



## **Středoškolská technika 2019**

**Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT**

### **Planární kmity piezoelektrických keramických rezonátorů**

**Filip Solař**

První soukromé jazykové gymnázium  
Brandlova 875, Hradec Králové

# **Planární kmity piezoelektrických keramických rezonátorů**

## **Planar oscillations of piezoelectric ceramic resonators**

**Autor:** Filip Solař

**Škola:** První soukromé jazykové gymnázium Hradec Králové  
Brandlova 875, Hradec Králové 3, PSČ 500 03

**Kraj:** Královéhradecký kraj

**Konzultant:** Prof. Mgr. Jiří Erhart, Ph.D., Mgr. Ondřej Hospodka

Hradec Králové 12.3.2019

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny prameny, ze kterých jsem vycházel.

.....

V Hradci Králové dne 12. března 2019      Filip Solař

Autor prohlášením potvrzuje, že NEOPISOVAL doslovně texty jiných autorů, že je nezcičil. Současně prohlašuje, že se dostatečně podrobně seznámil s klíčovými (důležitými) myšlenkami závěrů výzkumu jiných autorů, kteří se zabývali stejnou nebo podobnou problematikou a že všechny převzaté informace řádně cituje podle platných zákonů a norem (Zákon č. 121/2000, ČSN 01 6910, ČSN ISO 690).

## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat Prof. Mgr. Jiřímu Erhartovi, Ph.D. a Mgr. Ondřeji Hospodkovi za pomoc a rady při zpracování tohoto projektu. Dále bych chtěl poděkovat Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci za poskytnutí vhodných podmínek k uskutečnění tohoto projektu.

## **Anotace**

Piezoelektrické rezonátory mají v dnešní době velmi široké uplatnění. Cílem práce je hodnocení vlastností piezoelektrických rezonátorů vyrobených z PZT keramiky v závislosti na jejich rozměrech. Pro každou velikost piezoelektrických rezonátoru byla naměřena impedanční spektra, pomocí kterých byly určeny rezonanční a antirezonanční frekvence různých módů kmitů. Ke každé z rezonančních a antirezonančních frekvencí byla následně naměřena impedance, a, pokud to bylo možné, tak i koeficient mechanické jakosti. Následně byly pomocí vzorců určeny rezonanční a antirezonanční frekvence podélného módu kmitu  $k_{31}$ , šířkově rozpínavého módu kmitu  $k'_{31}$  a planárního módu kmitu  $k_p$ . Následně se sledovalo, jak se tyto frekvence mění v závislosti na poměrech stran  $a$ ,  $b$  rezonátorů. Díky výsledkům z této práce bude možné určit požadované rozměry rezonátorů z keramických materiálů NCE51 a NCE55 pro různé typy jejich aplikací.

## **Klíčová slova**

Mód kmitu, NCE51, NCE55, piezoelektrický rezonátor, piezoelektřina, rezonance

## **Annotation**

Piezoelectric resonators have nowadays very large spectrum of applications. The aim of this project is an evaluation of properties of piezoelectric resonators made of PZT ceramic in dependence on its dimension. An impedance spectrum was measured for each size of piezoelectric resonator. Resonance and antiresonance frequencies of different oscillation modes were measured in these spectra. Then impedance was measured for each of resonance and antiresonance frequency and, if it was possible, coefficient of mechanical quality as well. After that, resonance and antiresonance frequencies of longitudinal oscillation mode  $k_{31}$ , width oscillation mode  $k'_{31}$  and planar oscillation mode  $k_p$  were calculated with use of formulas for every of measured dimension. Than it was observed, how these frequencies change in dependence on resonator aspect ratio of sides  $a, b$ . Using these results, it is possible to design the appropriate size of piezoelectric resonators made from NCE51 and NCE55 ceramics for different types of their application.

## **Keywords**

Vibration modes, NCE51, NCE55, piezoelectric resonator, piezoelectricity, resonance

# Obsah

Prohlášení .....	3
Poděkování .....	4
Anotace.....	5
Klíčová slova.....	5
Annotation.....	6
Keywords .....	6
Obsah.....	7
Úvod.....	10
Teoretická část.....	11
1 Piezoelektrický jev .....	12
1.1 Vlastnosti piezoelektrického jevu.....	12
2 Princip piezoelektrického jevu .....	13
2.1 Přímý piezoelektrický jev .....	13
2.2 Inverzní piezoelektrický jev .....	13
3 Výpočet piezoelektrického jevu .....	14
3.1 Přímý piezoelektrický jev .....	14
3.2 Inverzní piezoelektrický jev .....	14
4 Využití piezoelektrického jevu.....	15
4.1 Přímý piezoelektrický jev .....	15
4.2 Inverzní piezoelektrický jev .....	15
5 Feroelektřina a pyroelektřina.....	16
6 PZT keramika .....	17
7 Curieova teplota .....	19
8 Poissonovo číslo .....	20
9 Elastická poddajnost.....	21
10 Koeficient mechanické jakosti .....	22
11 Koeficient elektromechanické vazby .....	23
12 Impedance .....	24
12.1 Výpočet impedance.....	25
13 Piezoelektrický rezonátor v obvodu .....	27
14 Piezoelektrický rezonátor .....	28
15 Rezonance a antirezonance .....	29
16 Měření rezonančních a antirezonančních frekvencí v impedančním spektru .....	30
17 Módy kmitu .....	31

17.1	Planární mód $k_p$ .....	31
17.2	Šířkově rozpínavý mód $k'_{31}$ .....	32
17.3	Podélný mód $k_{31}$ .....	32
17.4	Tloušťkově rozpínavý mód $k_t$ .....	33
18	Uzly kmitu a kmitny.....	34
19	Faktor dielektrických ztrát.....	35
20	Kapacita.....	36
	Praktická část.....	37
21	Cíl práce.....	38
22	Hypotézy.....	39
23	Metodika.....	40
23.1	Měření rezonančních a antirezonančních frekvencí.....	41
23.1.1	Nastavení impedančního analyzátoru.....	41
23.1.2	Měření na impedančním analyzátoru.....	42
23.1.3	Měření na RLC měřiči.....	43
23.2	Broušení.....	45
23.2.1	Pomůcky.....	45
23.2.2	Postup broušení.....	45
23.3	Výpočet rezonančních a antirezonančních frekvencí pro dané módy kmitu.....	47
23.3.1	Výpočet rezonančních frekvencí.....	47
23.3.2	Výpočet antirezonančních frekvencí.....	48
24	Výsledky.....	52
24.1	Rezonátor NCE51.....	52
24.1.1	Podélný mód kmitu $k_{31}$ .....	52
24.1.2	Šířkový mód kmitu $k'_{31}$ .....	56
24.1.3	Planární mód kmitu $k_p$ .....	61
24.1.4	Faktor dielektrických ztrát.....	65
24.1.5	Kapacita.....	66
24.2	Rezonátor NCE55.....	67
24.2.1	Podélný mód kmitu $k_{31}$ .....	67
24.2.2	Šířkový mód kmitu $k'_{31}$ .....	71
24.2.3	Planární mód kmitu $k_p$ .....	76
24.2.4	Faktor dielektrických ztrát.....	80
24.2.5	Kapacita.....	81
25	Diskuse.....	82
	Závěr.....	84



Literatura .....	85
Obrázky a tabulky .....	87
Rozhovor .....	88

# Úvod

Ačkoliv piezoelektrický jev již nespadá mezi nejnovější objevené fyzikální jevy, stále patří v povědomí širší veřejnosti k těm méně známým. Přesto se však s jeho praktickým využitím můžeme setkat denně a dalo by se i říci, že je běžnou součástí našeho každodenního života. Tato práce je zaměřena na rezonátory, které jsou založeny na principu piezoelektrického jevu.

## **Teoretická část**

# 1 Piezoelektrický jev

Přímý piezoelektrický jev je úkaz, při kterém vzniká elektrické napětí mechanickou deformací krystalu podél určitých os symetrie, přičemž velikost vygenerovaného napětí je přímo úměrná velikosti deformace krystalu. (Erhart a kolektiv, 2015) Pro piezoelektrický jev je však nezbytné, aby deformovaný krystal nebyl středově souměrný. (Šimáček a Neumann, 2015)

Tento jev je také možné uplatnit i obráceně, tedy vystavením tohoto krystalu elektrickému poli, čímž se krystal zdeformuje. Mluvíme tedy o takzvaném inverzním piezoelektrickém jevu. Tato deformace bude opět přímo úměrná intenzitě daného elektrického pole.

V obou případech se však jedná pouze o elastickou deformaci, která se zvětšuje nebo zmenšuje v závislosti na změně intenzity elektrického pole. Nedochozí tedy k trvalým změnám mechanických vlastností deformovaného krystalu a krystal se vždy vrátí do původní podoby. (Erhart a kolektiv, 2015)

Požadované deformace dosáhneme právě lehkým stlačením krystalu. A odtud pochází i samotný název toho jevu. Slovo „piezo“ nebo také „piezein“ je původem z řečtiny a znamená tlačit. (Erhart a kolektiv, 2015; Šimáček a Neumann, 2015)

O objevení piezoelektrického jevu se vědci pokoušeli několikrát. Poprvé se však existenci piezoelektrického jevu podařilo prokázat za pomoci experimentu až v roce 1880 bratrům Jacquesi a Pierru Curieovým. Tento experiment byl proveden na krystalu turmalínu. A právě bratrům Curieovým se jako prvním podařilo definovat základní vlastnosti tohoto jevu. (Erhart a kolektiv, 2015)

## 1.1 Vlastnosti piezoelektrického jevu

Základní vlastnosti piezoelektrického jevu byly poprvé charakterizovány jeho objeviteli bratry Curieovými v roce 1880 (Erhart a kolektiv, 2015). Těmito vlastnostmi jsou:

1. Elektrické náboje se generují na stěnách krystalu, které jsou kolmé k jeho polárním osám symetrie. (Erhart a kolektiv, 2015) Přičemž polární osy jsou osy, které nemají na sebe kolmou rovinu zrcadlové symetrie daného krystalu (CoJeCo, 2007).
2. Velikost elektrického náboje, který vznikl působením tlakové síly, je přímo úměrná velikosti tohoto tlaku. Tento náboj vzniká s působením tlaku a má opačná znamení na protilehlých koncích krystalu.
3. Velikost náboje není ovlivněna tloušťkou krystalu a závisí pouze na velikosti ploch, na kterých náboj vzniká. (Erhart a kolektiv, 2015)

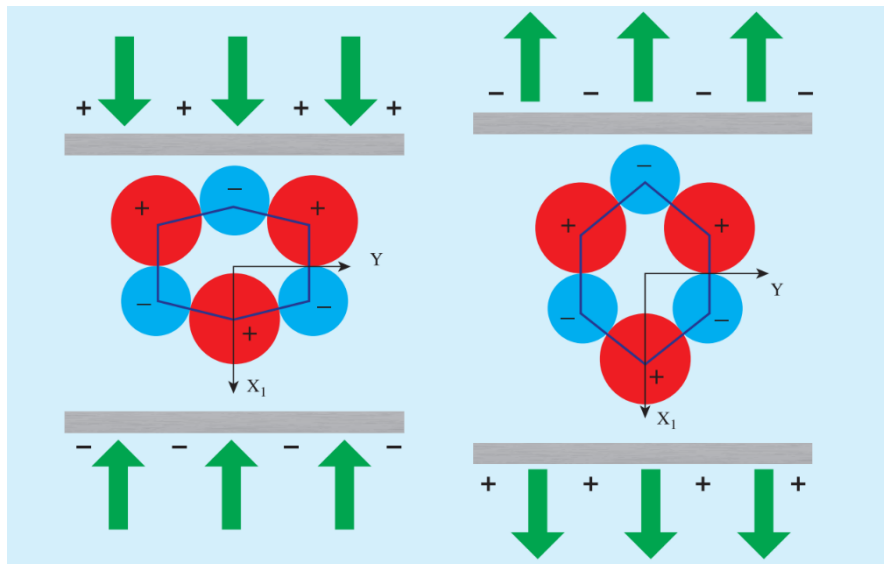
## 2 Princip piezoelektrického jevu

### 2.1 Přímý piezoelektrický jev

U piezoelektrického jevu probíhá deformace krystalu následovně. V deformovaném krystalu se nacházejí kladné a záporné ionty, které jsou v krystalické mřížce rovnoměrně rozprostřeny a těžiště jejich nábojů se překrývají, a proto krystal nemá žádný elektrický náboj. Mechanickou deformací dojde i k deformaci krystalové mřížky a dojde k posunu opačně nabitých iontů. Poloha těžišť jejich nábojů již není shodná a těžiště kladného a záporného náboje se od sebe vzdálí. Tím vzniká elektrický dipól (viz kapitola: Dipólový moment). Ten následně vede k tomu, že se na některých plochách krystalu vytvoří elektrický náboj. (Šimáček a Neumann, 2015)

