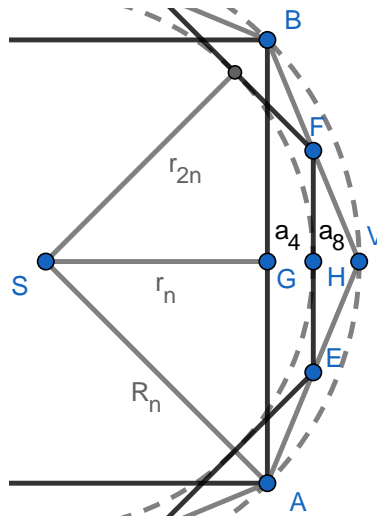
$$\frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n} \quad (11)$$

Kdyby nezvolil obvod n -úhelníku 2 ale libovolný jiný o , dostal by nerovnost pro výpočet π :

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n}$$

Kusánský přišel ke vzorci 9 tak, že sestrojil konstrukci, v které je čtyř- a osmiúhelník o stejném obvodu (obr. 11), takže platí, že:

$$|AB| = 2|EF| \Rightarrow a_4 = 2a_8.$$



Obrázek 11: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

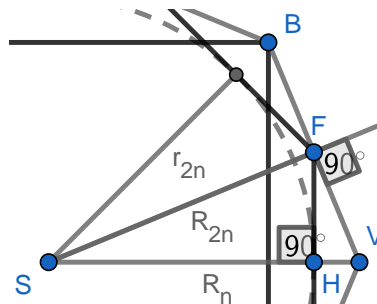
Z tohoto tvrzení plyne, že bod H , který je od středu S vzdálen jako poloměr vepsané kružnice $2n$ -úhelníku⁸, je přesně uprostřed mezi G a V , což si lze ověřit tak, že vezmeme pravoúhlý trojúhelník GVB , který bude mít úhel α při vrcholu V , a pomocí funkce tangens zapíšeme rovnici:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{|BG|}{|GV|}\right) &= \tan\left(\frac{|FH|}{|HV|}\right) \Rightarrow \frac{|BG|}{|GV|} = \frac{|FH|}{|HV|} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}a_4}{|GV|} = \frac{\frac{1}{2}a_8}{|HV|} \\ &\Rightarrow \frac{2}{|GV|} = \frac{1}{|HV|} \Rightarrow |GV| = 2|HV|. \end{aligned}$$

Tedy stačí délky poloměrů zprůměrovat.

$$|SH| = \frac{|SG| + |SV|}{2} \Rightarrow r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

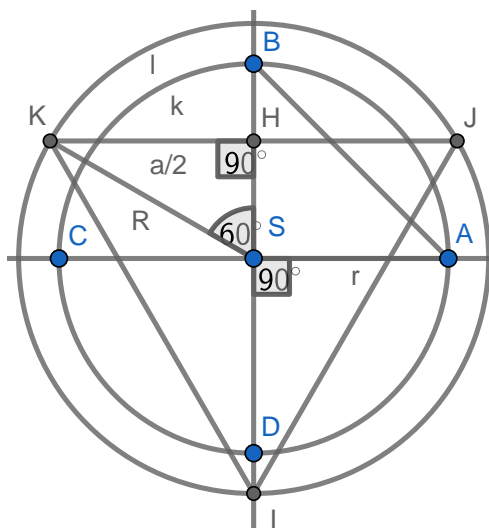
Vzorec 10 vychází z Euklidovy věty o odvěsně (obr. 12) [9], kde:



Obrázek 12: Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka

$$|SF|^2 = |SV||SH| \Rightarrow |SF| = \sqrt{|SV||SH|} \Rightarrow R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}.$$

Kusánský se ještě před objevením tohoto algoritmu zabýval geometrickým přiblížením k obvodu kruhu. Vymyslel hned několik přiblížení. Pravděpodobně nejpresnější se nachází v knize



Obrázek 13: Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka

„Dialogus de circuli quadratura“ z roku 1457. Toto přiblížení je na obrázku 13. V konstrukci na obrázku hledá přiblížení obvodu o_k kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r . Kružnice protínají kolmé přímky v bodech A, B, C a D se společným bodem S . Dále narýsoval kružnici l s poloměrem R , který se rovná:

$$R = \frac{r + |AB|}{2} = \frac{r + \sqrt{r^2 + r^2}}{2} = \frac{r + \sqrt{2}r}{2} = \frac{r(1 + \sqrt{2})}{2}$$

Na kružnici l umístil bod K tak, aby platilo, že úhel BSK je 60° . Nakonec vepsal do kružnice l rovnostranný trojúhelník IJK se stranou a . Strana a se rovná:

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2R} \Rightarrow a = \frac{2R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2}$$

Když oba obvody porovnáme, zjistíme přibližnou hodnotu π [13].

$$o_k = o_{\triangle IJK} \Rightarrow 2\pi r = 3a \Rightarrow 2\pi r = \frac{3r(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{2} \Rightarrow \pi = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{6})}{4}$$

$$\pi \approx 3,136$$

2.3 Novověk

Konec 15. století a začátek 16. století byl ve znamení zámořských cest. Z tohoto důvodu byl požadavek na přesnější měřicí přístroje, což mělo za následek rozvoj přírodních věd včetně matematiky. [1]

2.3.1 François Viète

François Viète (1540–1603) jako první vymyslel algoritmus na výpočet π založený na nekonečném součinu (vzorec 12).

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \dots \quad (12)$$

⁸v tomto případě osmiúhelníku

Vydal ho v knize „Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII“ v roce 1593 [1]. Tento lze snadno odvodit pomocí goniometrických funkcí.

Pomocí vzorce:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

můžeme libovolně mnohokrát rozložit sinus.

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \left(2 \sin \frac{x}{2 \cdot 2} \cos \frac{x}{2 \cdot 2} \right) \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2^3 \sin \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Již ve třetím rozkladu je vidět obecný vzorec pro rozklad.

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} \Rightarrow \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

Pravou stranu nově vzniklé rovnice rozšíříme o $\frac{x}{x}$.

$$\prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sin \frac{x}{2^n}} \quad (13)$$

Další úpravy budou za podmínky, že n se bude limitně blížit nekonečnu. A protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = 1,$$

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i}. \quad (14)$$

Když za x dosadíme $\frac{\pi}{2}$, vyjde nám:

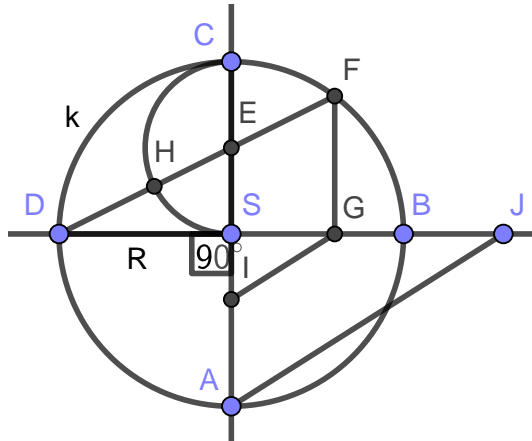
$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots, \quad (15)$$

což lze upravit na rovnici 12. Z té samé rovnice lze vyjádřit i samotné π .

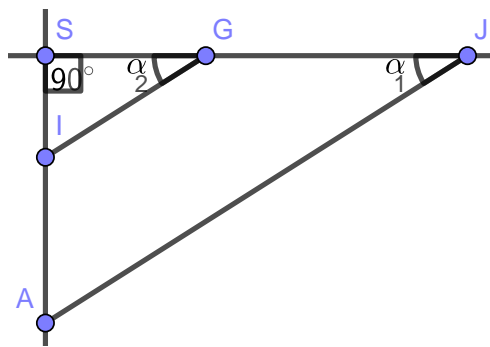
$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \dots$$

François Viète během svého života spočítal π na 9 desetinných míst a použil k tomu ne svůj, ale Archimédův algoritmus [11].

Kromě tohoto algoritmu publikoval v tomtéž díle také geometrickou aproximaci π (obrázek 14). Na obrázku je kružnice o_k se středem S a poloměrem R neboli SA , úsečka AI , která je stejně dlouhá jako úsečka DH a dvě rovnoběžné přímky: IG a AJ . Obvod kružnice o_k je přibližně $4SJ$. Pomocí zmíněné aproximací můžeme dopočítat přibližnou hodnotu π .



Obrázek 14: Viětova geometrická aproxiace



Obrázek 15: Pravoúhlý trojúhelník SIG a SAJ

Protože podle věty uu⁹ je trojúhelník SIG podobný trojúhelníku SAJ, můžeme napsat, že

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|} \Rightarrow |SJ| = \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}$$

To lze dokázat pomocí obrázku 15, kde platí:

$$|SI| = |SG| \tan \alpha$$

$$|SA| = |SJ| \tan \alpha$$

První rovnici můžeme vydělit tou druhou a dostaneme:

$$\frac{|SI|}{|SA|} = \frac{|SG|}{|SJ|}$$

π se dá pak vyjádřit:

$$\pi = \frac{o_k}{2R} = \frac{4|SJ|}{2R} = \frac{2 \frac{|SA| \cdot |SG|}{|SI|}}{R} = \frac{2 \frac{R \cdot |SG|}{|SI|}}{R} = 2 \frac{|SG|}{|SI|}$$

K výpočtu velikosti SI použijeme délku úsečky DE z trojúhelníku DSE . Podle Pythagorovy věty

$$|DE|^2 = |DS|^2 + |SE|^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = R^2 + \frac{1}{4}R^2 = \frac{5}{4}R^2 \Rightarrow |DE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R$$

⁹úhel-úhel

Dále potřebujeme délku úsečky DH .

$$|DH| = |DE| - |HE| = \frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{1}{2}R = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)R$$

Nyní můžeme spočítat SI .

$$\begin{aligned} |SI| &= |SA| - |AI| = |SA| - |DH| = R - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)R = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)R = \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)R = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})R \end{aligned}$$

Podle věty uu je trojúhelník DSE podobný s trojúhelníkem DGF , proto

$$\frac{|DG|}{|DS|} = \frac{|GF|}{|SE|} \Rightarrow \frac{|DG|}{|GF|} = \frac{|DS|}{|SE|} = \frac{R}{\frac{1}{2}R} = 2 \Rightarrow |DG| = 2|GF|$$

Úsečku DG můžeme rozdělit na dvě úsečky se společným bodem S .

$$|DG| = |DS| + |SG| \Rightarrow 2|GF| = R + |SG| \Rightarrow G = \frac{1}{2}(R + |SG|)$$

Podle Pythagorovy věty lze napsat, že

$$\begin{aligned} |SG|^2 + |GF|^2 &= |SF|^2 \Rightarrow |SG|^2 + \left(\frac{1}{2}(R + |SG|)\right)^2 = R^2 \\ \Rightarrow |SG|^2 + \frac{1}{4}(R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2) - R^2 &= 0 \\ \Rightarrow 4|SG|^2 + R^2 + 2R \cdot |SG| + |SG|^2 - 4R^2 &= 0 \Rightarrow 5|SG|^2 + 2R \cdot |SG| - 3R^2 = 0 \\ \Rightarrow |SG| &= \frac{-2R \pm \sqrt{4R^4 + 60R^2}}{10} = \frac{-2R \pm 8R}{10} = \frac{-R \pm 4R}{5} \end{aligned}$$