### 2.2 Inverzní piezoelektrický jev

U inverzního piezoelektrického jevu probíhá děj přesně obráceně než u piezoelektrického jevu. Pokud je nezdeformovaný krystal vystaven elektrickému poli, opět dojde k posunutí kladných



Obrázek 1: Princip přímého piezoelektrického jevu u krystalu křemene  $\text{SiO}_2$  (Erhart 3)

a záporných iontů, které způsobí deformaci krystalické mřížky a tím i deformaci celého krystalu. (Šimáček a Neumann, 2015)

## 3 Výpočet piezoelektrického jevu

### 3.1 Přímý piezoelektrický jev

Piezoelektrický jev lze shrnout vztahem:

$$\Delta P = d \cdot \Delta T$$

Kde  $\Delta P$  [C · m<sup>-2</sup>] vyjadřuje změnu velikosti elektrické polarizace krystalu, která vzniká jeho stlačením. Elektrická polarizace charakterizuje, jaký vliv má elektrické pole na dielektrikum, kterým je v našem případě daný krystal (WikiSkripta 1, 2017). Veličina  $d$  [C · N<sup>-1</sup>] zde značí piezoelektrický nábojový koeficient, který charakterizuje velikost piezoelektrického jevu,  $\Delta T$  ve vzorci zastupuje změnu tlaku v Pascalech [Pa], který působí na krystal. (Erhart a kolektiv, 2015)

### 3.2 Inverzní piezoelektrický jev

Inverzní piezoelektrický jev lze vyjádřit vzorcem:

$$S = d \cdot E = \frac{\Delta l}{l_0}$$

(Erhart a kolektiv, 2015)

Zde  $S$  [-] značí změnu relativní deformace a jedná se o bezrozměrnou hodnotu. Koeficient  $d$  opět zastupuje piezoelektrický nábojový koeficient, který je shodný jako u přímého piezoelektrického jevu (Erhart a kolektiv, 2015). Veličina  $E$  [N · C<sup>-1</sup>] vyjadřuje intenzitu elektrického pole (WikiSkripta 1, 2017).

Dále lze také změnu relativní deformace vyjádřit jako poměr mezi změnou délky strany, kterou zastupuje  $\Delta l$  a její původní délkou, která se značí  $l_0$ . (ústně Erhart, 2018)

## 4 Využití piezoelektrického jevu

### 4.1 Přímý piezoelektrický jev

S prvním praktickým využitím piezoelektrického jevu přišel již krátce po jeho objevení jeden z jeho autorů Pierre Curie, který na principu přímého piezoelektrického jevu sestrojil elektrometr, tedy přístroj, který slouží pro měření elektrického náboje. Tento elektrometr se vyznačoval především svou přesností, a to už od nízkých hodnot náboje.

Přímého piezoelektrického jevu se dnes také využívá v nejrůznějších měřicích přístrojích, které se používají například pro měření síly, zrychlení, tlaku nebo také otřesů při zemětřeseních. Tento jev se také využívá v plynových zapalovačích a generátorech elektrického náboje. (Erhart a kolektiv, 2015)

### 4.2 Inverzní piezoelektrický jev

Inverzní piezoelektrický jev dnes nabízí v porovnání s přímým piezoelektrickým jevem podstatně širší využití.

V roce 1917 sestrojil Paul Langevin na základě tohoto jevu Langevinův rezonátor (měnič). Rezonátor se skládal z křemenné piezoelektrické destičky, která byla vložena mezi dvě destičky z kovu. Tento rezonátor byl schopen generovat ultrazvukové vlny. (Erhart a kolektiv, 2015) Frekvence kmitání rezonátoru, a tedy frekvence samotných vln byla větší než 20 kHz, kdy se již jedná o ultrazvuk (WikiSkripta 2, 2018).

Stejný typ rezonátoru se používá i dnes, například pro ultrazvukové čištění a pro jiné aplikace využívající ultrazvuk. Místo křemenné destičky se však používá destička vyrobená z PZT keramiky, která je podstatně levnější a výkonnější (viz kapitola: PZT keramika). Další využití našel tento jev také v detektorech plynů a chemických snímačích.

Bezesporu nejznámějším příkladem využití inverzního piezoelektrického jevu je však křemenný rezonátor v ručičkových hodinkách, bez nějž by nemohly správně fungovat. Na základě tohoto jevu bylo také vytvořeno mnoho typů nejrůznějších aktuátorů, jako jsou například elektricky řízené vstříkovací jednotky přívodu paliva do spalovacích motorů. Tyto jednotky se vyznačují svou rychlostí a přesností dávkování, a tím pomáhají šetřit palivo. Další jejich výhodou je i možnost jejich elektrického řízení. Jako další typ aktuátorů můžeme jmenovat rotační piezoelektrické ultrazvukové motory, které se vyznačují svými malými rozměry a nejčastěji jsou využívány v optických systémech. (Erhart a kolektiv, 2015)

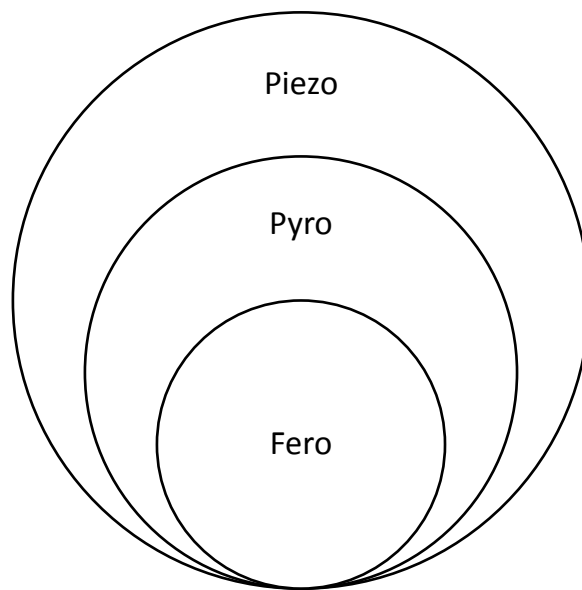
## 5 Feroelektrina a pyroelektrina

Kromě piezoelektriny jsou dále také známé pyroelektrina a feroelektrina.

U pyroelektriny dochází ke vzniku dipólového momentu zahřátím daného materiálu (například krystal turmalínu).

U feroelektriny existují dipólové momenty spontánně bez vnějšího vlivu (například Seignetteova sůl).

Vztah mezi piezoelektrickými, pyroelektrickými a feroelektrickými materiály lze popsat podle následujícího grafu:



*Graf 1: vztah mezi feroelektrickými, pyroelektrickými a piezoelektrickými materiály*

Z grafu je patrné, že každý materiál, který je feroelektrický, je i pyroelektrický a piezoelektrický. Každý pyroelektrický materiál je také piezoelektrický, ale nemusí být feroelektrický. Každý piezoelektrický materiál může, ale také nemusí, být feroelektrickým nebo pyroelektrickým. (Erhart a kolektiv, 2015)



## 6 PZT keramika

S rostoucím využitím piezoelektrického jevu postupně docházelo k objevování piezoelektrických materiálů, které by byly schopné nahradit vlastnostmi krystaly křemene. Jedním z těchto materiálů je i piezoelektrická keramika, které existuje mnoho druhů.

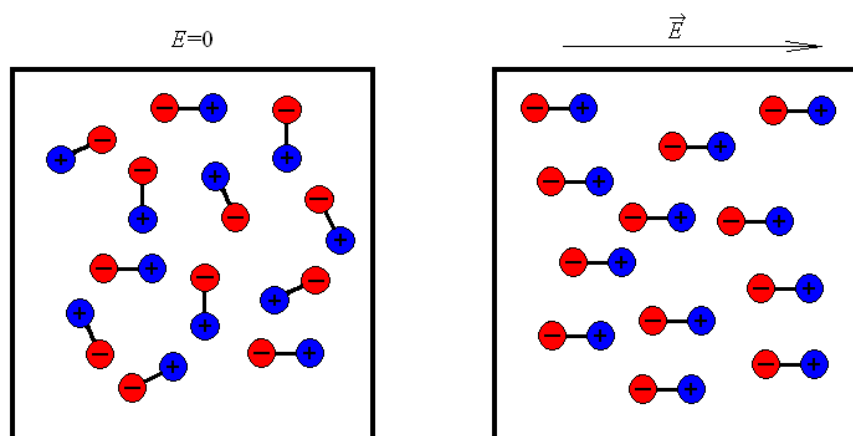
Hlavními výhodami piezoelektrické keramiky v porovnání s krystaly křemene je její podstatně nižší cena a vyšší výkonnost, které je dána jejím vysokým piezoelektrickým koeficientem.

Piezoelektrická keramika je feroelektrický materiál, který se skládá z polykrystalů, které jsou tvořeny velmi malými feroelektrickými zrnky (krystalky) tohoto materiálu s velikostí od 1 do 10  $\mu\text{m}$ . Přičemž částice v zrnech jsou uspořádány pravidelně, ale jednotlivá zrna v polykrystalu jsou vůči sobě uspořádána zcela náhodně a nepravidelně. (Erhart a kolektiv, 2015)

Feroelektrická zrna mají tu vlastnost, že si pod určitou teplotou (takzvanou Curieovou teplotou – viz kapitola: Curieova teplota) samovolně zachovávají vlastní elektrický dipól. Protože jsou však v rámci polykrystalu tato zrna uspořádána zcela náhodně, náboje dipólů jednotlivých zrn se vyruší. A proto se tedy polykrystal jako celek chová elektricky neutrálně. (Kos, 2012)

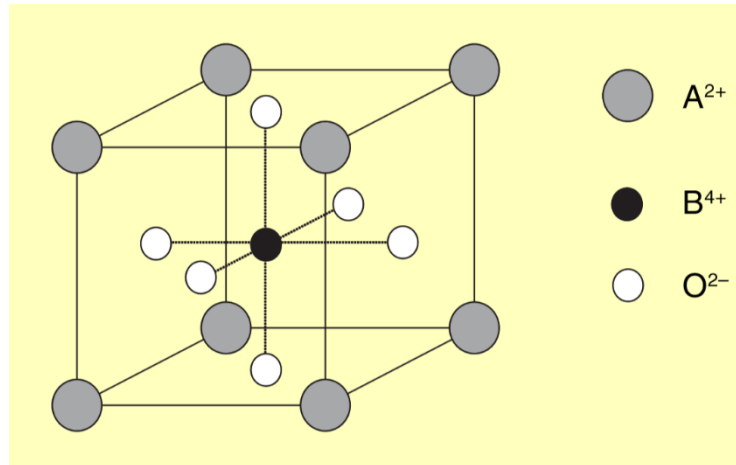
Pokud jsou však tyto polykrystaly vystaveny silnému elektrickému poli, dojde ke srovnání dipólů jednotlivých feroelektrických zrn ve směru intenzity elektrického pole. Tento směr si dipóly zrn zachovávají i poté, co na ně elektrické pole přestane působit. Tomuto jevu se říká polarizace. Díky tomu přestanou být polykrystaly elektricky symetrické, získají své vlastní makroskopické elektrické dipóly, které vznikají uspořádáním elektrických dipólů v zrnech a anizotropií vlastností keramiky, a zároveň se tím stanou i piezoelektrickými. (Erhart a kolektiv, 2015)

Míru polarizace charakterizuje permitivita, která se značí  $\epsilon$ . Permitivitu, nebo také absolutní permitivitu, lze vyjádřit jako součin relativní permitivity  $\epsilon_r$ , která je pro každou látku rozdílná, a permitivity vakua  $\epsilon_0$ . Relativní permitivita je bezrozměrná veličina a udává, kolikrát se snížila elektrická síla, pokud je těleso nesoucí elektrický náboj obklopeno danou látkou místo aby bylo obklopeno vakuem. Permitivita vakua je  $8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ . (Wikiskripta 4, 2019) Relativní permitivita u PZT keramiky je cca 1000 – 4000 podle jejího typu. Absolutní permitivita PZT keramiky je tedy cca  $1,77 \cdot 10^{-8} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$  pro relativní permitivitu 2000. (ústně Erhart, 2018)



Obrázek 2: Polarizace dipólů jednotlivých zrn pomocí vnějšího elektrického pole (Tomáš, 2009)

Dnes nejvíce využívaným typem piezoelektrické keramiky je takzvaná PZT keramika. PZT keramika je založena na bázi tuhého roztoku, který je tvořen ze dvou druhů oxidů. Těmito oxidy jsou oxid olova a titanu ( $\text{PbTiO}_3$ ), neboli PT, a oxid olova a zirkonu ( $\text{PbZrO}_3$ ), který se také značí PZ. Buňky  $\text{PbTiO}_3$  a  $\text{PbZrO}_3$  se střídají v poměru, který udává chemické složení. Nejčastěji se používá PZT keramika s obsahem 48 – 52 %  $\text{PbZrO}_3$ . Stechiometrickým poměrem lze tento materiál zapsat také jako  $\text{Pb}(\text{Zr}_x\text{Ti}_{1-x})\text{O}_3$ . (Erhart 1, 2002)



Obrázek 3: Obecná struktura základní buňky perovskitu PZT keramiky se strukturou  $\text{ABO}_3$

$A^{2+}$  - atomy Pb

$B^{4+}$  - atom Ti, nebo Zr (střídají se v závislosti na chemickém složení)

$O^{2-}$  - atomy kyslíku

(Erhart 1, 2002)

## 7 Curieova teplota

Curieova teplota je jednou ze základních vlastností, které se udávají u každého feroelektrického materiálu. Curieova teplota se také nazývá Curieův bod a značíme ji  $T_c$ . Curieova teplota se udává ve stupních Celsia. Jedná se o teplotu, při jejímž překročení dochází k zániku spontánní polarizace uvnitř jednotlivých feroelektrických zrn. Feroelektrické zrno tak přichází o svůj elektrický dipól a navenek se chová elektricky neutrálně. Z feroelektrické látky se tak stává látka paraelektrická. Tím látka ztrácí své feroelektrické a někdy i piezoelektrické vlastnosti. Každá dnes používaná PZT keramika při překročení Curieovy teploty ztrácí své piezoelektrické vlastnosti. Tyto vlastnosti je možné opět obnovit ochlazením materiálu pod Curieovu teplotu a opětovnou polarizací za pomoci vnějšího elektrického pole. (Hudeček, 2010)

## 8 Poissonovo číslo

Poissonova konstanta se značí  $m$  a jedná se o bezrozměrnou veličinu, která se udává pro elastickou deformaci daného materiálu. Poissonova konstanta vyjadřuje poměr mezi jeho natažením v podélném směru, které se zastupuje  $\varepsilon_x$ , a zúžením v příčném směru, které se značí  $\varepsilon_y$ , ke kterým při elastické deformaci dochází. U PZT keramiky lze podélný směr charakterizovat jako směr použitého mechanického napětí, například tlaku. Příčný směr pak tvoří dva směry, které jsou na sebe navzájem kolmé a zároveň jsou kolmé i k podélnému směru. Poissonovu konstantu je možné vyjádřit pomocí:

$$m = \left| \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \right|$$

Poissonovo číslo nebo také Poissonův koeficient je pak převrácenou hodnotou Poissonovy konstanty. Poissonovo číslo se značí  $\sigma$  a je opět bezrozměrné. Poissonovo číslo lze pak vypočítat jako:

$$\sigma = \frac{1}{m} = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right|$$

(Orava, 2011)

## 9 Elastická poddajnost

Youngův modul pružnosti se značí  $E$  a jeho jednotkou jsou Pascaly [Pa]. Youngův modul pružnosti udává velikost mechanického napětí na jednotku relativní deformace pro daný materiál a lze jej vyjádřit jako poměr mezi mechanickým tahovým napětím, které se značí  $\sigma$ , a podélné deformace, kterou zastupuje  $\varepsilon$ . Podélnou deformaci lze vypočítat jako poměr mezi změnou délky  $\Delta l$  a původní délkou  $l_0$ , tedy jako:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Youngův modul je možné vyjádřit vzorcem:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma \cdot l_0}{\Delta l}$$

(WikiSkripta 3, 2018)

Elastická poddajnost je převrácenou hodnotou Youngova modulu pružnosti. Lze tedy říci, že:

$$s_{11}^E = \frac{1}{E}$$

Elastická poddajnost se značí jako  $s_{11}^E$  a její jednotkou je  $\text{Pa}^{-1}$ . Elastická poddajnost udává, jak obtížné je těleso zdeformovat. (Pikous, 2018)

## 10 Koeficient mechanické jakosti

Koeficient mechanické jakosti se značí  $Q_m$  a je to bezrozměrná veličina. Koeficient jakosti udává účinnost daného materiálu při přenosu vln mechanického kmitání. Čím vyšší je koeficient jakosti, tím méně daný materiál tlumí vlny mechanického kmitání a naopak. Pokud by měl koeficient mechanické jakosti hodnotu  $\infty$ , pak by přenášel vlny mechanického kmitání bez jakékoliv změny amplitudy. Koeficient jakosti je pro každou rezonanční a antirezonanční frekvenci rozdílný.

Koeficient mechanické jakosti pro piezoelektrickou látku se měří přes elektrickou impedanci na impedančním analyzátoru, který jej měří automaticky pomocí třídecibellové metody podle normy. (ústně Erhart, 2018)

## 11 Koeficient elektromechanické vazby

Koeficient elektromechanické vazby udává, kolik elektrické energie se může maximálně přeměnit na energii mechanickou během piezoelektrického jevu. Koeficient elektromechanické vazby se značí  $k$  a jedná se o bezrozměrnou veličinu. Koeficient elektromechanické vazby je však pro každou rezonanční frekvenci odlišný.

Koeficient elektromechanické vazby u přímého piezoelektrického jevu lze vyjádřit jako poměr elektrické energie přeměněné na mechanickou energii ku celkové vložené elektrické energii. U nepřímého elektrického jevu představuje koeficient elektromechanické vazby poměr mezi mechanickou energií přeměněnou na elektrickou energii a celkovou vloženou mechanickou energií. (Erhart 2) Koeficient elektromechanické vazby se mění v závislosti na změně frekvencí rezonance a antirezonance a u piezoelektrických rezonátorů je pro každý mód kmitu rozdílná. (ústně Erhart, 2018)

Koeficient elektromechanické vazby pro jakýkoliv kmit lze univerzálně vypočítat pomocí frekvencí rezonance a antirezonance:

$$k_{eff} = \sqrt{\frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2}}$$

$f_a$  zde značí frekvenci antirezonance a  $f_r$  zastupuje frekvenci rezonance.

Koeficient elektromechanické vazby  $k_{eff}$  ale nepopisuje přenos energie při konkrétním módu kmitu. Pro každý mód kmitu se definuje charakteristický koeficient elektromechanické vazby.

Pokud jsou známy rezonanční a antirezonanční frekvence podélného ( $k_{31}$ ), šířkového ( $k'_{31}$ ) nebo planárního ( $k_p$ ) módu kmitu, je možné jejich koeficient elektromechanické vazby vypočítat pomocí vzorce ( $k_n$  je pak konkrétní elektromechanický faktor pro daný mód kmitu):

$$k_n = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot f_a}{2 \cdot f_r}}{\frac{\pi \cdot f_a}{2 \cdot f_r} - \tan \frac{\pi \cdot f_a}{2 \cdot f_r}}}$$

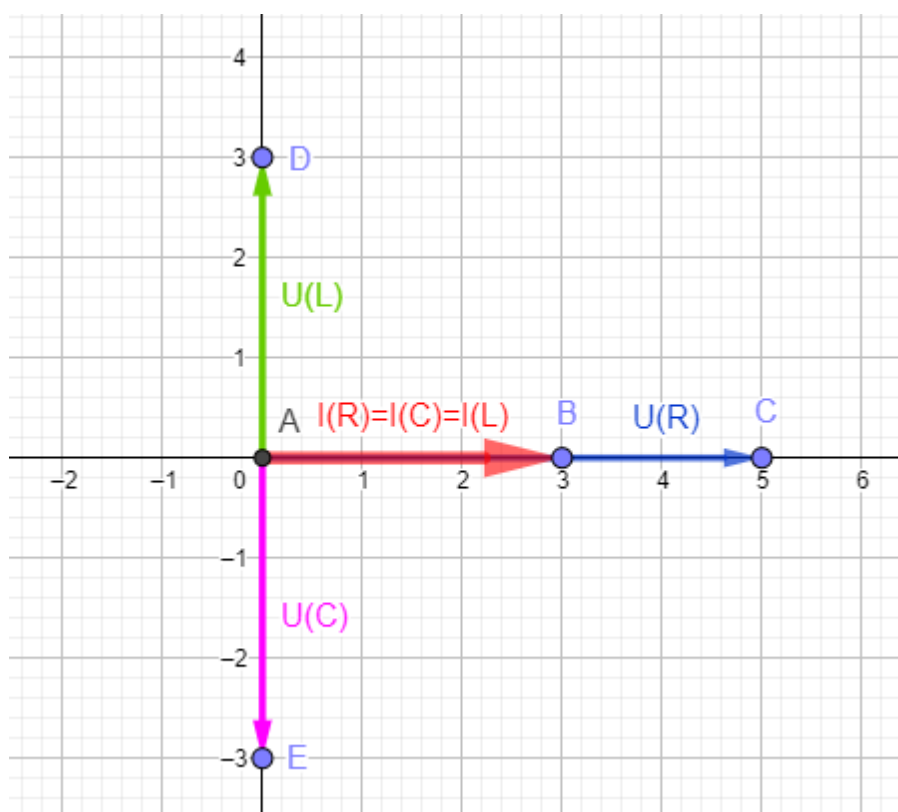
U těchto módů kmitů také platí, že  $k_{eff}$  je vždy přibližně o 10 % nižší než  $k_n$  v závislosti na poměrech stran piezoelektrického rezonátoru. (Piezoelectric Ceramic Resonators, 2017)

Koeficient elektromechanické vazby lze také vypočítat analyticky (viz: Metodika: Výpočet rezonančních frekvencí pro různé módy kmitu).

## 12 Impedance

Každé těleso, které je zapojené do elektrického obvodu se střídavým proudem, ovlivňuje časový posun mezi proudem, který se značí  $I$ , a napětím, které se značí  $U$ . Tím dochází k takzvanému fázovému posunu. Dalo by se říci, že každé takové těleso se z pohledu proudu a napětí chová v jednu chvíli zároveň jako rezistor, kondenzátor a cívka. Tím také dochází ke změně elektrického odporu v obvodu.