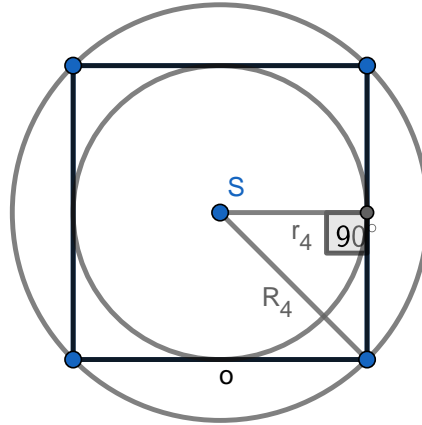
Protože v tomto případě nemůže být délka záporná, použijeme znaménko $+$.

$$|SG| = \frac{-R + 4R}{5} = \frac{3}{5}R$$

Nyní stačí dosadit do vzorce pro výpočet π .

$$\pi = 2 \frac{|SG|}{|SI|} = 2 \frac{\frac{3}{5}R}{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})R} = \frac{12}{5(3 - \sqrt{5})} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5}(3 + \sqrt{5})$$

Podle Vièteho geometrické aproximace přibližně vychází pro π hodnota 3,14164. [14]



Obrázek 16: Descartesův algoritmus

2.3.2 Descartův algoritmus

René Descartes (1596-1650), francouzský matematik a filosof, dal světu kartézskou soustavu souřadnic a racionalistickou filosofií, která se stala základem klasicismu. Vymyslel nový algoritmus, který byl publikován až posmrtně v roce 1701. Spočíval v tom, že n -úhelník o poloměru o je obehán vepsanou a opsanou kružnicí o poloměrech r_n a R_n (obrázek 16), a pomocí vzorců lze spočítat poloměry pro $2n$ -úhelníky o stejném obvodu [11] [17].

$$r_{2n} = \frac{r_n + R_n}{2} \quad (16)$$

$$R_{2n} = \sqrt{\frac{R_n(r_n + R_n)}{2}} \quad (17)$$

Když použijeme vzorec pro obvod kruhu

$$o = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{o}{2r},$$

můžeme π vyjádřit nerovností:

$$\frac{o}{2R_n} < \pi < \frac{o}{2r_n} \quad (18)$$

2.3.3 Willebrord Snell

Roku 1654 Christiaan Huygens (1629-1695) použil nerovnici od Willebrorda Snella (1580-1626) z roku 1621 k výpočtu přibližné hodnoty π . Nerovnice vypadala takto:

$$\frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi} < \varphi < \tan \frac{\varphi}{3} + 2 \sin \frac{\varphi}{3}, \quad (19)$$

a když do ní dosadil, že $\varphi = \frac{\pi}{30}$, dostal, že π je 3,141 592 653... Přesnost byla na 9 desetinných míst [11].

Snell v roce, kdy vydal předchozí nerovnost, vydal v knize „Cyclometria sive de circuli dimensione“ 2 nerovnice zvyšující účinnost Archimédovy metody. Zjistil totiž, že v jakékoliv



Obrázek 17: Interval z Archimédovy metody

fázi iterování pro $n \geq 3$ je π blíže spodní hranici intervalu q_n než spodní hranici intervalu p_n (obrázek 17).

$$\pi - p_n < q_n - \pi$$

Pro jednotlivé $n \geq 3$ pak mu vyšly 2 stálé nerovnosti.

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2 \quad (20)$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} = 4 \quad (21)$$

Když tyto nerovnosti upravíme:

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} > 2 \quad \Rightarrow \quad q_n - \pi > 2\pi - 2p_n \quad \Rightarrow \quad -3\pi > -2p_n - q_n \quad \Rightarrow \quad \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

$$\frac{\pi - p_n}{\pi - p_{2n}} < 4 \quad \Rightarrow \quad \pi - p_n < 4\pi - 4p_{2n} \quad \Rightarrow \quad -3\pi < -4p_{2n} + p_n \quad \Rightarrow \quad \pi > \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n,$$

získáme nerovnice pro výrazné zúžení intervalu z Archimédova algoritmu.

Snell sice tyto nerovnosti objevil, ale dokázal je až Huygens v „De circuli magnitudine inventa“ v roce 1654 [15].

2.3.4 Wallisův nekonečný součin

John Wallis (1616 – 1703 [11]) v roce 1655 v knize „Arithmetica Infinitorum“ vydává po Viètem druhý nekonečný součin a zároveň historicky první algoritmus pro výpočet π obsahující pouze racionální operace [1].

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots} \quad (22)$$

Ten lze přepsat do moderní obecnější podoby pro π .

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \left(\frac{2i}{2i-1} \cdot \frac{2i}{2i+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \prod_{i=1}^n \frac{4i^2}{4i^2 - 1} \quad (23)$$

2.3.5 Gregoryho algoritmus

James Gregory (1638-1675) představil v roce 1667 veřejnosti nový algoritmus založený na kružnici o poloměru r opsané a vepsané n -úhelníkem (obrázek 5). Algoritmus počítá obsah vepsaného s a opsaného S $2n$ -úhelníka pomocí vzorců [11]:

$$s_{2n} = \sqrt{s_n S_n} \quad (24)$$

$$S_{2n} = \frac{2s_n S_n}{s_n + s_{2n}}. \quad (25)$$

Když upravíme vzorec pro výpočet obsahu kruhu, dostaneme:

$$S = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{S}{r^2},$$

proto můžeme napsat, že obsah vepsaného s a opsaného S $2n$ -úhelníka pomocí vzorců [11]:

$$\frac{s_n}{r^2} < \pi < \frac{S_n}{r^2}. \quad (26)$$

2.3.6 Brounckerův řetězový zlomek

William Brouncker (1620-1684) objevil nový řetězový zlomek na výpočet π .

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}} \quad (27)$$

Neznáme jeho odvození, ale dochovalo se nám odvození od Leonharda Eulera z roku 1775. Jednotlivé členy Gregoryho-Leibnizovy řady rozložil:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + 1 \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) + 1 \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{5}{7}\right) + \dots$$

a pomocí vzorce:

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - \frac{a_2 a_3}{1 + a_2 - \frac{a_3}{1 + a_3 - \dots}}}$$

přepsal na [1]:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 - \frac{-\frac{1}{3}}{1 + (-\frac{1}{3}) - \frac{-\frac{3}{5}}{1 + (-\frac{3}{5}) - \dots}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \dots}}$$

Můžeme místo poslední úpravy rovnici vynásobit 4 a dostat rovnici pro samotné π :

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}} \quad (28)$$

2.3.7 Gregoryho-Leibnizova řada

Tato nekonečná řada byla objevena nezávisle dvěma matematiky: v roce 1671 James Gregory a v roce 1674 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (29)$$

Gregory pomocí Cavalieriho vzorce a dlouhého dělení v integrandu dosáhl Taylorova rozvoje pro funkci arkus tangens. Taylorův rozvoj lze dnešním zápisem zapsat takto:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

Protože známe hodnotu arkus tangens v bodě 0 ($\arctan(0) = 0$), můžeme tuto hodnotu dosadit za a :

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \frac{\arctan(a)}{1} (x-a)^0 + \frac{\frac{1}{a^2+1}}{1} (x-a)^1 + \frac{\frac{0(a^2+1)-1(2a+0)}{(a^2+1)^2}}{2} (x-a)^2 + \\ &\quad + \frac{\frac{-2(a^2+1)^2 - (-2a)2(a^2+1)2a}{(a^2+1)^4}}{6} (x-a)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctan(x) &= \arctan(a) + \frac{1}{a^2+1} (x-a) + \frac{-2a}{2(a^2+1)^2} (x-a)^2 + \\ &\quad + \frac{-2(a^2+1)^2 + 8a^2(a^2+1)}{6(a^2+1)^4} (x-a)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctan(x) &= \arctan(0) + \frac{1}{0^2+1} (x-0) + \frac{-2 \cdot 0}{2(0^2+1)^2} (x-0)^2 + \\ &\quad + \frac{-2(0^2+1)^2 + 8 \cdot 0^2(0^2+1)}{6(0^2+1)^4} (x-0)^3 + \dots \\ \Rightarrow \arctan(x) &= x + \frac{-2}{6} x^3 + \dots \quad \Rightarrow \quad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots \end{aligned}$$

Kdybychom hned ze začátku pracovali s osmi členy namísto čtyř, řada by vypadala takto:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Nakonec Gregory dosadil $x = 1$ a dostal řadu v rovnici 29. Po vynásobení 4 dostaneme řadu pro samotné π , kterou lze zapsat modernějším způsobem [11][1]:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i+1} \quad (30)$$

2.3.8 Kochaňského geometrická aproximace

Roku 1685 Adam Adamandy Kochański (1631 Dobrzyń n. Wisłą-1700 Teplice v Čechách [11][8]), polský matematik, který působil jako jezuita velkou část svého života v Čechách, vy počítal přibližnou hodnotu π pomocí své vlastní konstrukce, která je na obrázku 18, kde platí, že $\vartheta = 30^\circ$ a úsečka CD je přibližně polovina obvodu kruhu o poloměru r .

Úsečku CD lze spočítat pomocí Pythagorovi věty.

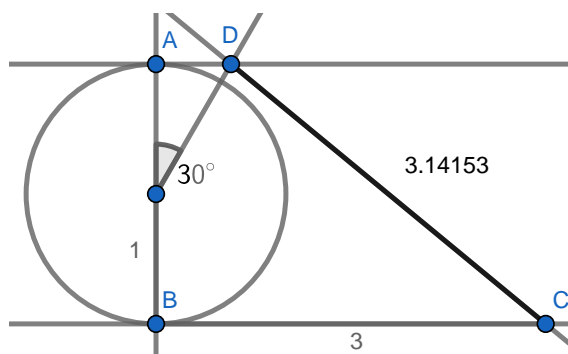
$$|CD| = \sqrt{|AB|^2 + (|AD| - |BC|)^2} = \sqrt{(2r)^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30^\circ)^2} = \sqrt{4r^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{4r^2 + \frac{(3\sqrt{3}-1)^2}{3}r^2} = r\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} \quad (31)$$

Nakonec úsečku stačí tāt do vzorce pro π .

$$\pi = \frac{2r\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}}}{2r} = \sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} \quad (32)$$

Ze vzorce 32 je jasné, že Kochanski došek k hodnotě π 3,141533. [1]



Obrázek 18: Kochanského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem

2.3.9 Newtonovy řady

Sir Issac Newton (1642-1727 [11]), zakladatel integrálního a diferenciálního počtu, objevil hned několik řad. Nejznámější vychází z jím objeveného vzorce:

$$\arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

který jde s použitím jeho objevu binomické věty upravit na:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int (1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots)dx = \\ &= x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

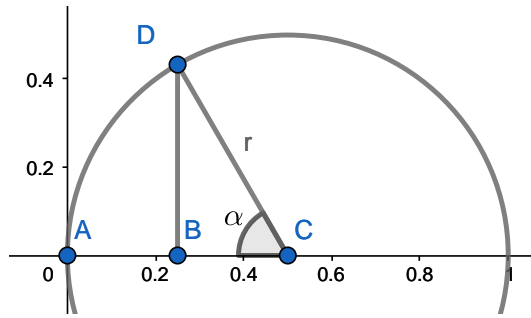
Po dosazení $x = \frac{1}{2}$, dostaneme vzorec pro výpočet π [1]:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \pi = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \dots \right), \quad (33)$$

který jde moderním způsobem zapsat jako [17]:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \sum_{i=0}^n \frac{(2i)!}{2^{4i+1} (i!)^2 (2i+1)} \quad (34)$$



Obrázek 19: Kružnice $y = \sqrt{x - x^2}$ s výšecí

Další známou řadu publikoval 1737 v knize „Treatise on the Method of Fluxions and Infinite Series“. Vychází z rovnice kružnice:

$$y = \sqrt{x - x^2},$$

kteřou lze vidět na obrázku 19. Pomocí binomické věty vyřešil obsah a poloviční úseče ABD :

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} \sqrt{1 - x} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{1}{5} \sqrt{x^5} - \frac{1}{28} \sqrt{x^7} - \frac{1}{72} \sqrt{x^9} - \dots \right]_0^{\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Plocha poloviční úseče je obsah S_v výšecí ACD bez obsahu S_t trojúhelníku BCD

$$a = S_v - S_t \quad (36)$$

Nejdříve spočítal úsečku $|BD|$:

$$|BD| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

a pak úhel α :

$$\alpha = \arctg\left(\frac{|BD|}{|BC|}\right) = \arctg\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}\right) = \arctg \sqrt{3} = 60^\circ.$$

Z úhlu α je jasné, že a je $\frac{1}{6}$ obsahu kruhu. S těmito znalosti lze spočítat vzorec 36.

$$a = S_v - S_t = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{|BD| \cdot |BC|}{2} = \frac{\pi \frac{1}{4}}{6} - \frac{\frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} \Rightarrow \pi = 24 \left(\frac{\sqrt{3}}{32} + a \right) \quad (37)$$

Do vzorce 37 dosadil za a vzorec 35 [1].

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots \right) \quad (38)$$

Vzorec 38 lze zapsat moderním způsobem jako [17]:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \sum_{i=0}^n \frac{(2i)!}{2^{4i+2} (i!)^2 (2i-1)(2i+3)} \quad (39)$$

2.3.10 Sharpova řada

Abraham Sharp (1651-1742) zrychlil Gregoryho-Leibnizovu řadu tím, že do Teylorova rozvoje pro $\arctg(x)$ dosadil za x $\frac{1}{\sqrt{3}}$ [1].

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \pi = 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{3} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{3^i(2i+1)} \quad (40)$$

2.3.11 Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) sjednotil matematický zápis a symboliku do dnešní podoby, např.: $f(x)$, $\int dx$, i , e , \sum . Od jeho doby se řeckým písmenem π označuje konstanta, o které je tato práce.

Dalším výsledkem jeho celoživotní práce je objev několika nekonečných řad vedoucích k π , z nichž je neznámější vyřešení řady převrácených dvojmocí z roku 1736. Tento matematický problém se celá desetiletí marně snažila vyřešit celá spousta matematiků, např.: G. W. Leibniz nebo J. Bernaulli I. Euler použil k řešení řady převrácených dvojmocí Taylorův rozvoj pro funkci $\sin x$, která byla známa už za Newtona.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Řadu řešil pro $\sin x = 0$, vydělil ji x ($x \neq 0$) a následně substituoval $y = x^2$.

$$0 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \Rightarrow 0 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \Rightarrow 0 = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \dots \quad (41)$$

Jestliže rovnice 41 měla před úpravou dělením kořeny: $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, tak po substituci má kořeny: $y = (n\pi)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Pomocí teorie rovnic vymyslel úpravu rovnice, dnes známou jako Viětovy vztahy, která zní: Součet převrácených hodnot kořenů $(\frac{1}{(n\pi)^2})$, $n \in \mathbb{N}$ je roven záporně vzatému podílu lineárního a absolutního členu $(\frac{1}{3!})$ [1].

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (42)$$

Vzorec 42 lze přepsat pro samotné π

$$\pi = \sqrt{6} \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}} \quad (43)$$

Stejným způsobem odvodil řadu pomocí funkce $\cos x$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \Rightarrow 0 = 1 - \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} - \frac{y^3}{6!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!} = \frac{1}{(0,5\pi)^2} + \frac{1}{(1,5\pi)^2} + \frac{1}{(2,5\pi)^2} + \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (44)$$

Odečtením rovnice 42 od dvojnásobku 44 dostal další řadu:

$$\frac{2\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{2}{1^2} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^2} - \dots \Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots \quad (45)$$

Z rovnic 44 a 45 jde vyjádřit π .

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt{2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)^2}} \quad (46)$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt{3 \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}} \quad (47)$$

2.3.12 Legendreho algoritmus

Adrien Legendry (1752-1833) v roce 1794 publikoval dílo „Éléments de géométrie“ podobným algoritmem jako M. Kusánský jen s rozdílem, že kromě poloměru opsané a vepsané kružnice R a r k $2n$ -úhelníku počítá ještě koeficient s .

$$R_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2} \quad (48)$$

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n R_n} \quad (49)$$

$$s_{n+1} = s_n - 2^n (R_n - R_{n+1})^2 \quad (50)$$

Za počáteční hodnoty zvolíme $R_0 = 1$, $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $s_0 = \frac{1}{4}$.

Nyní stačí pro výpočet π použít následující vzorec [11][16]:

$$\frac{R_{2n}^2}{s_n} < \pi < \frac{R_n^2}{s_n} \quad (51)$$

2.4 Moderní algoritmy s využití počítačů

V září roku 1949 v Laboratořích balistického výzkumu v Pensylvánii byl zřejmě proveden historicky první výpočet hodnoty π . Počítač ENIAC spočítal pomocí Machinova vzorce

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \quad (52)$$

za 70 hodin π s přesností na 2037 desetinných míst. Tento rekord byl několikrát překonán. Poprvé 1954/1955 v Dahlgrenu ve Virginii, kdy počítač NORC spočítal za 13 minut π na 3089 platných míst.

Pro změnu jiný vzorec byl použit v březnu 1957 v Počítačovém centru v Londýně. Za 53 hodin zvládl počítač Pegasus výpočet π s užitím Strassenitzkého vzorce

$$\pi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \quad (53)$$

na 10 021 desetinných míst. Bohužel od 7480. místa byla chyba, protože vzorec v počítači nebyl identický. Na jaře dalšího roku byl výpočet zopakován správně.

Na kombinaci Machinava a Gregoryho vzorce

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 16 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i+1) \cdot 5^{2i+1}} - 4 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i+1) \cdot 239^{2i+1}} \quad (54)$$

vsadili v červenci 1960 v Data Processing Centre v Paříži a z počítače IBM704 získali prvních 10 000 desetinných míst za 1 hodinu 40 minut.

Poslední vzorec zde popsaný bude Strömerův:

$$\pi = 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \quad (55)$$

Byl použit v červenci 1961 na počítači IBM 7090 v IBM Processing Centre v New Yorku a za 8 hodin a 43 minu měli π na 100 265 platných míst. Ten samý vzorec spolu s Shanksonovo-Wrenchovou metodou byl základem výpočtu π na 500 000 desetinných míst v KPAE v Paříži počítačem CDC6600 v únoru 1967. [1][20]

3 METODA MONTE CARLO

Monte Carlo, zkráceně MC, je metoda numerického výpočtu pomocí generování náhodné veličiny¹⁰. Použití našla hlavně s rozvojem výpočetní techniky, protože do té doby jsme nemohli generovat pseudonáhodná čísla jinak než ručními výpočty, což mělo za následek nedostatek hodnot pro seriózní výsledek za rozumný čas. Pro generování jde sice použít i fyzikální experiment, například hod kostkou, ale i ten není čistě náhodný, protože je ovlivněn tím, jak házíme. V dnešní době metoda nachází hlavní užití pro fyzikální simulace pravděpodobnostních jevů, např.: v kvantové fyzice, nebo k výpočtu poměru obsahů. [1][19]

3.1 Obsah kruhu

Pomocí MC sice přímo nemůžeme spočítat určitý integrál, ale můžeme si vyjádřit obsah plochy pod křivkou z daného poměru. Pokud budu znát obsah výseče, která zaujímá čtvrtinu kruhu (obrázek 20), mohu si π spočítat.

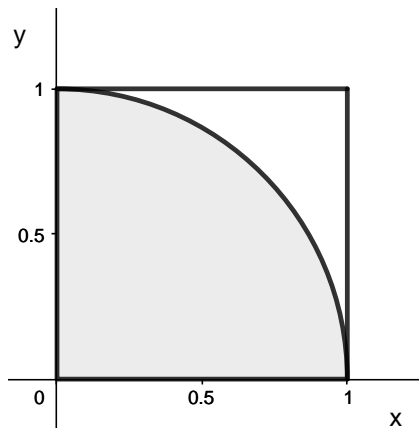
Principem této metody je, že budeme generovat pseudonáhodné body na určité ploše o obsahu S_1 a budeme zjišťovat, jestli bod leží pod křivkou na ploše o obsahu S_2 . Poměr počtu všech

¹⁰Náhodná veličina je veličina s přiřazenou náhodnou hodnotou. Protože většinou je získávána pomocí algoritmu, nikoliv dílem náhody, označuje se jako pseudonáhodná.

bodů na pod křivkou m s celkovým počtem bodů n je pro velké n rovný poměru obsahu S_1 s S_2 .

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{n}{m}, \quad n \rightarrow \infty \quad (56)$$

Protože s rovnicí kruhu budu zacházet jako s funkcí



Obrázek 20: Integrace $\frac{1}{4}$ kruhu $y^2 = 1 - x^2$

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

budeme pracovat s částí nad osou x , přesněji v 1. kvadrantu. Plocha, ve které budeme generovat body, má tvar čtverce o straně a rovné 1, protože kruh o rovnici $y^2 = 1 - x^2$ má poloměr r rovný 1, proto generované body mají tvar $X_i[x_i, y_i]$, kde x_i a y_i jsou pseudonáhodná čísla od 0 do 1. Zda leží body ve výšce, prověříme funkcí:

$$y_i \leq y(x_i) \quad \Rightarrow \quad y_i \leq \sqrt{1 - x_i^2}$$

Po vygenerování velkého množství bodů dostaneme čísla n a m , ze kterých si vyjádříme π .

$$\frac{n}{m} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{4n}{m} \quad (57)$$

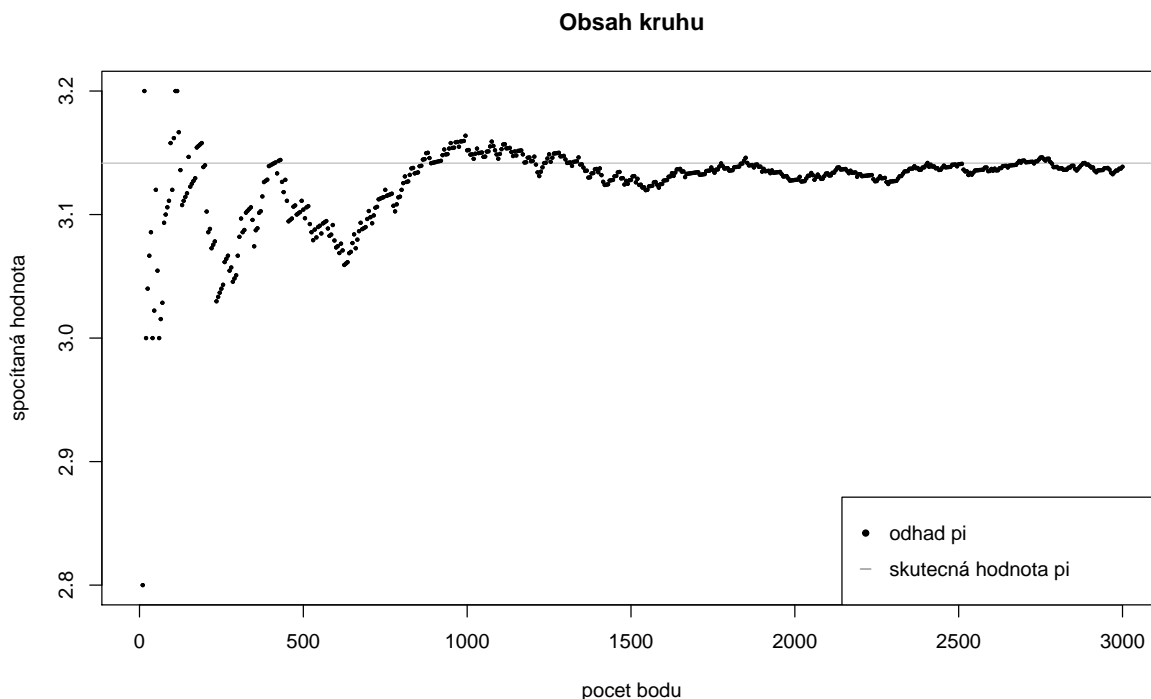
Na obrázku 21 je vystup z počítače, který počítal π pomocí výše popsaného algoritmu.