U každé z těchto součástí však dochází k rozdílnému fázovému posunu. U rezistoru vzrůstá i klesá napětí a tok proudu ve stejný moment. V případě rezistoru nedochází k fázovému posunu mezi tokem proudu a napětím. K fázovému posunu dochází, pokud je v obvodu zapojena cívka nebo kondenzátor. U kondenzátoru platí, že na něm amplituda proudu předbíhá amplitudu napětí. Opačnou situaci můžeme pozorovat na cívce, kdy je možné naměřit nárůst napětí a až poté nárůst průtoku proudu.



Obrázek 4: Fázové posuny mezi tokem proudu a napětím u rezistoru, cívky a kondenzátoru (autor, 2018)

$U(R); I(R)$  – rezistor

$U(C); I(C)$  – kondenzátor

$U(L); I(L)$  – cívka

Impedance je jedna ze základních veličin, která se měří u každého z kmitů piezoelektrických rezonátorů. Impedance vyjadřuje celkový odpor obvodu se střídavým proudem. Impedance sjednocuje jednotlivé fázové posuny z různých částí obvodu do jednoho fázového posunu. Díky tomu je možné vyjádřit celkový odpor obvodu se střídavým proudem. Impedance se značí  $Z$  a její jednotkou je Ohm  $[\Omega]$ . (ústně Erhart, 2018)



## 12.1 Výpočet impedance

Impedanci lze vypočítat jako poměr mezi napětím a proudem:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

Napětí a proud v tomto případě reprezentují fázory (viz: obrázek 4), to znamená, že mění svou okamžitou velikost v závislosti na čase.

Fázory lze zobrazit jako rotující úsečky v kartézské soustavě se středem rotace v počátku a jejich okamžitou hodnotu jako průmět na osu souřadnicového systému. Pro usnadnění počítání lze fázory reprezentovat komplexními čísly, kde například násobení imaginární jednotkou  $j$  znamená otočení fázoru o  $90^\circ$  proti směru hodinových ručiček.

Aby bylo možné vypočítat okamžitý odpor i přes fázový posun toku proudu a změny napětí, musí být impedance zaznamenána v podobě komplexního čísla. Impedanci je možné zapsat ve formě:

$$\hat{Z} = R + X \cdot j$$

Reálná část impedance  $\text{Re } \hat{Z}$  je tvořena rezistancí, která se značí  $R$  a udává odpor rezistoru. Jednotkou rezistance je Ohm.

$j$  zde značí imaginární jednotku ( $j^2 = -1$ ).

Imaginární část impedance  $\text{Im } \hat{Z}$  tvoří reaktance, kterou značíme  $X$  a obecně se skládá z indukční reaktance (induktance) a kapacitní reaktance (kapacitance).

Indukční reaktance vyjadřuje impedanci na ideální, tedy bezztrátové cívce a značíme ji  $X_L$  a lze ji vyjádřit jako:

$$X_L = \omega \cdot L$$

$\omega$  zde značí úhlovou rychlost a lze ji zapsat jako:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Veličina  $L$  značí elektrický proud, který se udává v Ampérech [A]. Indukčnost zde značíme  $L$  a udává se v jednotce Henry [H], kterou lze vyjádřit jako  $H = V \cdot A^{-1} \cdot s$ .

Kapacitní reaktance udává impedanci v ideálním kondenzátoru, tedy kondenzátoru, který nevykazuje žádné ztráty. Značíme ji  $X_C$  a lze ji vyjádřit jako:

$$X_C = - \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Veličina  $C$  vyjadřuje elektrickou kapacitu kondenzátoru a její jednotkou je Farad [F]. Farad lze vyjádřit jako poměr elektrického náboje a napětí, tedy jako Coulomb na Volt, tedy  $F = C \cdot V^{-1}$ .

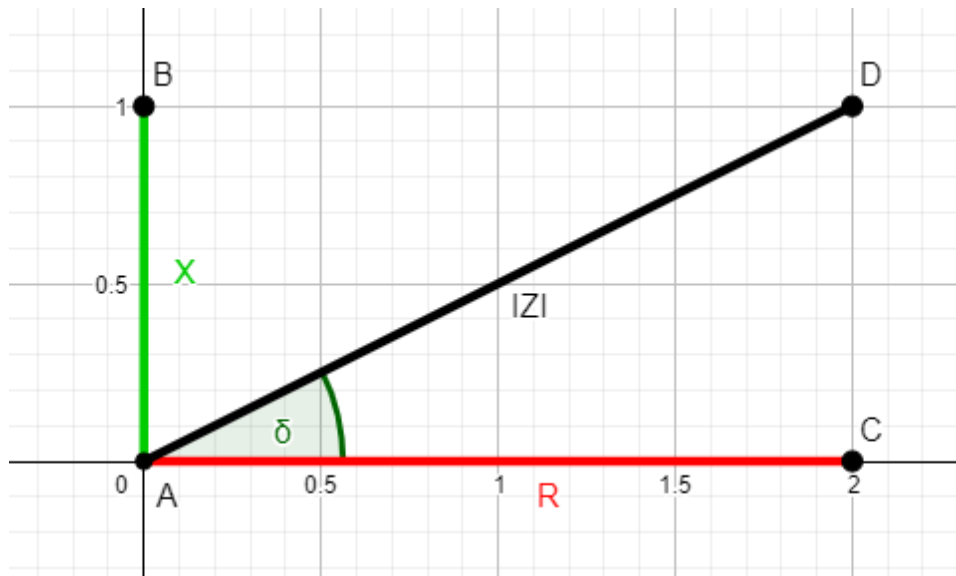
Induktance i kapacitance se udávají v Ohmech, proto tedy i jednotkou reaktance budou Ohmy. U indukčnosti i kapacitance jsou reaktance závislé na frekvenci.

Výsledný vzorec pro výpočet impedance tedy můžeme zapsat jako

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{(U_R + U_C + U_L)}{I} = \frac{R \cdot I + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) \cdot j \cdot I}{I} = R + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right) \cdot j$$

Celkovou impedanci daného obvodu nebo soustavy je možné vypočítat pomocí absolutní hodnoty z impedance zapsané ve tvaru komplexního čísla, tedy:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$



Obrázek 5: Výpočet celkového odporu obvodu z reálné a imaginární části impedance (autor 2018)

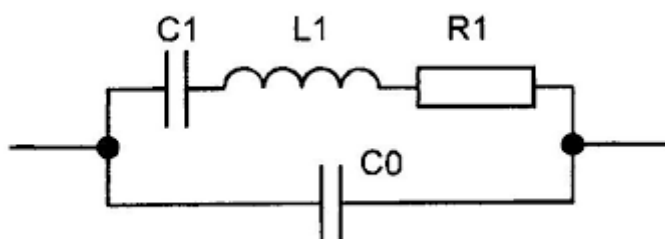
Fázový úhel mezi fázory napětí a proudu lze vyjádřit jako:

$$\tan \delta = \frac{X}{R}$$

Komplexní impedance se pak počítá jako rezistance pro stejnosměrné proudy, tedy výsledná impedance je součtem sériově zapojených impedancí a převrácená hodnota impedance je součtem převrácených hodnot paralelně zapojených impedancí. (ústně Erhart, 2018)

## 13 Piezoelektrický rezonátor v obvodu

Jak již bylo psáno dříve, každé vodivé těleso, které je zapojené do elektrického obvodu se střídavým proudem, se v jednom momentě z pohledu proudu a napětí chová jako rezistor, kondenzátor a cívka. Piezoelektrický rezonátor se chová mimo rezonanci především jako kondenzátor, který má statickou kapacitu. Pro zjednodušení je možné rezonátor zakreslit v podobě náhradního obvodu. Statická kapacita  $C_0$  zde tvoří samostatnou větev (viz: obrázek). K této větvi je paralelně připojena takzvaná dynamická větev, která popisuje změny chování v rezonanci a dává typický tvar impedanční závislosti na frekvenci v blízkosti rezonance a antirezonance. (ústně Erhart, 2018)



Obrázek 6: náhradní obvod piezoelektrického rezonátoru v blízkosti rezonance (Vrňata, 2013)

## 14 Piezoelektrický rezonátor

Piezoelektrický rezonátor převádí střídavý elektrický proud na mechanické kmitání. Piezoelektrický rezonátor je nejčastěji tvořen destičkou, která se dnes nejvíce vyrábí z PZT keramiky (viz kapitola: PZT keramika), ke které jsou na dvě protilehlé strany naneseny stříbrnou pastou elektrody. Tyto elektrody jsou vždy připevňovány na strany, které jsou kolmé ke směru polarizace. Piezoelektrický rezonátor bývá nejčastěji čtvercového, obdélníkového nebo kruhového tvaru. Může se ale také jednat i o váleček, trubičku či prsteneček.

V dnešní době existuje mnoho typů piezoelektrických rezonátorů, jejichž vlastnosti se navzájem liší podle jejich účelu. Dosažení požadovaných vlastností jednotlivých rezonátorů lze dosáhnout použitím PZT keramiky o různých mechanických jakostech.

Využitím rozdílných tvarů piezoelektrických rezonátorů a upravením jejich rozměrů lze podstatně ovlivnit, jaké módy kmitu budou v rezonátoru převládat (viz kapitola: Módy kmitu).

Dalším důležitým parametrem, který ovlivňuje vlastnosti piezoelektrického rezonátoru, je směr polarizace použité PZT keramiky. Platí totiž, že kolmo ke směru polarizace jsou vlastnosti PZT keramiky izotropní. Směry, které se používají, existují pouze dva, a to ve směru tloušťky a ve směru délky.

Každý piezoelektrický rezonátor je nutné nechat po zpolarizování nechat vystárnout. Po polarizaci probíhají v piezoelektrickém rezonátoru samovolné změny některých jeho vlastností. Minimální doba pro odležení piezoelektrických rezonátorů po polarizaci je cca 30 dní. Po této době jsou již vlastnosti piezoelektrického rezonátoru málo proměnné. (ústně Erhart, 2018)



Obrázek 7: Piezoelektrický rezonátor (autor, 2018)

## 15 Rezonance a antirezonance

Pokud je těleso vystaveno působení budící síly, která na něj působí s pravidelnou periodou, je toto těleso nuceno kmitat na stejné frekvenci, s jakou na něj působí budící síla. Touto budící silou může být například i jiné kmitání. Při některých frekvencích má však dané těleso schopnost více získávat energii z budící síly a kmitat tak s vyšší amplitudou. Tyto frekvence se nazývají rezonanční frekvence. Jedno těleso může mít i více rezonančních frekvencí. (Stockley a kolektiv, 2003)

Ke každé rezonanci existuje také antirezonance s vlastní antirezonanční frekvencí. Pokud budící síla, která působí na těleso, na něj působí s frekvencí rovnou antirezonanční frekvenci tělesa, pak těleso kmitá s jiným rozložením výchylek kmitů než při rezonanci, ale stále s maximální amplitudou.

U piezoelektrických rezonátorů rezonance nastává v momentě, kdy piezoelektrickým rezonátorem, přesněji dynamickou větví náhradního obvodu, prochází nejvíce proudu.