3.2 Buffonova jehla

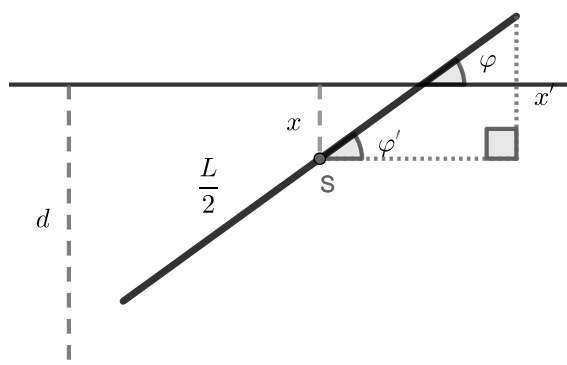
Georges Louis Leclerc, kníže de Buffon, známý svým šokujícím sdělením o stáří světa¹¹, navrhl experiment vedoucí k hodnotě π pomocí pravděpodobnosti. Experiment, ilustrovaný na obrázku 22, spočívá v házení jehel o délce L se středem v bodě S na rovnou plochu rozdělenou rovnoběžnými přímkami ve vzdálenosti d , která nepřekračuje délku samotné jehly. Pravděpodobnost P , že jehla protne přímkou, lze vyjádřit vztahem:

$$P = \frac{2L}{d\pi} \quad (58)$$

¹¹Svým tvrzením, že svět je starý 75000 let, šokoval vzdělance té doby. V 18. století se stále věřilo, že svět není starší více jak 6000 let.



Obrázek 21: Výpočet obsahu kruhu metodou Monte Carlo

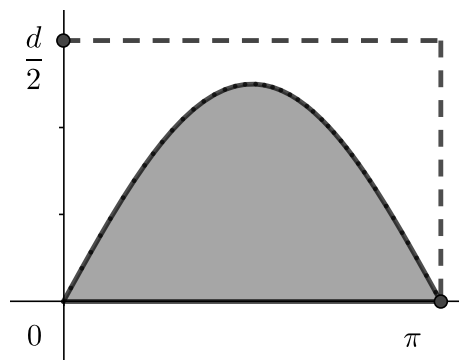


Obrázek 22: Buffonův experiment s jehlou

Vztah 54 jde odvodit pomocí jednoho integrálu. Jestliže střed jehly S je vzdálen od přímky vzdáleností x , platí, že když je x menší než vzdálenost vrcholu jehly x' od S na ose kolmé k přímkám, jehla protne přímkou.

$$x < x' \Rightarrow x < \frac{1}{2}L \sin \varphi$$

Protože je stejně pravděpodobné, jakou přímkou jehla protne, stačí spočítat pravděpodobnost protnutí jedné konkrétní přímky. Jestliže úhel náklonu jehly φ je v rozsahu od 0 do π (z obou stran je stejná) a x je v rozsahu od 0 do $\frac{d}{2}$, mohou všechny možnosti dopadu interpretovat grafem na obrázku 23. Plocha S_1 pod křivkou, představující rovnicí $x = \frac{1}{2}L \sin \varphi$, znázorňuje všechny případy protnutí přímky jehlou. Pravděpodobnost protnutí se dá spočítat z podílu S_1 a plochy



Obrázek 23: Graf protnutí přímky

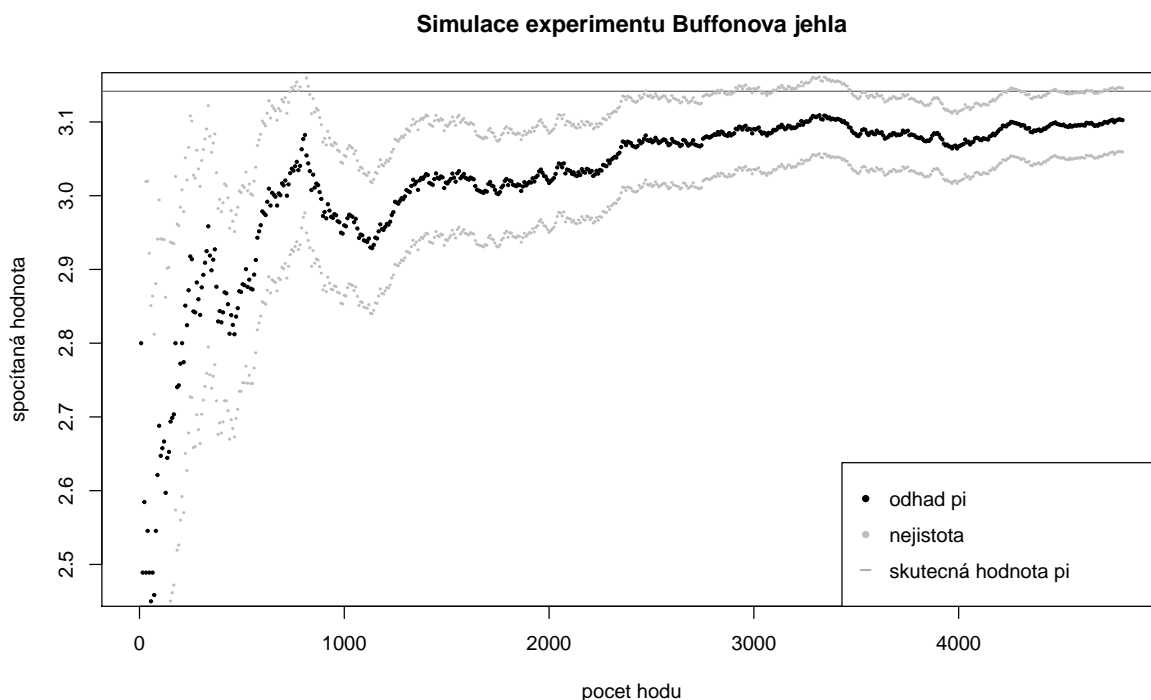
S_2 , znázorňující všechny případy hodů:

$$P = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2} L \sin \varphi d\varphi}{\frac{1}{2} d\pi} = \frac{L \left[-\cos \varphi \right]_0^\pi}{d\pi} = \frac{L(1+1)}{d\pi} = \frac{2L}{d\pi}$$

Ze vztahu 54 lze vyjádřit π . [1]

$$\pi = \frac{2L}{dP} \quad (59)$$

Buffonův experiment lze také nasimulovat na počítači, o čemž se můžeme přesvědčit na ob-



Obrázek 24: Simulace experimentu Buffonova jehla

rázku 24. V grafu je uvedena nejistota $3\sigma^{12}$, která byla vypočítaná podle vzorce na nejistotu

¹²Nejistota na 3σ znamená, že pravděpodobnost, že skutečná hodnota leží v intervalu ohraničeném nejistotou, je 99,7%,

pro σ [19]:

$$u = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

kde n je počet hodů.

4 SROVNÁNÍ METOD

V této kapitole chci srovnávat efektivitu algoritmů zmíněných v předchozích kapitolách podle mnou definované veličiny \mathfrak{n} . Protože \mathfrak{n} závisí na rychlosti konvergence algoritmu $\beta(n)$, což je nespojitá funkce závislá na počtu iterací n , kde n náleží přirozeným číslům, použijeme sumaci v intervalu všech iterací, a tím dostaneme hodnotu veličiny nezávislou na aktuální iteraci.

$$\mathfrak{n} = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^a \beta(n)$$

Vzhledem k tomu, že chceme, aby platilo, čím nižší hodnota, tím lepší algoritmus, definujeme si rychlosti konvergence algoritmu pomocí exponenciální funkce 2 na součin diference počtu operací ΔO_n ¹³ od které je odečteno číslo 1:

$$\beta(n) = 2^{\Delta O_n p_n} - 1 = 2^{(O_{n+1} - O_n)p_n} - 1$$

Důvod použití čísla 2 v definici je, že 2^x lze považovat za elementární funkci stejně jako e^x jen s rozdílem, že je jednodušší výpočet funkční hodnoty. Za předpokladu, že algoritmus konverguje k hledané přibližné hodnotě konstanty, bude exponent 2 konvergovat k nule, a proto je ve vzorci -1, jinak by se přírůstek po určitém počtu iterací neblížil 0 a \mathfrak{n} by nemělo limitu.

$$\mathfrak{n} = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^a 2^{(O_{n+1} - O_n)p_n} - 1 \quad (60)$$

Míra konvergence Míru konvergence p_n si zavedeme jako matematickou veličinu vyjadřující vzdálenost odhadu čísla x_n v n -té iteraci od nějaké hodnoty čísla x , kterou považujeme za skutečnou hodnotu limity dané posloupnosti, v tomto případě π .

$$p_n = |x_n - x|, \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Uvedený vzorec je použit v tabulce 1, 2 a 3 na všech dosud představených algoritmech pro prvních 10 iterací. V příloze A „Míra konvergence“ jsou tabulky rozšířeny na 30 iterací.

Hodnoty jednotlivých algoritmů jsou ještě prezentovány v grafech na obrázcích 25 a 26. Větší měřítko těchto grafů se nachází v příloze A.

4.1 Závislost počtu operací

Počet operací O_n si zavedeme jako matematickou veličinu vyjadřující počet operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování) od počátku výpočtu až do n -té iterace.