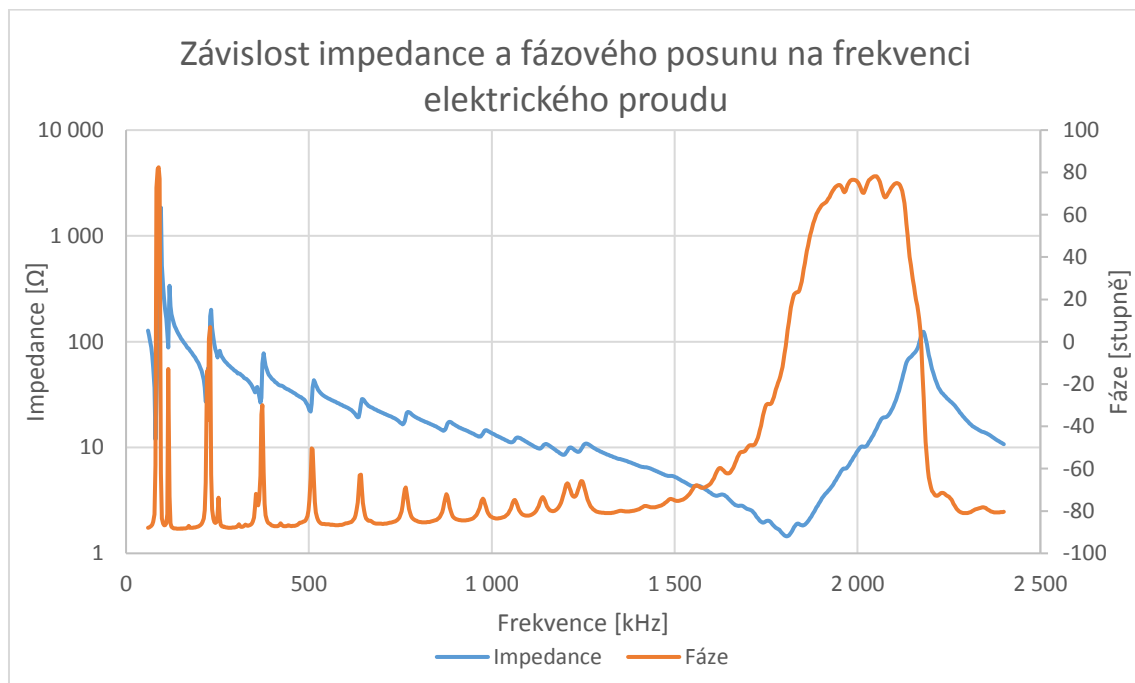
Antirezonance pak u piezoelektrických rezonátorů nastává ve chvíli, kdy piezoelektrickým rezonátorem, respektive jeho dynamickou větví, prochází nejméně proudu. Při antirezonanci u piezoelektrických rezonátorů dochází ke změně fázového posunu. (ústně Erhart, 2018)

## 16 Měření rezonančních a antirezonančních frekvencí v impedančním spektru

Rezance v piezoelektrickém rezonátoru nastává, pokud je frekvence elektrického proudu shodná nebo téměř shodná s jednou z jeho rezonančních frekvencí. Každá z rezonančních frekvencí piezoelektrického rezonátoru náleží jinému módu kmitu (viz kapitola: Módy kmitu).

Měřit jednotlivé rezonanční frekvence u piezoelektrických látek je možné na impedančním analyzátoru. Impedanční analyzátor je měřicí přístroj, který měří v závislosti na frekvenci elektrického proudu jejich impedanci a posun mezi napětím a proudem.

Pokud začne piezoelektrický rezonátor při určité frekvenci rezonovat, dojde u něj k náhlému poklesu impedance. Naopak při antirezonanci dochází k náhlému vzrůstu impedance. Každý kmit je také doprovázen fázovým posunem. Čím větší je rozdíl mezi frekvencemi rezonance a antirezonance, tím větší je i koeficient elektromechanické vazby. (ústně Erhart, 2018)



Graf 2: Ukázka závislosti impedance a fázového posunu v závislosti na frekvenci elektrického proudu

## 17 Módy kmitu

Tato kapitola pojednává o jednoduchých módech kmitů, jejichž parametry je možné analyticky vyjádřit.

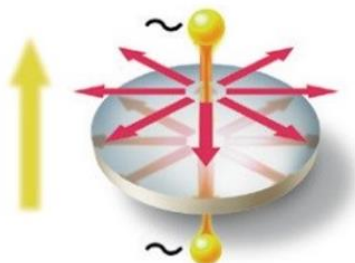
Mód kmitu udává, kterým směrem nebo směry piezoelektrický rezonátor při dané rezonanční frekvenci kmitá. Každý piezoelektrický rezonátor bez ohledu na jeho tvar a další charakteristiky může kmitat více módy kmitů, z nichž má každý svou vlastní rezonanční frekvenci, za které se výchylka zvětšuje.

Druhy módů kmitů, jejich počet velikost a způsob buzení jsou podstatně ovlivňovány rozměry, tvarem rezonátoru, umístěním a tvarem elektrod a směrem polarizace. Se zvyšujícím se počtem os symetrie, které tvar daného rezonátoru má, se snižuje počet módů kmitů, kterými tento rezonátor kmitá.

Ke každému módu kmitu se také udává jeho koeficient elektromechanické vazby, který je ovlivněn charakteristikami daného rezonátoru (viz kapitola: Koeficient elektromechanické vazby). (ústně Erhart, 2018)

### 17.1 Planární mód $k_p$

Planární mód kmitu  $k_p$  tvoří rovinné nebo také plošné kmitání. Jedná se například o rozpínání kruhové destičky ve všech směrech, které jsou kolmé ke směru polarizace. Tímto módem kmitají také rezonátory tvořené destičkou ve tvaru čtverce nebo obdélníku blízcímu se čtverci, jehož poměr stran je tedy přibližně  $a = b$ . Tento mód kmitu charakterizuje elektromechanický koeficient  $k_p$ . (ústně Erhart, 2018)



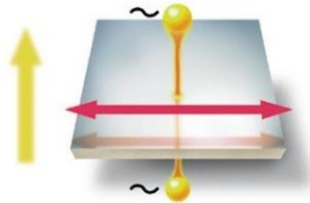
Obrázek 8: Planární mód kmitu (Mašek, 2017)

Červené šipky – směry kmitů

Žlutá šipka – směr polarizace

## 17.2 Šířkově rozpínavý mód $k'_{31}$

Šířkově rozpínavým módem kmitu  $k'_{31}$  kmitají piezoelektrické rezonátory ve tvaru obdélníku, kde  $a < b$ . Tento mód tvoří kmity, které mají výchylky rovnoběžné se stranou  $a$ . Tento mód kmitu charakterizuje elektromechanický koeficient  $k'_{31}$ . (ústně Erhart, 2018)



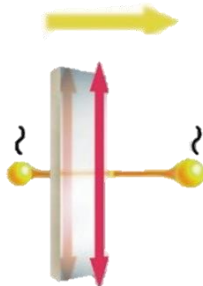
Obrázek 9: Šířkově rozpínavý mód kmitu (Mašek, 2017)

Červená šipka – směr kmit

Žlutá šipka – směr polarizace

## 17.3 Podélný mód $k_{31}$

Podélný mód kmitu  $k_{31}$  nastává u piezoelektrického rezonátoru ve tvaru obdélníku s velkým rozdílem mezi délkami stran, tedy kde  $a \ll b$ . Jedná se proto spíše o tyčinku. Kmity zde vedou rovnoběžně se stranou  $b$ . Tento mód kmitu charakterizuje elektromechanický koeficient  $k_{31}$ . (ústně Erhart, 2018)



Obrázek 10: Podélný mód kmitu (Mašek, 2017)

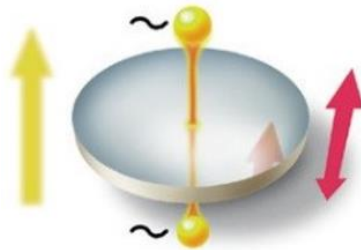
Červená šipka – směr kmitu

Žlutá šipka – směr polarizace



## 17.4 Tloušťkově rozpínavý mód $k_t$

Tloušťkově rozpínavým módem kmitu  $k_t$  mohou kmitat všechny piezoelektrické rezonátory, jejichž základ tvoří tenká destička. Tato destička musí mít tloušťku podstatně menší než plošný rozměr a musí být plošně rozlehlá, ale nemusí být nějak konkrétně plošně ohraničena (například jako disk či čtverec). (ústně Erhart, 2018) Tento mód je tvořen kmity, které vedou ve směru tloušťky piezoelektrického rezonátoru. (ústně Erhart, 2018) Rezonanční frekvence tloušťkově rozpínavého módu je nejvyšší ze všech výše uvedených módů kmitů. Tento mód kmitu se běžně vyskytuje u PZT keramiky o tloušťce 1 mm a menší a až při frekvencích v řádech milionů Hertzů. Tento mód kmitu charakterizuje elektromechanický koeficient  $k_t$ . (Erhart a kolektiv, 2015)



Obrázek 11: Tloušťkově rozpínavý mód kmitu (Mašek, 2017)

Červená šipka – směr kmitu

Žlutá šipka – směr polarizace

## 18 Uzly kmitu a kmitny

Každý mód kmitu má své uzly kmitu a kmitny.

Uzel kmitu je místo, ve kterém je při stojatém kmitání výchylka nulová. Tento bod na piezoelektrickém rezonátoru tedy zůstává v klidu i ve chvíli, kdy piezoelektrický rezonátor kmitá. Každý mód kmitu má uzly kmitu uložené jinde. Například podélný mód kmitu  $k_{31}$  má uzly kmitu uložené na rovině, která tvoří osu delší strany piezoelektrického rezonátoru. Šířkový mód kmitu  $k'_{31}$  má pak uzly kmitu uložené na rovině, která tvoří osu kratší strany rezonátoru a planární mód kmitu  $k_p$  má uzel kmitu uložený v jednom bodě ve středu piezoelektrického rezonátoru. U tloušťkového módu kmitu  $k_t$  jsou uzly kmitu uspořádány do roviny, která prochází středem tloušťky piezoelektrického rezonátoru.

Kmitny jsou pak místa, kde piezoelektrický rezonátor dosahuje při daném módu kmitu největší výchylky.

Každý kmit má i svou vlastní vlnovou délku. Vlnová délka se značí  $\lambda$  [m] a lze ji vyjádřit jako:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Písmeno  $c$  značí fázovou rychlost [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]. Písmeno  $f$  pak vyjadřuje frekvenci [Hz].

Ze vzorce pro vlnovou délku je tedy patrné, že počet uzlů a kmiten bude záviset na frekvenci kmitání a délce piezoelektrického rezonátoru.

Například podélně kmitající (mód kmitu  $k_{31}$ ) tyčinka při módu kmitu  $k_{31}$  má pro základní rezonanční frekvenci jednu uzlovou rovinu ve středu délky. (ústně Erhart, 2018)

## 19 Faktor dielektrických ztrát

Faktor dielektrických ztrát se značí  $D$  a jedná se o bezrozměrnou veličinu. Faktor dielektrických ztrát se měří pouze při určitých frekvencích elektrického proudu. Frekvence, za kterých je faktor dielektrických ztrát měřen, závisí na rezonančních frekvencích piezoelektrického rezonátoru. U piezoelektrických rezonátorů se faktor dielektrických ztrát běžně měří při 1 kHz pro stanovení statické kapacity, frekvence je volena menší než je libovolná rezonanční frekvence rezonátoru.

Faktor dielektrických ztrát lze vyjádřit jako poměr kapacity a rezistance:

$$D = \frac{X_C}{R} = \frac{\text{Im } \hat{Z}}{\text{Re } \hat{Z}}$$

Faktor dielektrických ztrát lze také vyjádřit jako  $\tan(\delta)$ . Veličina  $\delta$  zde značí velikost úhlu mezi velikostí impedance a rezistancí. (Illinois Capacitor, 2018)

Na základě faktoru dielektrických ztrát je pak možné vypočítat ztráty, ke kterým dochází uvnitř kondenzátoru vlivem přeměny elektrické energie na teplo.