¹³V této práci $O(n)$ neznamena složitost algoritmu, ale počet operací provedených od počátku výpočtu až do n -té iterace a míry konvergence p_n v dané iteraci

číslo iterace	Archimedes		Descartes		Kusánský		Gregory	
	hr. intervalu	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní	spodní
1	3.13e-1	8.58e-1	3.13e-1	8.58e-1	3.13e-1	8.58e-1	1.14e+0	8.58e-1
2	8.01e-2	1.72e-1	8.01e-2	1.72e-1	8.01e-2	1.72e-1	3.13e-1	1.72e-1
3	2.01e-2	4.10e-2	2.01e-2	4.10e-2	2.01e-2	4.10e-2	8.01e-2	4.10e-2
4	5.04e-3	1.01e-2	5.04e-3	1.01e-2	5.04e-3	1.01e-2	2.01e-2	1.01e-2
5	1.26e-3	2.53e-3	1.26e-3	2.53e-3	1.26e-3	2.53e-3	5.04e-3	2.53e-3
6	3.15e-4	6.31e-4	3.15e-4	6.31e-4	3.15e-4	6.31e-4	1.26e-3	6.31e-4
7	7.89e-5	1.58e-4	7.89e-5	1.58e-4	7.89e-5	1.58e-4	3.15e-4	1.58e-4
8	1.97e-5	3.94e-5	1.97e-5	3.94e-5	1.97e-5	3.94e-5	7.89e-5	3.94e-5
9	4.93e-6	9.86e-6	4.93e-6	9.86e-6	4.93e-6	9.86e-6	1.97e-5	9.86e-6
10	1.23e-6	2.46e-6	1.23e-6	2.46e-6	1.23e-6	2.46e-6	4.93e-6	2.46e-6

Tabulka 1: Míra konvergence

č. iterace	Snell		Legendry		Ptolem.	Viete	Wallis	Brounck.
	hr. intervalu	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní	spodní
1	2.45e-3	7.74e-2	2.27e-1	8.58e-1	3.13e-1	1.14e+0	4.75e-01	8.58e-01
2	1.55e-4	3.96e-3	1.01e-3	4.61e-2	8.01e-2	3.13e-1	2.97e-01	4.75e-01
3	9.72e-6	2.37e-4	7.38e-9	8.76e-5	2.01e-2	8.01e-2	2.16e-01	3.25e-01
4	6.08e-7	1.46e-5	4.98e-18	3.06e-10	5.04e-3	2.01e-2	1.69e-01	2.46e-01
5	3.80e-8	9.13e-7	4.80e-18	4.79e-18	1.26e-3	5.04e-3	1.39e-01	1.98e-01
6	2.37e-9	5.70e-8	4.80e-18	4.80e-18	3.15e-4	1.26e-3	1.18e-01	1.66e-01
7	1.48e-10	3.56e-9	4.80e-18	4.80e-18	7.89e-5	3.15e-4	1.03e-01	1.42e-01
8	9.28e-12	2.23e-10	4.80e-18	4.80e-18	1.97e-5	7.89e-5	9.10e-02	1.25e-01
9	5.80e-13	1.39e-11	4.80e-18	4.80e-18	4.93e-6	1.97e-5	8.16e-02	1.11e-01
10	3.65e-14	8.70e-13	4.80e-18	4.80e-18	1.23e-6	4.93e-6	7.39e-02	9.98e-02

Tabulka 2: Míra konvergence 2

č. iterace	Leibniz	Newton	Sharp	Euler	Euler 2	Euler 3
1	8.58e-01	1.42e-1	3.23e-1	6.92e-01	3.13e-01	3.23e-01
2	4.75e-01	1.66e-2	6.24e-2	4.03e-01	1.60e-01	1.42e-01
3	3.25e-01	2.53e-3	1.46e-2	2.84e-01	1.07e-01	7.30e-02
4	2.46e-01	4.38e-4	3.74e-3	2.19e-01	8.02e-02	4.59e-02
5	1.98e-01	8.15e-5	1.01e-3	1.78e-01	6.41e-02	3.07e-02
6	1.66e-01	1.59e-5	2.84e-4	1.50e-01	5.34e-02	2.23e-02
7	1.42e-01	3.23e-6	8.17e-5	1.30e-01	4.57e-02	1.67e-02
8	1.25e-01	6.71e-7	2.39e-5	1.14e-01	4.00e-02	1.31e-02
9	1.11e-01	1.42e-7	7.12e-6	1.02e-01	3.55e-02	1.05e-02
10	9.98e-02	3.07e-8	2.14e-6	9.22e-02	3.20e-02	8.62e-03

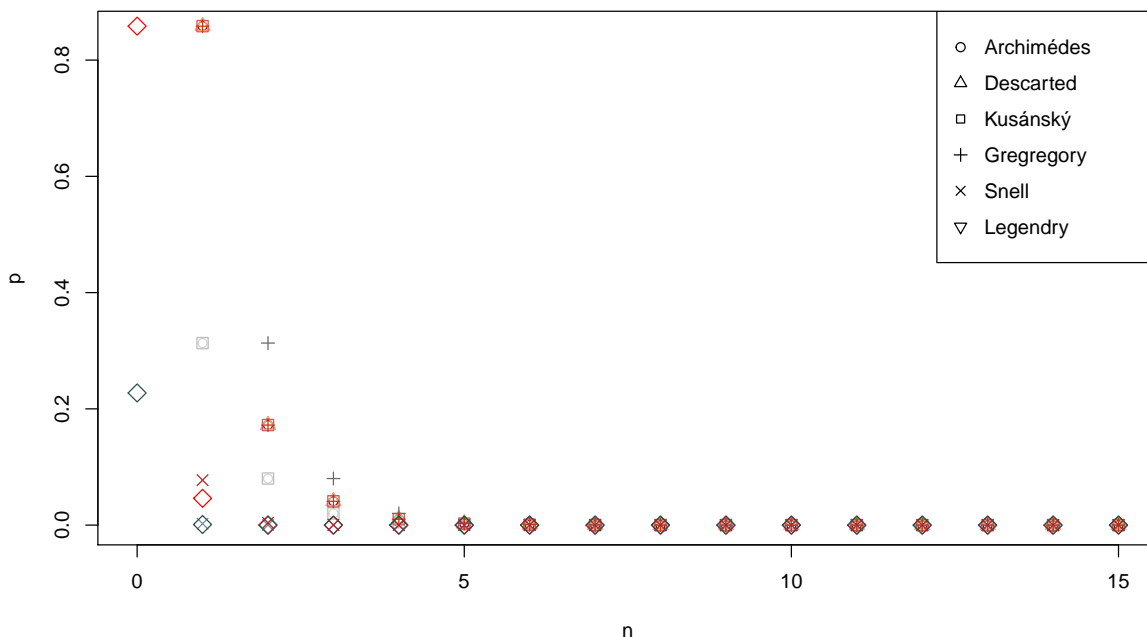
Tabulka 3: Míra konvergence 3

Faktoriál z x , pokud x nebude 0, budeme počítat za x operací, protože pro nenulové x platí, že:

$$x! = \prod_{i=1}^x i,$$

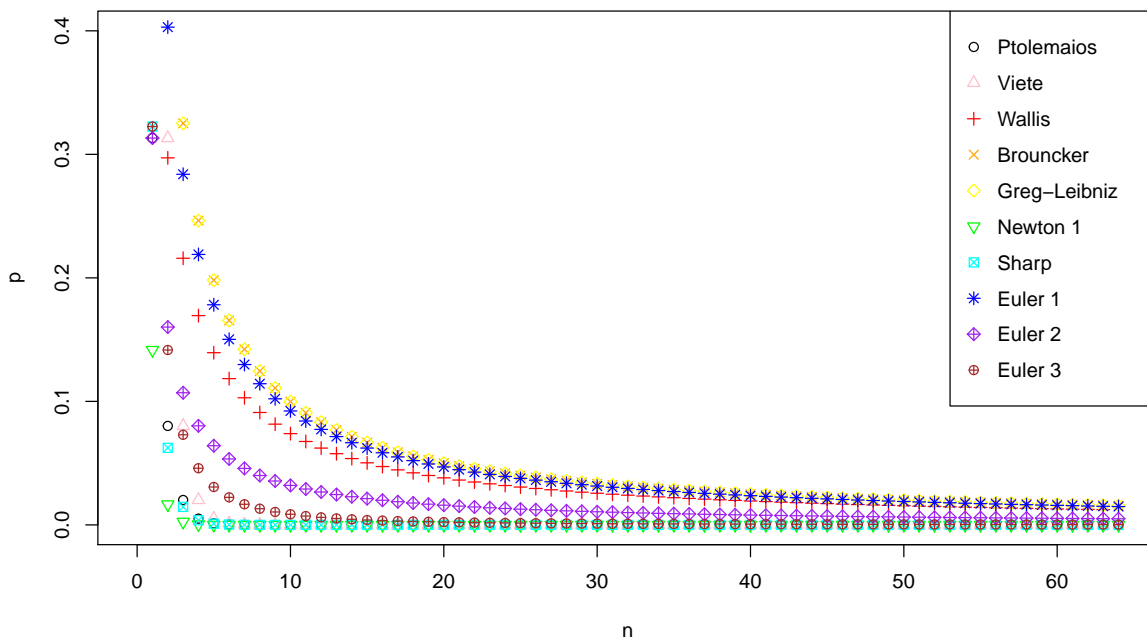
v opačném případě budeme $x!$ (0!) počítat za 1 operaci.

Míra konvergence jednotlivých algoritmu



Obrázek 25: Graf míry konvergence zde popsaných algoritmů s intervalovým výstupem (čern.-sh, červ.-hh)

Míra konvergence jednotlivých algoritmu



Obrázek 26: Graf míry konvergence zbytku algoritmů popsaných v této práci

Archimedes Při každé iteraci, viz 4. tabulka, se musí vykonat 5 operací pro výpočet jedné strany vepsaného k -úhelníku a 6 operací pro výpočet jedné strany opsaného k -úhelníku. Pro výpočet spodní nebo horní hranice (sh a hh) π je potřeba provést ještě 3 operace. Výsledné vzorce

n	1	2	3
$O_{sh}(n)$	5+3	10+3	15+3
$O_{hh}(n)$	6+3	12+3	18+3

Tabulka 4: Počet operací - Archimédův algoritmus (podle vzorce 6, 9 a 10)

pro počet operací Archimédova algoritmu jsou:

$$O_{sh}(n) = 5n + 3$$

$$O_{hh}(n) = 6n + 3$$

Ptolemaios Vzorce algoritmu:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n}}{2}} \Rightarrow O(n) = 5n + a$$

$$\pi_n = \frac{2^{2+n}x_n}{2} = 2^{1+n}x_n \Rightarrow a = 3$$

Vzorec pro určení počtu operací v Ptolemaiově algoritmu:

$$O(n) = 5n + 3$$

Kusánský Vzorce algoritmu:

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$$

$$R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$$

Protože r je závislý i na R a naopak, musíme počet operací v 1 iteraci pro r a R počítat z obou vzorců. Z r a R se na hranice intervalu pro π dostaneme 2 operacemi. Vzorce pro určení počtu

n	1	2	3
$O_{sh}(n)$	2+2	6+2	10+2
$O_{hh}(n)$	4+2	8+2	12+2

Tabulka 5: Počet operací - Kusánského algoritmus

operací v Kusánském algoritmu z tabulky č. 5:

$$O_{sh}(n) = 4(n - 1) + 2 + 2 = 4n$$

$$O_{hh}(n) = 4(n - 1) + 4 + 2 = 4n + 2$$

Viète Jako jednu iteraci beru výpočet zlomku a jeho vynásobení s již vypočítaným odhadem π z předchozí iterace, pokud to není první iterace, kdy se ničím nenásobí. Z tabulky č. 6 plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = n^2.$$

n	1	2	3	4
$O(n)$	1	4	9	16
zpět. diference	-	3	5	7

Tabulka 6: Počet operací - Vièteho algoritmus

n	1	2	3
$O_{sh}(n)$	2+2	8+2	14+2
$O_{hh}(n)$	4+2	10+2	16+2

Tabulka 7: Počet operací - Descartův algoritmus (podle vzorce 20, 21 a 22)

Descartes Použijeme stejný systém výpočtu počtu operací jako u Kusánského algoritmu. Vzorce pro složitost algoritmu z tabulky č. 7:

$$O_{sh}(n) = 6(n - 1) + 2 + 2 = 6n - 2$$

$$O_{hh}(n) = 6(n - 1) + 4 + 2 = 6n$$

Snell Spodní hranice intervalu závisí na Archimédově spodní hranici odhadu π s využitím n -a $2n$ -úhelníka ($2 * (5 * 1 + 3) = 10 + 6$) a pro každou další iteraci stačí spočítat o jedničku vyšší mocninu $2^i n$ -úhelníku ($5(n - 1) + 16 = 5n + 11$). Samotná Snelliho nerovnost 21 pro výpočet π přidává tři operace, a proto $O_{sh} = 5n + 14$. Horní hranice intervalu závisí na Archimédově spodní a horní hranici odhadu π s využitím n -úhelníka ($5n + 3 + 6n + 3 = 11n + 6$). Samotná Snelliho nerovnost 20 přidává tři operace, a proto $O_{sh} = 11n + 9$.

Gregory Opět je stejný systém výpočtu složitosti jako u Descartova a Kusánského algoritmu. Vzorce pro složitost algoritmu z tabulky č. 8:

n	1	2	3
$O_{sh}(n)$	2+2	8+2	14+2
$O_{hh}(n)$	6+2	12+2	18+2

Tabulka 8: Počet operací - Gregoryho algoritmus (podle vzorce 23, 24 a 25)

$$O_{sh}(n) = 6(n - 1) + 2 + 2 = 6n - 2$$

$$O_{hh}(n) = 6n$$

n	1	2	3
$O(n)$	6+1	13+1	20+1

Tabulka 9: Počet operací - Wallisův algoritmus

Wallis Z tabulky č. 9 plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 7n.$$

n	1	2	3
$O(n)$	1	4	7

Tabulka 10: Počet operací - Brounckerův algoritmus

Brouncker Jako první iteraci je brána $\frac{4}{1}$ a každá další zlomek $(+\frac{i^2}{2})$ Z tabulky č. 10 plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 3(n - 1) + 1 = 3n - 2.$$

n	1	2	3
$O(n)$	4+1	9+1	14+1

Tabulka 11: Počet operací - Gregoryho-Leibnizův algoritmus

Gregory-Leibniz Z tabulky č. 11 plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 5n.$$

n	1	2	3	4
$O(n)$	14	34	60	92
zpět. difference	-	20	26	32

Tabulka 12: Počet operací - Newtonův 1. algoritmus

Newton 1 Z tabulky č. 12 plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 3n^2 + 11n.$$

Zpětná difference z tabulky č. 12 dává posloupnost:

$$d(O(n)) = 6n + 8.$$

Newton 2 Druhý Newtonův algoritmus bohužel k 0.54, nikoliv k π . Pravděpodobně je v zápisu připsaného z literatury chyba, a proto nemá smysl se zabývat jeho vlastnostmi.

Sharp Ze vzorce 40 lze sestavit tabulku celkového počtu operací v závislosti na iteraci. Z

n	1	2	3
$O(n)$	7+2	14+2	21+2

Tabulka 13: Počet operací - Sharpův algoritmus

tabulky č. 9 plyne, že složitost algoritmu tvoří posloupnost:

$$O(n) = 7n + 2.$$

Euler Ze sumace ve vzorci 43 lze vydedukoval, že pro $i + 1$ je potřeba provést dvě operace ve zlomku (dělení a umocňování) a k tomu ještě přičtení hodnoty zlomku k doposud vypočítané hodnotě ($O(n) = 3n + b$). Pro získání samotného π je třeba výsledek ještě odmocnit ($b = 1$). Vzorec 1. algoritmu pro počet operací provedených do n -té iterace je:

$$O(n) = 3n + 1.$$

U druhého algoritmu se ve zlomku vyskytují čtyři operace plus přičtení zlomku ($O(n) = 5n + b$). Samotné π se získá odmocněním a vynásobením dvěma ($b = 2$). Vzorec druhého algoritmu pro počet operací je:

$$O(n) = 5n + 2.$$

Ve zlomku třetího algoritmu jsou opět čtyři operace a následné osamocení π si vyžádá další dvě operace, proto vzorec třetího algoritmu pro počet operací je:

$$O(n) = 5n + 2.$$

Legendry Stejný systém výpočtu počtu operací jako u Kusánského algoritmu. Vzorce pro

n	1	2	3
$O_{sh}(n)$	9+2	18+2	27+2
$O_{hh}(n)$	7+2	16+2	25+2

Tabulka 14: Počet operací - Legendryho algoritmus (podle vzorce 48-51)

složitost algoritmu z tabulky č. 14:

$$O_{sh}(n) = 9n + 2$$

$$O_{hh}(n) = 9n$$

algoritmus	závislost počtu operací $O(n)$	zpětná diference
Archimedův (s. / h.)	$5n + 3 / 6n + 3$	5 / 6
Ptolemaiův	$5n + 3$	5
Kusánského (s. / h.)	$4n / 4n + 2$	4 / 4
Vièteho	n^2	$2n - 1$
Descartesův (s. / h.)	$6n - 2 / 6n$	6 / 6
Gregoryho (s. / h.)	$6n - 2 / 6n + 2$	6 / 6
Snellův (s. / h.)	$5n + 14 / 11n + 9$	5 / 11
Wallisův	$7n$	7
Brounckerův	$3n - 1$	3
Gregorho-Leibnizův	$5n$	5
Newtonův 1	$3n^2 + 11n$	$6n + 8$
Sharp	$7n + 2$	7
Euler 1	$3n + 1$	3
Euler 2	$5n + 2$	5
Euler 3	$5n + 2$	5
Legendryho (s. / h.)	$9n+2/9n$	9/9

Tabulka 15: Počet operací v závislosti na iteraci v jednotlivých algoritmech

algoritmus	efektivita algoritmu η
Archimedův (s. / h.)	2,38/35,8
Ptolemaiův	2.38
Kusánského (s. / h.)	10,6/ 1,71
Vièteho	2,59
Descartesův (s. / h.)	35,8/3,19
Gregoryho (s. / h.)	35,8/118
Snellův (s. / h.)	0,998/0,825
Wallisův	>40,4
Brounckerův	32,2
Gregorho-Leibnizův	>86,3
Newtonův 1	6,54
Sharp	4,23
Euler 1	>55,9
Euler 2	>80,6
Euler 3	3,82
Legendry (s. / h.)	211/3,14

Tabulka 16: Srovnání efektivity algoritmů podle η

5 ZÁVĚR

V práci jsem nahlédl do historického průřezu jednotlivých algoritmů a jiných způsobů výpočtu π . Sledoval jsem jejich vývoj. Každý algoritmus jsem zhodnotil z několika pohledů, jak moc rychle konverguje k π a jak moc je složitý v počtu operací. Dále jsem zavedl vlastní veličinu \mathfrak{N} , která tyto dvě vlastnosti spojuje. Dále jsem uvedl, jak se π počítalo na prvních počítačích od konce čtyřicátých do poloviny šedesátých let 20. století. K tomu jsem přidal metodu Monte Carlo, která sice k výpočtu π primárně nikdy nesloužila¹⁴, ale je to jeden ze způsobů, jak π počítat v dnešní době s použitím počítačů.

Z pohledu rychlosti, s jakou algoritmus konvergoval k π , byl nejlepší Legrenyho algoritmus, kdy už po čtvrté iteraci se lišila spodní hranice intervalu o méně jak $5 \cdot 10^{-18}$. Druhým o něco pomalejším algoritmem, ale výrazně rychlejším než zbytek algoritmů, byl Snellův algoritmus. Problém s porovnáním algoritmů podle míry konvergence byl, že počítače mají zaokrouhlovací chybu na 16. desetinném místě, a proto jsem se přes hranici $2 \cdot 10^{-16}$ většinou nedostal.

Brounckerův a první Eulerův algoritmus byl nejlepší z pohledu počtu operací, protože s každou iterací vzroste počet operací o 3. U všech algoritmů byla závislost na počtu operací lineární, až na Viětův a Newtonův algoritmus, kde byla exponenciální. Nedostatkem tohoto porovnávání je, že se předpokládá, že každá operace je stejně náročná, jak z pohledu počítače, tak z pohledu procesoru v počítači.

Z hlediska mnou vytvořené veličiny \mathfrak{N} je nejlepší Snellovo vylepšení Archimédovy metody, a to v obou směrech, a horní hranice intervalu Kusánského algoritmu (tabulka 16). Oba algoritmy zkombinovaly rychlost, se kterou se blíží k π , a nízkou náročnost na počet operací. Těsně za nimi byl Viětův nekonečný součin a Archimédova metoda pro spodní hranici intervalu. Nejhůře v tomto porovnávání dopadl Wallisův nekonečný součin, Gregoryho-Leibnizova řada a první dvě Eulerovy řady. Protože jejich míra konvergence klesá s počtem operací velmi pomalu, je nalezení jejich hodnoty \mathfrak{N} velmi časově a výpočetně náročné, a proto jsem zjistil jen hodnotu, o které vím, že je určitě nižší než jejich skutečná hodnota \mathfrak{N} . I tak nám to stačí pro určení, že se jedná o nejhorší porovnávané algoritmy spolu se spodní hranicí Legendryho algoritmu, kde jsem hodnotu \mathfrak{N} sice našli, ale byla velmi vysoká.

Jak již bylo zmíněno, \mathfrak{N} je nástroj vhodný k porovnávání algoritmů z pohledu celkové efektivity. Ale musíme vzít na vědomí, že je to jen jeden z mnoha nástrojů a každý si může vytvořit svůj vlastní. Jedno z hlavních kritérií je, jestli dáme stejnou váhu rychlosti konvergence a počtu potřebných operací k výpočtu jedné iterace nebo jedno z kritérií upřednostníme. V mnou uvedeném případě mají oba parametry stejnou váhu. Nedostatek v tomto způsobu srovnávání můžeme vidět, jestliže budeme mít 2 algoritmy a jeden ze začátku bude konvergovat hůře než druhý, ale po určitém počtu operacích se to otočí a s ještě větším rozdílem bude konvergovat první lépe. Nástroj vyhodnotí lépe druhý algoritmus, protože na začátku kvůli vyšší míře konvergence naskakovaly větší přírůstky od \mathfrak{N} .

¹⁴V té době existovaly mnohem lepší algoritmy.

Mnou prezentovaný matematický nástroj se v praxi hodí zejména v infotmatice nejen pro porovnání algoritmů na výpočet přibližné hodnoty π , ale i k výběru vhodného algoritmu k nalezení přibližné hodnoty jakékoliv jiné konstanty.

Možnost pokračování vidím právě ve vyzkoušení mnou definovaného matematického nástroje na algoritmech k výpočtům jiných konstant.