Impedanci ideálního bezztrátového kondenzátoru lze vyjádřit jako:

$$\hat{Z}_C = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Neideální kondenzátor lze pak při výpočtech nahradit náhradním neboli paralelním schématem, kdy jsou v obvodu paralelně zapojeny kondenzátor a rezistor. Impedanci neideálního kondenzátoru lze pak vyjádřit jako:

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} + \frac{1}{R}$$

Tuto rovnici lze pak upravit jako:

$$\hat{Z} = \frac{R}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} = \frac{R}{1 + (\omega \cdot R \cdot C)^2} \cdot (1 - j \cdot \omega \cdot R \cdot C)$$

Z tohoto následně vznikne výsledný vztah pro faktor dielektrických ztrát:

$$D = -\frac{\omega \cdot R \cdot C}{1} = \frac{\text{Im } \hat{Z}}{\text{Re } \hat{Z}}$$

(ústně Erhart, 2018)

## 20 Kapacita

Každé těleso, které je zapojeno do elektrického obvodu se chová jako kondenzátor. Kondenzátor by se dal popsat jako dvě elektrody v podobě dvou vodivých desek, které jsou odděleny dielektrikem.

Každý kondenzátor má svou kapacitu, která se značí  $C$ . Kapacita kondenzátoru udává velikost elektrického náboje, který je daný kondenzátor schopen pojmout, aby se napětí na jeho elektrodách zvýšilo o 1 V. Základní jednotkou kapacity je Farad a značíme ji F.

Kapacitu pro deskový kondenzátor lze vypočítat jako:

$$C = \frac{\varepsilon \cdot S}{d}$$

$\varepsilon$  zde značí permitivitu, což je konstanta, která je pro každou látku, ze které je kondenzátor tvořen, rozdílná. Veličina  $S$  ve vzorci zastupuje velikost ploch desek kondenzátoru. Veličina  $d$  udává vzdálenost těchto desek od sebe. (Jedličková a kolektiv)

## **Praktická část**

## 21 Cíl práce

Cílem této práce je prostudovat piezoelektrické rezonátory ze dvou různých materiálů soft PZT keramiky pro různé módy kmitů od planárního přes šířkově rozpínavý až po podélný mód a sledovat, jak se budou měnit rezonanční a antirezonanční frekvence jednotlivých módů kmitů a zjistit jejich koeficienty mechanické jakosti a koeficienty elektromechanických vazeb.

## 22 Hypotézy

Hlavní hypotézy tohoto projektu jsou shrnuty v následujících bodech:

- 1) Frekvence podélného módu kmitu  $k_{31}$  se s měnícím se poměrem stran  $a$  a  $b$  piezoelektrického rezonátoru nebudou měnit.
- 2) Koeficient mechanické jakosti  $Q_r$  měřený pro rezonanci bude vždy nižší než koeficient mechanické jakosti  $Q_a$  měřený pro antirezonanci.
- 3) Naměřený koeficient elektromechanické vazby bude odpovídat koeficientu elektromechanické vazby udávaném v matici vlastností od výrobce.

## 23 Metodika

Všechny pokusy byly provedeny v období od 26.7. do 16.11.2018 v laboratořích pro výzkum piezoelektriny Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci. Vedoucím práce i odborným konzultantem byl prof. Mgr. Jiří Erhart, Ph.D..

Praktická část této práce zkoumala piezoelektrické rezonátory pro různé módy kmitu od planárního (čtverec) přes šířkově rozpínavý (obdélník) až po podélný mód (tyčinka). Výzkum byl prováděn na dvou piezoelektrických rezonátorech s označením NCE51 a NCE55.

Označení NCE je zkratka názvu firmy Noliac Ceramics, která je výrobcem těchto dvou materiálů PZT keramiky, ze kterých byly piezoelektrické rezonátory vyrobeny. Čísla 51 a 55 udávají tvrdost použité PZT keramiky. První číslice, která je v obou případech 5, znamená, že na obou rezonátorech je použit typ soft (měkké) PZT keramiky. Druhá číslice slouží k přesnějšímu určení tvrdosti, čím vyšší tato číslice je, tím je použitá PZT keramika měkkší. Na základě těchto označení je tedy patrné, že piezoelektrický rezonátor NCE51 je vyroben z tvrdší PZT keramiky než rezonátor NCE55.

Oba piezoelektrické rezonátory byly na počátku tvořeny destičkou ve tvaru čtverce. Rozměry rezonátoru NCE51 byly 15 . 15 / 1 mm (délka . šířka / tloušťka). Rozměry rezonátoru NCE55 byly 20 . 20 / 1 mm (délka . šířka / tloušťka). Obě velké strany u každého rezonátoru byly pokoveny tenkými vrstvami stříbra, které sloužily jako elektrody.

Směr polarizace byl v obou případech ve směru tloušťky rezonátoru. Polarizace u piezoelektrického rezonátoru NCE51 proběhla v roce 2016. Piezoelektrický rezonátor NCE55 byl zpolarizován v roce 2009. U obou rezonátorů tedy již v době měření uběhla dostatečně dlouhá doba na to, aby se jejich vlastnosti významněji neměnily z důvodu stárnutí.

Ve svém výchozím tvaru, kterým byl v obou případech čtverec s rozměry stran  $a = b$ , kmitaly oba piezoelektrické rezonátory planárním módem kmitu. U každého z rezonátorů byla následně obroušována jedna strana, a to vždy cca po 1 mm. Oba piezoelektrické rezonátory byly takto postupně obroušovány až do šířky 3 mm. Výsledné rozměry rezonátorů tedy byly 15 . 3 / 1 mm u NCE51 a 20 . 3 / 1 mm u NCE55. Ze čtvercového tvaru se nejdříve stal obdélník, kde  $a < b$ . Po prvních několika obroušení oba piezoelektrické rezonátory stále kmitaly planárním módem kmitu. Až když došlo ke zvětšení rozdílu mezi stranami  $a$  a  $b$ , začaly piezoelektrické rezonátory kmitat šířkově rozpínavým módem kmitu. S postupným obroušováním se z piezoelektrických rezonátorů stával obdélník s postupně se zvětšujícím rozdílem stran, kde  $a \ll b$ . Z obou piezoelektrických rezonátorů se tak stala tyčinka kmitající podélnými módy kmitu. Celkem bylo provedeno 29 broušení piezoelektrických rezonátorů a 31 měření na impedančním analyzátoru.

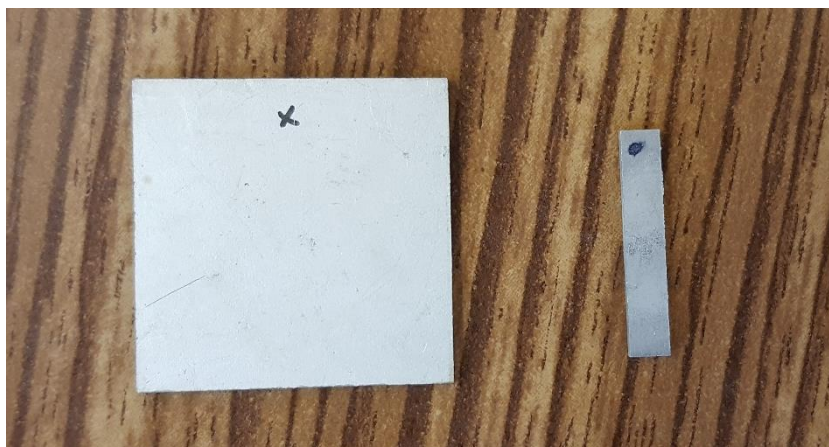
Výzkum obou těchto rezonátorů se tedy skládal ze tří hlavních částí.

První část byla zaměřena na měření impedančních spekter piezoelektrických rezonátorů. V těchto spektrech byly poté detailně naměřeny rezonanční a antirezonanční frekvence jednotlivých módů kmitů. Toto měření proběhlo u všech zkoumaných rozměrů piezoelektrických rezonátorů. V této části byla také měřena kapacita piezoelektrického rezonátoru a jeho faktor dielektrických ztrát.

Ve druhé části byl piezoelektrický rezonátor vždy zbroušen o 1 mm, aby u něj mohla být znovu naměřena impedanční spektra.



Třetí část se zabývala vyhodnocováním spekter, přiřazováním píků k jejich módům kmitů a výpočty jejich vlastností. K tomuto byly použity vzorce pro výpočet rezonančních frekvencí na základě rozměrů piezoelektrických rezonátorů a jejich materiálových vlastností pro konkrétní módy kmitů, popsané analytickými vztahy.



Obrázek 12: Dosud nezbrošený piezoelektrický rezonátor NCE55 (vlevo) a již zbrošený rezonátor NCE51 (vpravo) (autor 2018)

## 23.1 Měření rezonančních a antirezonančních frekvencí

Všechna měření impedančních spekter piezoelektrických rezonátorů byla prováděna na impedančním analyzátoru Agilent 4294A Precision Impedance Analyzer s rozsahem frekvencí od 40 Hz do 110 MHz. Výrobce udávaná přesnost tohoto impedančního analyzátoru byla 0,08 %.

Všechna měření kapacity a faktoru rozptylu byla prováděna na RLC měřiči GW Instek LCR 821 s rozsahem frekvencí od 12 Hz do 200 kHz. Tento LCR byl v tomto rozsahu schopen měřit při 500 různých frekvencích. Výrobce udávaná přesnost tohoto RLC měřiče byla 0,05 %.

Při všech měřeních na obou přístrojích byla zaznamenána také teplota, při které byla měření prováděna.

### 23.1.1 Nastavení impedančního analyzátoru

Nastavení impedančního analyzátoru proběhlo podle instrukcí vedoucího práce. Nastavení impedančního analyzátoru bylo pro všechna měření u obou piezoelektrických rezonátorů stejné. Jediný rozdíl byl ve frekvencích, od kterých se začínalo měřit impedanční spektrum. Ukázalo se totiž, že piezoelektrický rezonátor NCE55 začíná rezonovat již při nižších frekvencích než rezonátor NCE51.

Impedanční analyzátor byl nastaven podle následující tabulky:

Tabulka 1: Nastavení impedančního analyzátoru

Bandwidth	3
Měřítka (Stopa A)	Logaritmické
Měřítka (Stopa B)	Lineární
Počet bodů	801
Start (NCE51)	80 kHz
Start (NCE55)	60 kHz
Stop	2,4 MHz

Údaje start a stop ukazují, v jakém rozsahu frekvencí elektrického proudu byla impedanční spektra měřena. Pro typy a rozměry námi měřených piezoelektrických rezonátorů postačil rozsah frekvencí od 80 kHz do 2,4 MHz u rezonátoru NCE51, respektive od 60 kHz do 2,4 MHz u rezonátoru NCE55.

Počet bodů udává, do kolika bodů na vodorovné ose se impedanční spektrum vykreslí. Při našich měřeních se graf vykresloval do 801 bodů, což je maximum, které je tento impedanční analyzátor schopen vykreslit.

Funkce bandwidth umožňuje nastavit rychlost měření impedančního spektra a jeho přesnost. Se snižující se rychlostí měření stoupá přesnost naměřených hodnot. Při našich měřeních byl impedanční analyzátor nastaven na hodnotu 3, což je střední hodnota na stupnici od 1 do 5.

Impedanční analyzátor má schopnost zaznamenávat dvě stopy. Na stopu A se zaznamenává impedance a na stopu B se ke každé velikosti impedance zaznamenává i fázový posuv ve stupních, který ji provází. Z důvodu velkých rozsahů hodnot impedance bylo pro lepší přehlednost v grafu nastaveno na stopě A logaritmické měřítko. Na stopě B nebyl rozsah hodnot tak velký, proto u ní stačilo lineární měřítko.