6 REFERENCE

- [1] BECKMANN, Petr. Historie čísla pí. Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0655-9.
- [2] THUMSHIRN, Christian. Der Schweizer, der 22,4 Billionen Dezimalstellen von Pi berechnet hat. Neue Zürcher Zeitung [online]. Zürich, 2017, 21.3.2017, , 1 [cit. 2018-06-21]. Dostupné z: <https://www.nzz.ch/wissenschaft/video-serie-nerdzz-der-wahrscheinlich-laengste-rekord-der-welt-ld.152445-november-2016/>
- [3] KOLMAN, Arnošt a Marcela HEDRLÍNOVÁ. Dějiny matematiky ve starověku. Praha: Academia, 1968. ISBN 978-80-87287-77-4.
- [4] Bible kralická: Písmo svaté Starého a Nového zákona : podle posledního vydání z roku 1613. 5. vyd. v ČBS. Praha: Česká biblická společnost, 2014. ISBN 978-80-87287-77-4.
- [5] BEČVÁŘ, Jindřich, Martina BEČVÁŘOVÁ a Hana VYMAZALOVÁ. Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4.
- [6] VEJCHODSKÝ, Tomáš. Archimédův výpočet čísla pí [přednáška]. Praha: Akademie věd České republiky, 11.11.2016. In: Youtube.com [online]. [vid. 17. 5. 2018]. Záznam dostupný z: <https://www.youtube.com/watch?v=8XaM9ZYxCqU>
- [7] WILLERS, Michael. Algebra bez (m)učení: Od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě : fascinující čísla a rovnice. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4123-9.
- [8] Adam Adamandy Kochański. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-05-24]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Adam-Adamandy-Kocha%C5%84ski>
- [9] POSAMENTIER, Alfred S. a Ingmar LEHMANN. [Pi]: A Biography of the World's Most Mysterious Number. II. Title. Amherst, N.Y.: Prometheus Books, 2004. ISBN 15-910-2200-2.
- [10] BEČVÁŘ, Jindřich. Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-232-5.
- [11] BEČVÁŘ, Jindřich, FUCHS, Eduard, ed. Matematika v 16. a 17. století: Seminář Historie matematiky III. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-150-7.
- [12] JÁCHIM, František. Jak viděli vesmír: [po stopách velkých astronomů]. Olomouc: Rubico, 2003. ISBN 80-85839-48-2.
- [13] BEČVÁŘOVÁ, Martina, Jindřich BEČVÁŘ, Magdalena HYKŠOVÁ, Oldřich HYKŠ, Martin MELCER, Martina ŠTĚPÁNOVÁ, Miroslava OTAVOVÁ a Irena SÝKOROVÁ. Matematika ve středověké Evropě: pozdní středověk a renesance. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2018. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-01-06403-0.

- [14] FUCHS, Eduard, ed. Mathematics throughout the ages. Prague: Prometheus, 2001. History of mathematics. ISBN 80-7196-219-8.
- [15] BEČVÁŘ, Jindřich a Eduard FUCHS, ed. Matematika v proměnách věků III. Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. Dějiny matematiky. ISBN 80-728-5040-7.
- [16] BRENT, Richard P. The Borwein Brothers, Pi and the AGM [online]. Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra a University of Newcastle, Callaghan, 8. 8. 2018, , 7-8 [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1802.07558>
- [17] GOURÉVITCH, Boris. Newton's Formula. The world of pi [online]. [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: <http://www.pi314.net/eng/newton.php>
- [18] PROKOP, Vladimír. Dějiny literatury od starověku do počátku 19. století: aneb od Mezopotámie po naše národní obrození. Sokolov: O.K.-Soft, 2001.
- [19] VIRIUS, Miroslav. Metoda Monte Carlo. V Praze: České vysoké učení technické, 2010. ISBN 978-80-01-04595-4.
- [20] ENIAC: Electronic Numerical Integrator and Computer. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2018-12-12]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/ENIAC>
- [21] Pi in the sky: Calculating a record-breaking 31.4 trillion digits of Archimedes' constant on Google Cloud. In: Google Cloud [online]. Google, 2019, 14.3.2019 [cit. 2019-03-27]. Dostupné z: <https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-31-4-trillion-digits-of-archimedes-constant-on-google-cloud>

7 SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Zářezy na kostech [3]	9
2	Tabulka YBC 7302 [5]	10
3	Sít' pro aproximaci kruhu	11
4	Ptolemaiova aproximace kruhu	11
5	Kruh s opsaným a vepsaným n-úhelníkem	12
6	Jeden trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka	13
7	Jeden trojúhelník z opsaného šestiúhelníka	13
8	1 trojúhelník z vepsaného šestiúhelníka a 2 trojúhelníky z vepsaného dvanácti- úhelníka	14
9	1 trojúhelník z opsaného šestiúhelníka a 1 trojúhelník z opsaného dvanáctiúhel- níka	14
10	Kusánského algoritmus	16
11	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka	17
12	Výpočet poloměru opsané kružnice osmiúhelníka	17
13	Výpočet poloměru vepsané kružnice osmiúhelníka	18
14	Viětova geometrická aproximace	20
15	Pravouhlý trojúhelník SIG a SAJ	20
16	Descartesův algoritmus	22
17	Interval z Archimédovy metody	23
18	Kochanského konstrukce přibližné poloviny obvodu kruhu s daným poloměrem	26
19	Kružnice $y = \sqrt{x - x^2}$ s výsečí	27
20	Integrace $\frac{1}{4}$ kruhu $y^2 = 1 - x^2$	31
21	Výpočet obsahu kruhu metodou Monte Carlo	32
22	Buffonův experiment s jehlou	32

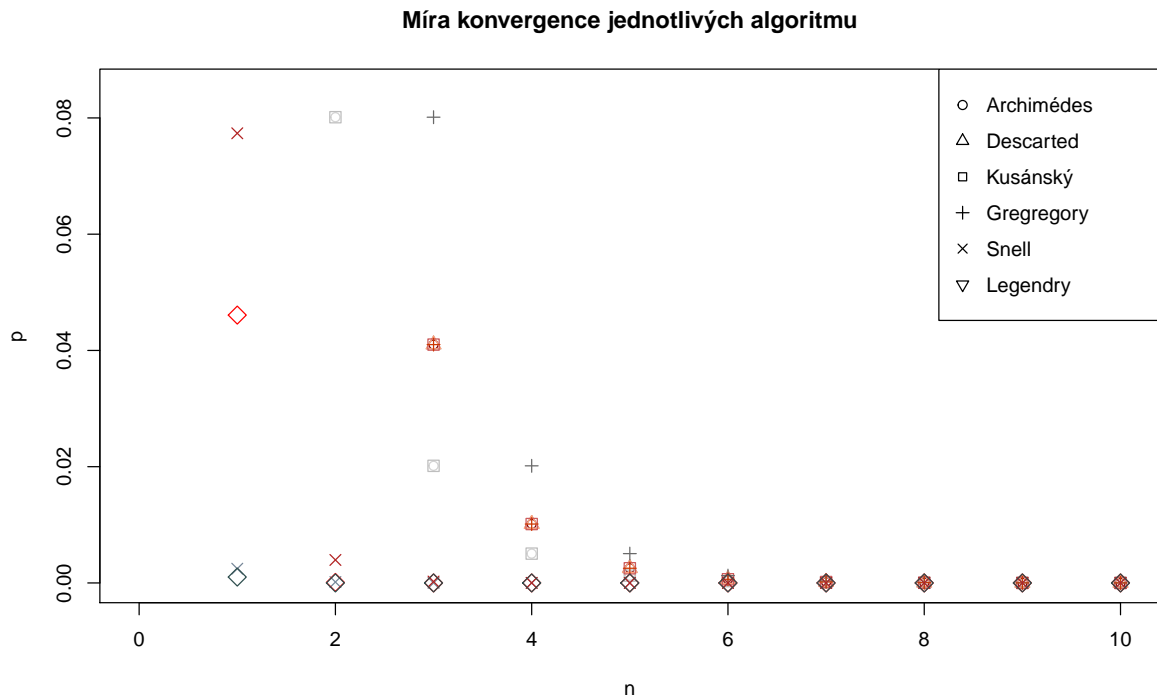
23	Graf protnutí přímkami	33
24	Simulace experimentu Buffonova jehla	33
25	Graf míry konvergence zde popsaných algoritmů s intervalovým výstupem (čern.-sh, červ.-hh)	36
26	Graf míry konvergence zbytku algoritmů popsaných v této práci	36
27	Graf míry konvergence popsaných s intervalovým výstupem (čern.-sh, červ.-hh) ve větším měřítku	49
28	Graf míry konvergence zbytku algoritmů popsaných v této práci ve větším měřítku	49

8 SEZNAM TABULEK

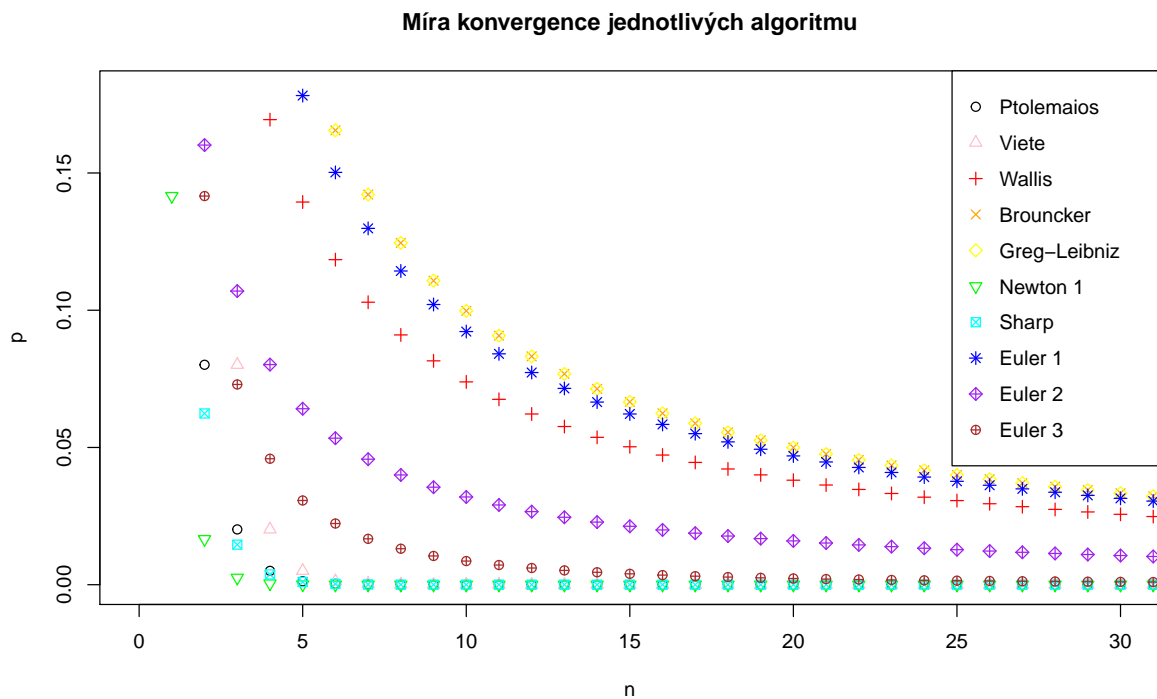
1	Míra konvergence	35
2	Míra konvergence 2	35
3	Míra konvergence 3	35
4	Počet operací - Archimédův algoritmus (podle vzorce 6, 9 a 10)	37
5	Počet operací - Kusánského algoritmus	37
6	Počet operací - Vièteho algoritmus	38
7	Počet operací - Descartův algoritmus (podle vzorce 20, 21 a 22)	38
8	Počet operací - Gregoryho algoritmus (podle vzorce 23, 24 a 25)	38
9	Počet operací - Wallisův algoritmus	38
10	Počet operací - Brounckerův algoritmus	39
11	Počet operací - Gregoryho-Leibnizův algoritmus	39
12	Počet operací - Newtonův 1. algoritmus	39
13	Počet operací - Sharpův algoritmus	39
14	Počet operací - Legendryho algoritmus (podle vzorce 48-51)	40
15	Počet operací v závislosti na iteraci v jednotlivých algoritmech	41
16	Srovnání efektivity algoritmů podle \mathfrak{N}	41

17	Míra konvergence (rozšířená verze)	50
18	Míra konvergence 2 (rozšířená verze)	51
19	Míra konvergence 3 (rozšířená verze)	52

PŘÍLOHA A: MÍRA KONVERGENCE



Obrázek 27: Graf míry konvergence popsaných s intervalovým výstupem (čern.-sh, červ.-hh) ve větším měřítku