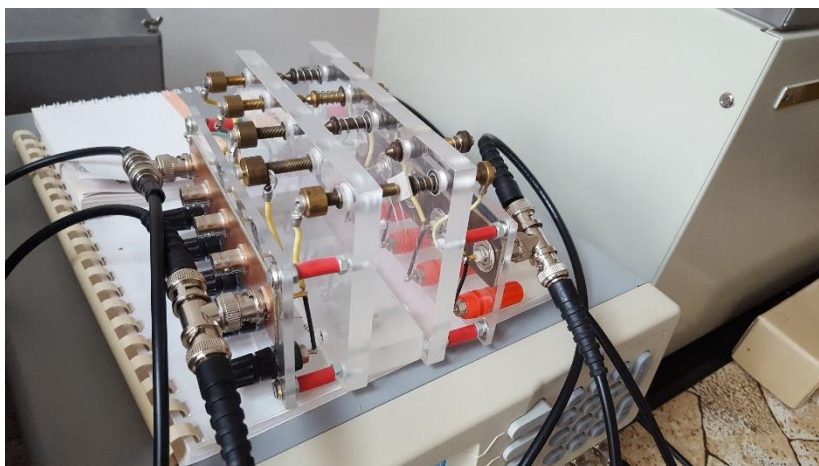


Obrázek 13: Impedanční analyzátor Agilent 4294A Precision Impedance Analyzer (autor 2018)

### 23.1.2 Měření na impedančním analyzátoru

Nejdříve byl piezoelektrický rezonátor uchycen mezi hroty první pozice držáku tak, aby ho svíraly přibližně uprostřed z důvodu uchycení v uzlu kmitů. U symetrických módů kmitů, mezi které patří i námi hledané módy kmitů, je totiž uzel kmitů uprostřed rezonátoru. Nesymetrické módy kmitů se tímto naopak utlumí. Tato pozice držáku byla připojena pomocí čtyř koaxiálních kabelů čtyřvodičovou metodou k impedančnímu analyzátoru. Čtyřvodičová metoda připojuje k piezoelektrickému rezonátoru sériově ampérmetr a zároveň paralelně voltmetr. Díky této metodě nedochází k ovlivnění měření přechodovými odpory na svorkách. (ústně Erhart, 2018). Prostřednictvím hrotů držáku byl piezoelektrický rezonátor vystavován elektrickému proudu o námi nastaveném rozsahu frekvencí.

V naměřeném impedančním spektru byly následně prostřednictvím impedančního analyzátoru dohledávány frekvenční rozsahy, ve kterých se nacházely jednotlivé píky rezonancí a antirezonancí. Každý takový rozsah byl poté na impedančním analyzátoru detailně přiblížen, aby se vždy zobrazil jen jeden pík rezonance a k němu náležící pík antirezonance.



Obrázek 14: Držák s piezoelektrickým rezonátorem připojený k impedančnímu analyzátoru (autor, 2018)

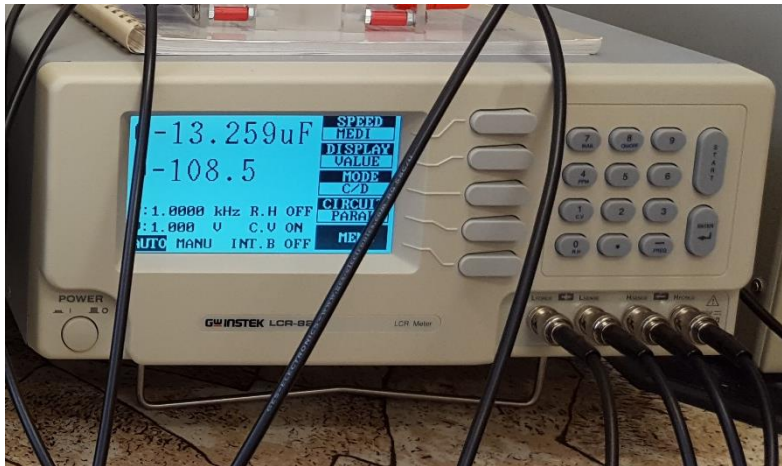
U každého z takto přibližných píků byla poté zaznamenána jejich přesná frekvence a velikost impedance. Pokud to bylo možné, byl prostřednictvím impedančního analyzátoru u píků naměřen koeficient mechanické jakosti. Koeficient jakosti však nebylo možné naměřit pro všechny píky. Velikost některých píků totiž byla příliš malá, a proto u nich nebyl schopen impedanční analyzátor koeficient mechanické jakosti naměřit.



Obrázek 15: Detail uchycení piezoelektrického rezonátoru do držáku (autor, 2018)

### 23.1.3 Měření na RLC měřiči

Po měření piezoelektrického rezonátoru na impedančním analyzátoru následovalo jeho měření na RLC měřiči. RLC měřič byl připojen k páté pozici měřicího držáku. Do této pozice byl piezoelektrický rezonátor uchycen stejně jako v případě měření na impedančním analyzátoru. RLC měřič byl nastaven do módu pro měření kapacity a faktoru dielektrických ztrát piezoelektrického rezonátoru. Tyto hodnoty byly měřeny při vystavení piezoelektrického rezonátoru elektrickému o napětí o amplitudě 1 V a s frekvencí 1 kHz (tedy nižší frekvence než všechny rezonanční frekvence vzorku). Kapacita byla změřena pro paralelní náhradní schéma (C – D mód), tedy pro zapojení kondenzátoru a rezistoru paralelně.



Obrázek 16: RLC měřič GW Instek LCR 821 (autor, 2018)



## 23.2 Broušení

Po každém měření na impedančním analyzátoru byly piezoelektrické rezonátory zbrušeny o 1 mm. Piezoelektrické rezonátory byly pokaždé zbrušovány ze stejné strany, a to až do výsledné šířky 3 mm.

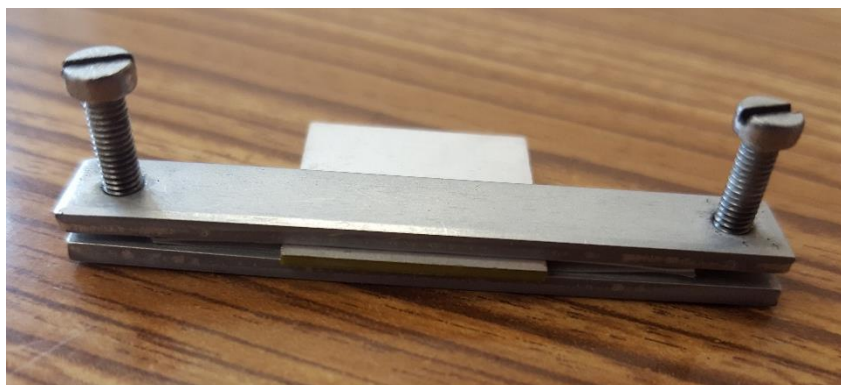
### 23.2.1 Pomůcky

- Brusivo – karbid křemíku (SiC) s hrubostí F400
- Držák na zbrušování
- Nádobka s vodou
- Posuvné měřidlo (šuplera)
- Skleněná destička
- Šroubovák

### 23.2.2 Postup broušení

Nejdříve bylo potřeba uchytit piezoelektrický rezonátor do držáku na zbrušování. Držák byl zevnitř na každé straně opatřen teflonovou páskou, aby se zabránilo prokluzování vzorku během broušení, které by mohlo následně vést ke křivému zbrúšení rezonátoru.

Piezoelektrický rezonátor byl nejprve lehce uchycen do držáku, aby bylo možné s ním hýbat. Poté byl za pomoci posuvného měřidla nastaven přesah rezonátoru v držáku, který byl určen ke zbrúšení. Tímto přesahem byl v našem případě právě 1 mm.



Obrázek 17: Piezoelektrický rezonátor uchycený v držáku na zbrušování s nastaveným přesahem 1 mm (autor, 2018)

Když byla část určená ke zbrúšení nastavena, byly šrouby v držáku dotaženy tak, aby nebylo možné s rezonátorem v držáku pohnout. Při dotahování držáku bylo třeba, aby šrouby na obou stranách držáku byly dotaženy rovnoměrně, jinak by na jedné straně mohlo dojít k posunutí rezonátoru během broušení. Dále bylo nutné dbát na to, aby piezoelektrický rezonátor v držáku nebyl dotažen příliš, jinak by mohlo dojít k popraskání rezonátoru nebo k jeho rozdrčení. Když byl rezonátor napevno uchycen do držáku, byl znovu přeměřen jeho přesah určený ke zbrúšení, aby se ověřilo, že se rezonátor během dotahování držáku nepohnul.

Samotné zbrúšování probíhalo na tabulce skla. Tabulka skla byla zvolena z důvodu jejího rovného a hladkého povrchu bez nerovností.

Jako brusivo bylo použit prášek karbidu křemíku (SiC) s hrubostí F400. Hodnota hrubosti udává, kolik zrn brusiva se vedle sebe vejde do délky 1 mm. V tomto případě se do 1 mm vešlo 400 zrn karbidu křemíku. Střední velikost jednoho zrna byla tedy minimálně 2,5  $\mu\text{m}$ . Brusivo bylo nanášeno na tabulku skla a zakapáno vodou, až vznikla suspenze.

Část destičky v držáku, která byla určena ke zbrúšení, byla následně na vzniklé suspenzi obroušena. Rezonátor v držáku byl při broušení držen kolmo k povrchu skleněné destičky. Obroušování bylo prováděno krouživými pohyby za využití celé plochy skleněné destičky, aby se předešlo vybroušení prohlubně do destičky. Tato prohlubeň by následně mohla způsobit nerovnoměrné zbrúšení rezonátoru.



*Obrázek 18: Tabulka skla s naneseným brusivem (autor, 2018)*

Když byla požadovaná část piezoelektrického rezonátoru zcela obroušena, byl rezonátor vyjmut z držáku. Poté byl opláchnut vodou a očištěn od zbytku brusiva. Po očištění bylo třeba nechat rezonátor oschnout a následně byla znovu naměřena impedanční spektra a jednotlivé rezonanční a antirezonanční frekvence (viz podkapitola: Měření rezonančních a antirezonančních frekvencí).

## 23.3 Výpočet rezonančních a antirezonančních frekvencí pro dané módy kmitu

V tomto posledním úseku praktické části tohoto projektu byly pomocí vzorců analyticky počítány rezonanční a antirezonanční frekvence daných módů kmitů. Pomocí vypočtených výsledků v této části pak bylo možné určit dané módy kmitu v impedančních spektrech získaných v předchozích úsecích praktické části tohoto projektu. Počítány byly nejen základní rezonanční a antirezonanční frekvence, ale také i vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence pro hledané módy kmitu. Počítanými módy kmitu byly podélný mód kmitu  $k_{31}$ , šířkový mód kmitu  $k'_{31}$  a planární mód kmitu  $k_p$ .

Všechny použité vzorce v této části projektu byly převzaty z knihy Piezoelectric Ceramic Resonators.

### 23.3.1 Výpočet rezonančních frekvencí

#### 23.3.1.1 Charakteristiky piezoelektrických rezonátorů

Za neznámé ve vzorcích byly dosazeny hodnoty, z nichž některé se mezi rezonátory lišily, podle tabulky níže.

Tabulka 2: Hodnoty dosazené za neznámé ve vzorcích

Neznámá	NCE51	NCE55
$\eta_r$	$\pi/2 + k \cdot \pi; k \in \mathbb{N}^0$	$\pi/2 + k \cdot \pi; k \in \mathbb{N}^0$
$l$ [mm]	15	20
$w$ [mm]	$\{w \in \mathbb{N}; 3 \leq w \leq 15\}$	$\{w \in \mathbb{N}; 3 \leq w \leq 20\}$
$a$ [mm]	15	20
$\rho$ [kg · m <sup>-3</sup> ]	7850	7980
$\sigma$	0,32	0,3
$s_{11}^E$ [Pa <sup>-1</sup> ]	$16,95 \cdot 10^{-12}$	$15,74 \cdot 10^{-12}$

$\eta_r$  značí vlnová čísla rezonance a antirezonance kmitu. U vlnového čísla rezonance pro námi hledané módy kmitu je známo, že  $\eta_r = \pi/2 + k \cdot \pi; k \in \mathbb{N}^0$ . Pro základní rezonanční frekvence platí, že nastávají při  $\eta_r = \pi/2$ . Pro výpočet vyšších harmonických rezonančních frekvencí byly následně použity další hodnoty z této množiny.