Obrázek 28: Graf míry konvergence zbytku algoritmů popsaných v této práci ve větším měřítku

číslo iterace hr. intervalu	Archimedes		Descartes		Kusánský		Gregory	
	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní
1	3,13e-1	8,58e-1	3,13e-1	8,58e-1	3,13e-1	8,58e-1	1,14e+0	8,58e-1
2	8,01e-2	1,72e-1	8,01e-2	1,72e-1	8,01e-2	1,72e-1	3,13e-1	1,72e-1
3	2,01e-2	4,10e-2	2,01e-2	4,10e-2	2,01e-2	4,10e-2	8,01e-2	4,10e-2
4	5,04e-3	1,01e-2	5,04e-3	1,01e-2	5,04e-3	1,01e-2	2,01e-2	1,01e-2
5	1,26e-3	2,53e-3	1,26e-3	2,53e-3	1,26e-3	2,53e-3	5,04e-3	2,53e-3
6	3,15e-4	6,31e-4	3,15e-4	6,31e-4	3,15e-4	6,31e-4	1,26e-3	6,31e-4
7	7,89e-5	1,58e-4	7,89e-5	1,58e-4	7,89e-5	1,58e-4	3,15e-4	1,58e-4
8	1,97e-5	3,94e-5	1,97e-5	3,94e-5	1,97e-5	3,94e-5	7,89e-5	3,94e-5
9	4,93e-6	9,86e-6	4,93e-6	9,86e-6	4,93e-6	9,86e-6	1,97e-5	9,86e-6
10	1,23e-6	2,46e-6	1,23e-6	2,46e-6	1,23e-6	2,46e-6	4,93e-6	2,46e-6
11	3,08e-7	6,16e-7	3,08e-7	6,16e-7	3,08e-7	6,16e-7	1,23e-6	6,16e-7
12	7,70e-8	1,54e-7	7,70e-8	1,54e-7	7,70e-8	1,54e-7	3,08e-7	1,54e-7
13	1,93e-8	3,85e-8	1,93e-8	3,85e-8	1,93e-8	3,85e-8	7,70e-8	3,85e-8
14	4,81e-9	9,63e-9	4,81e-9	9,63e-9	4,81e-9	9,63e-9	1,93e-8	9,63e-9
15	1,20e-9	2,41e-9	1,20e-9	2,41e-9	1,20e-9	2,41e-9	4,81e-9	2,41e-9
16	3,01e-10	6,02e-10	3,01e-10	6,02e-10	3,01e-10	6,02e-10	1,20e-9	6,02e-10
17	7,52e-11	1,50e-10	7,52e-11	1,50e-10	7,52e-11	1,50e-10	3,01e-10	1,50e-10
18	1,88e-11	3,76e-11	1,88e-11	3,76e-11	1,88e-11	3,76e-11	7,52e-11	3,76e-11
19	4,70e-12	9,40e-12	4,70e-12	9,40e-12	4,70e-12	9,40e-12	1,88e-11	9,40e-12
20	1,18e-12	2,35e-12	1,18e-12	2,35e-12	1,17e-12	2,35e-12	4,70e-12	2,35e-12
21	2,94e-13	5,88e-13	2,94e-13	5,87e-13	2,94e-13	5,88e-13	1,17e-12	5,88e-13
22	7,37e-14	1,47e-13	7,35e-14	1,47e-13	7,33e-14	1,47e-13	2,94e-13	1,47e-13
23	1,86e-14	3,68e-14	1,84e-14	3,67e-14	1,82e-14	3,68e-14	7,33e-14	3,68e-14
24	4,82e-15	9,30e-15	4,62e-15	9,15e-15	4,47e-15	9,30e-15	1,82e-14	9,30e-15
25	1,38e-15	2,42e-15	1,18e-15	2,26e-15	1,02e-15	2,42e-15	4,47e-15	2,42e-15
26	5,19e-16	6,96e-16	3,20e-16	5,40e-16	1,64e-16	6,96e-16	1,02e-15	6,96e-16
27	3,04e-16	2,66e-16	1,05e-16	1,10e-16	5,07e-17	2,66e-16	1,64e-16	2,66e-16
28	2,50e-16	1,58e-16	5,15e-17	2,25e-18	1,05e-16	1,58e-16	5,07e-17	1,58e-16
29	2,37e-16	1,31e-16	3,81e-17	2,46e-17	1,18e-16	1,31e-16	1,05e-16	1,31e-16
30	2,33e-16	1,25e-16	3,47e-17	3,14e-17	1,21e-16	1,25e-16	1,18e-16	1,25e-16

Tabulka 17: Míra konvergence (rozšířená verze)

č. iterace hr. intervalu	Snell		Legendry		Ptolem.	Viete	Wallis	Brounck.
	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní	spodní	horní
1	2,45e-3	7,74e-2	2,27e-1	8,58e-1	3,13e-1	1,14e+0	4,75e-01	8,58e-01
2	1,55e-4	3,96e-3	1,01e-3	4,61e-2	8,01e-2	3,13e-1	2,97e-01	4,75e-01
3	9,72e-6	2,37e-4	7,38e-9	8,76e-5	2,01e-2	8,01e-2	2,16e-01	3,25e-01
4	6,08e-7	1,46e-5	4,98e-18	3,06e-10	5,04e-3	2,01e-2	1,69e-01	2,46e-01
5	3,80e-8	9,13e-7	4,80e-18	4,79e-18	1,26e-3	5,04e-3	1,39e-01	1,98e-01
6	2,37e-9	5,70e-8	4,80e-18	4,80e-18	3,15e-4	1,26e-3	1,18e-01	1,66e-01
7	1,48e-10	3,56e-9	4,80e-18	4,80e-18	7,89e-5	3,15e-4	1,03e-01	1,42e-01
8	9,28e-12	2,23e-10	4,80e-18	4,80e-18	1,97e-5	7,89e-5	9,10e-02	1,25e-01
9	5,80e-13	1,39e-11	4,80e-18	4,80e-18	4,93e-6	1,97e-5	8,16e-02	1,11e-01
10	3,65e-14	8,70e-13	4,80e-18	4,80e-18	1,23e-6	4,93e-6	7,39e-02	9,98e-02
11	2,50e-15	5,42e-14	4,80e-18	4,80e-18	3,08e-7	1,23e-6	6,75e-02	9,07e-02
12	3,74e-16	3,28e-15	4,80e-18	4,80e-18	7,70e-8	3,08e-7	6,22e-02	8,32e-02
13	2,41e-16	9,84e-17	4,80e-18	4,80e-18	1,93e-8	7,70e-8	5,76e-02	7,68e-02
14	2,33e-16	1,01e-16	4,80e-18	4,80e-18	4,81e-9	1,93e-8	5,37e-02	7,13e-02
15	2,32e-16	1,13e-16	4,80e-18	4,80e-18	1,20e-9	4,81e-9	5,03e-02	6,66e-02
16	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	3,01e-10	1,20e-9	4,72e-02	6,24e-02
17	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	7,52e-11	3,01e-10	4,46e-02	5,88e-02
18	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	1,88e-11	7,52e-11	4,22e-02	5,55e-02
19	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	4,70e-12	1,88e-11	4,00e-02	5,26e-02
20	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	1,18e-12	4,70e-12	3,81e-02	5,00e-02
21	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	2,94e-13	1,17e-12	3,63e-02	4,76e-02
22	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	7,38e-14	2,94e-13	3,47e-02	4,54e-02
23	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	1,87e-14	7,33e-14	3,32e-02	4,35e-02
24	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	4,91e-15	1,82e-14	3,19e-02	4,16e-02
25	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	1,47e-15	4,47e-15	3,06e-02	4,00e-02
26	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	6,08e-16	1,02e-15	2,95e-02	3,84e-02
27	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	3,93e-16	1,64e-16	2,84e-02	3,70e-02
28	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	3,40e-16	5,07e-17	2,74e-02	3,57e-02
29	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	3,26e-16	1,05e-16	2,65e-02	3,45e-02
30	2,32e-16	1,14e-16	4,80e-18	4,80e-18	3,23e-16	1,18e-16	2,56e-02	3,33e-02

Tabulka 18: Míra konvergence 2 (rozšířená verze)

č. iterace	Leibniz	Newton	Sharp	Euler	Euler 2	Euler 3
1	8,58e-01	1,42e-1	3,23e-1	6,92e-01	3,13e-01	3,23e-01
2	4,75e-01	1,66e-2	6,24e-2	4,03e-01	1,60e-01	1,42e-01
3	3,25e-01	2,53e-3	1,46e-2	2,84e-01	1,07e-01	7,30e-02
4	2,46e-01	4,38e-4	3,74e-3	2,19e-01	8,02e-02	4,59e-02
5	1,98e-01	8,15e-5	1,01e-3	1,78e-01	6,41e-02	3,07e-02
6	1,66e-01	1,59e-5	2,84e-4	1,50e-01	5,34e-02	2,23e-02
7	1,42e-01	3,23e-6	8,17e-5	1,30e-01	4,57e-02	1,67e-02
8	1,25e-01	6,71e-7	2,39e-5	1,14e-01	4,00e-02	1,31e-02
9	1,11e-01	1,42e-7	7,12e-6	1,02e-01	3,55e-02	1,05e-02
10	9,98e-02	3,07e-8	2,14e-6	9,22e-02	3,20e-02	8,62e-03
11	9,07e-02	6,71e-9	6,51e-7	8,41e-02	2,91e-02	7,17e-03
12	8,32e-02	1,48e-9	1,99e-7	7,73e-02	2,66e-02	6,09e-03
13	7,68e-02	3,31e-10	6,14e-8	7,15e-02	2,46e-02	5,21e-03
14	7,13e-02	7,45e-11	1,90e-8	6,65e-02	2,28e-02	4,53e-03
15	6,66e-02	1,69e-11	5,93e-9	6,22e-02	2,13e-02	3,96e-03
16	6,24e-02	3,84e-12	1,86e-9	5,84e-02	2,00e-02	3,50e-03
17	5,88e-02	8,80e-13	5,83e-10	5,50e-02	1,88e-02	3,11e-03
18	5,55e-02	2,03e-13	1,84e-10	5,20e-02	1,77e-02	2,79e-03
19	5,26e-02	4,67e-14	5,80e-11	4,93e-02	1,68e-02	2,51e-03
20	5,00e-02	1,08e-14	1,84e-11	4,69e-02	1,60e-02	2,27e-03
21	4,76e-02	2,42e-15	5,84e-12	4,47e-02	1,52e-02	2,06e-03
22	4,54e-02	4,77e-16	1,86e-12	4,27e-02	1,45e-02	1,88e-03
23	4,35e-02	2,37e-17	5,93e-13	4,09e-02	1,39e-02	1,73e-03
24	4,16e-02	8,25e-17	1,90e-13	3,92e-02	1,33e-02	1,59e-03
25	4,00e-02	1,07e-16	6,06e-14	3,77e-02	1,28e-02	1,47e-03
26	3,84e-02	1,13e-16	1,95e-14	3,62e-02	1,23e-02	1,36e-03
27	3,70e-02	1,15e-16	6,19e-15	3,49e-02	1,18e-02	1,26e-03
28	3,57e-02	1,15e-16	2,07e-15	3,37e-02	1,14e-02	1,17e-03
29	3,45e-02	1,15e-16	5,87e-16	3,25e-02	1,10e-02	1,10e-03
30	3,33e-02	1,15e-16	2,68e-16	3,15e-02	1,06e-02	1,03e-03

Tabulka 19: Míra konvergence 3 (rozšířená verze)