$l$  zastupuje délku piezoelektrického rezonátoru. Délka nebyla během broušení měněna a byla pro všechny výpočty stejná.

$w$  udává šířky piezoelektrického rezonátoru, pro které byl rezonátor měřen a se kterými bylo následně počítáno.

$a$  značí délku strany dosud neobroušeného piezoelektrického rezonátoru s poměrem stran 1 : 1.

$\rho$  udává hustotu piezoelektrické keramiky, ze které byl daný piezoelektrický rezonátor vyroben.

$\sigma$  zde značí Poissonovo číslo pro piezoelektrickou keramiku, ze které byl daný piezoelektrický rezonátor vyroben.

$s_{11}^E$  zastupuje mechanickou poddajnost u piezoelektrické keramiky tvořící piezoelektrický rezonátor.

Za hustotu –  $\rho$ , Poissonovo číslo –  $\sigma$  a mechanickou poddajnost –  $s_{11}^E$  byly dosazeny hodnoty, které byly u daných typů piezoelektrických keramik, které tvoří piezoelektrické rezonátory, naměřeny při předchozích experimentech. Tato data byla pro potřebné výpočty poskytnuta vedoucím práce.

### 23.3.1.2 Vzorce pro výpočty rezonančních frekvencí módů kmitů

#### 23.3.1.2.1 Podélný mód kmitu – $k_{31}$

Základní rovnice pro výpočet podélného módu kmitu  $k_{31}$ :

$$2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\rho \cdot s_{11}^E} = \eta_r$$

Upravením této rovnice vznikne vzorec pro výpočet rezonanční frekvence podélného módu kmitu  $k_{31}$ :

$$f_r = \frac{\eta_r}{2 \cdot \pi \cdot \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\rho \cdot s_{11}^E}}$$

#### 23.3.1.2.2 Šířkový mód kmitu – $k'_{31}$

Základní rovnice pro výpočet šířkového módu kmitu  $k'_{31}$ :

$$2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot \frac{w}{2} \cdot \sqrt{\rho \cdot s_{11}^E \cdot (1 - \sigma^2)} = \eta_r$$

Upravením této rovnice vznikne vzorec pro výpočet rezonanční frekvence šířkového módu kmitu  $k'_{31}$ :

$$f_r = \frac{\eta_r}{2 \cdot \pi \cdot \frac{w}{2} \cdot \sqrt{\rho \cdot s_{11}^E \cdot (1 - \sigma^2)}}$$

#### 23.3.1.2.3 Planární mód kmitu – $k_p$

Základní rovnice pro výpočet planárního módu kmitu  $k_p$ :

$$2 \cdot \pi \cdot f_r \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\rho \cdot s_{11}^E \cdot (1 - \sigma^2)} = \eta_r$$

Upravením této rovnice vznikne vzorec pro výpočet rezonanční frekvence planárního módu kmitu  $k_p$ :

$$f_r = \frac{\eta_r}{2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\rho \cdot s_{11}^E \cdot (1 - \sigma^2)}}$$

### 23.3.2 Výpočet antirezonančních frekvencí

Pro výpočet antirezonančních frekvencí je třeba znát antirezonanční vlnové číslo  $\eta_a$ . Na rozdíl od rezonančního vlnového čísla  $\eta_r$  se antirezonanční vlnové číslo  $\eta_a$  liší v závislosti na typu PZT keramiky, ze které je piezoelektrický rezonátor vyroben, a na daném módu kmitu, přesněji na jeho koeficientu elektromechanické vazby. Antirezonanční vlnové číslo  $\eta_a$  je tedy třeba vypočítat pro každý ze zkoumaných módů kmitů zvlášť.



### 23.3.2.1 Výpočet koeficientu elektromechanické vazby

V matici poskytnuté výrobcem piezoelektrických rezonátorů byl ke každému typu použité PZT keramiky uveden koeficient elektromechanické vazby pro podélný mód kmitu  $k_{31}$  a Poissonovo číslo. Pomocí tohoto koeficientu elektromechanické vazby a Poissonova čísla byly následně dopočítány koeficienty elektromechanických vazeb i pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$  a planární mód kmitu  $k_p$  pro každou z použitých keramik.

Za neznámé ve vzorcích byly na základě matice od výrobce dosazeny tyto hodnoty:

Tabulka 3: Hodnoty dosazené za neznámé ve vzorcích na základě matice od výrobce

	NCE51	NCE55
$k_{31}$	0,38	0,39
$\sigma$	0,32	0,3

$k_{31}$  zde zastupuje koeficient elektromechanické vazby pro podélný mód kmitu  $k_{31}$ , který výrobce udává pro danou PZT keramiku.

Písmeno  $\sigma$  udává Poissonovo pro danou PZT keramiku.

#### 23.3.2.1.1 Koeficient elektromechanické vazby $k'_{31}$

Pro výpočet koeficientu elektromechanické vazby pro šířkový mód  $k'_{31}$  byl použit vzorec:

$$k'_{31} = \sqrt{\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cdot \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}}$$

#### 23.3.2.1.2 Koeficient elektromechanické vazby $k_p$

Koeficient elektromechanické vazby planárního módu kmitu  $k_p$  byl vypočítán pomocí vzorce:

$$k_p = \sqrt{k_{31}^2 \cdot \frac{2}{1 - \sigma}}$$

#### 23.3.2.1.3 Výsledky koeficientů elektromechanických vazeb

Tabulka 4: Výsledky koeficientů elektromechanických vazeb

	NCE51	NCE55
$k_{31}$	0,38	0,39
$k'_{31}$	0,57	0,58
$k_p$	0,65	0,66

### 23.3.2.2 Výpočet antirezonančního vlnového čísla $\eta_a$

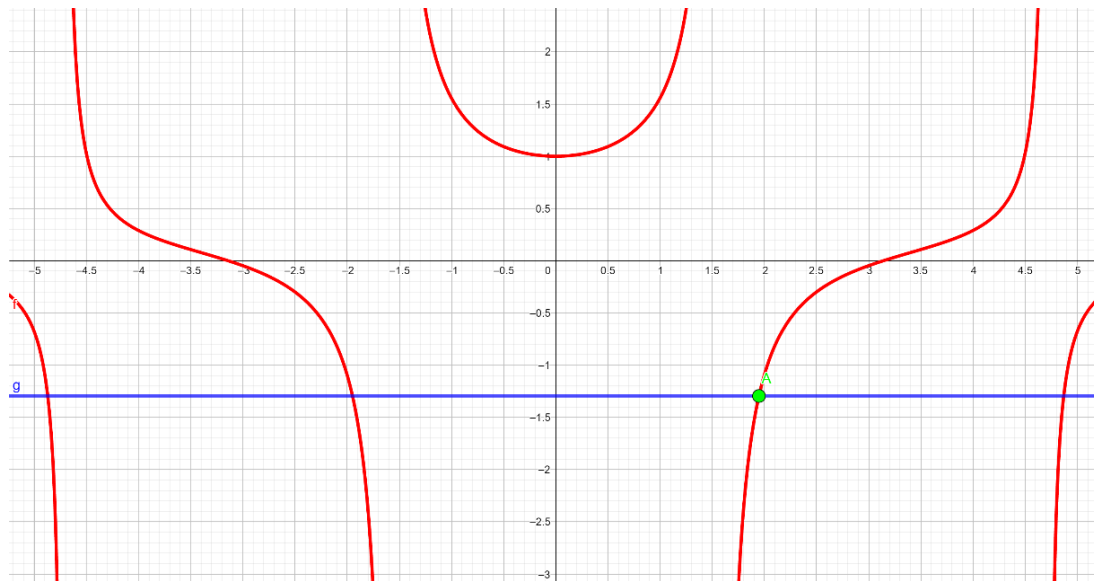
Když byly dopočítány potřebné koeficienty elektromechanické vazby, mohla být s jejich pomocí určena vlnová čísla  $\eta_a$  pro každý ze zkoumaných módů kmitů. K určení požadovaných vlnových čísel byly použity rovnice (viz dále), jejichž řešením je antirezonanční vlnové číslo  $\eta_a$ .

Tyto rovnice lze zapsat v obecném tvaru:

$$\frac{\tan \eta_a}{\eta_a} = \frac{k_n^2 - 1}{k_n^2}$$

$k_n$  zde zastupuje některý z koeficientů elektromechanické vazby  $k_{31}$ ,  $k'_{31}$  nebo  $k_p$ .

Tyto rovnice však není možné řešit numericky. K řešení těchto rovnic byl použit počítačový program Geogebra, který slouží k rýsování. Tyto rovnice v něm byly řešeny graficky jako průnik dvou funkcí. První funkce zastupovala levou část rovnice a druhá funkce zastupovala pravou část rovnice. Antirezonanční vlnové číslo  $\eta_a$  základní antirezonanční frekvence je pak rovno x-ové souřadnici prvního průsečíku těchto funkcí na kladné části osy x (viz: obrázek 19). Pro výpočet vyšších harmonických antirezonančních frekvencí daného módu kmitu je možné



Obrázek 19: Grafické řešení rovnice pro určení antirezonančního vlnového čísla  $\eta_a$  pomocí programu Geogebra (autor, 2018)

Červená funkce:  $\frac{\tan \eta_a}{\eta_a}$

Fialová funkce:  $\frac{k_n^2 - 1}{k_n^2}$

Zelený bod: průnik funkcí; x-ová souřadnice je rovna antirezonančnímu vlnovému číslu  $\eta_a$

použít následující průsečíky těchto dvou funkcí, které leží v kladném směru osy x.

Další možností řešení těchto rovnic je použití počítačový program k řešení rovnic (například Mathematica).

### 23.3.2.2.1 Podélný mód kmitu $k_{31}$

Antirezonanční vlnové číslo  $\eta_a$  pro podélný mód kmitu  $k_{31}$  je řešením rovnice:

$$\frac{\tan \eta_a}{\eta_a} = \frac{k_{31}^2 - 1}{k_{31}^2}$$

### 23.3.2.2.2 Šířkový mód kmitu $k'_{31}$

Antirezonanční vlnové číslo  $\eta_a$  pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$  je řešením rovnice:

$$\frac{\tan \eta_a}{\eta_a} = \frac{k'_{31}{}^2 - 1}{k'_{31}{}^2}$$

### 23.3.2.2.3 Planární mód kmitu $k_p$

Antirezonanční vlnové číslo  $\eta_a$  pro planární mód kmitu  $k_p$  je řešením rovnice:

$$\frac{\tan \eta_a}{\eta_a} = \frac{k_p^2 - 1}{k_p^2}$$

### 23.3.2.2.4 Výsledky základních antirezonančních vlnových čísel $\eta_a$

Tabulka 5: Výsledky základních antirezonančních vlnových čísel  $\eta_a$

	$\eta_a$ (NCE51)	$\eta_a$ (NCE55)
Podélný mód kmitu $k_{31}$	1,67143	1,67734
Šířkový mód kmitu $k'_{31}$	1,82820	1,83968
Planární mód kmitu $k_p$	1,93267	1,94802

### 23.3.2.2.5 Výsledky antirezonančních vlnových čísel $\eta_a$ pro vyšší harmonické rezonance

Tabulka 6: Výsledky antirezonančních vlnových čísel  $\eta_a$  pro vyšší harmonické frekvence

	$\eta_a$ (NCE51)	$\eta_a$ (NCE55)
Podélný mód kmitu $k_{31}$	4,74792	4,75014
Šířkový mód kmitu $k'_{31}$	4,81207	4,81724
Planární mód kmitu $k_p$	4,86175	4,86957

### 23.3.2.3 Vzorce pro výpočty antirezonančních frekvencí módů kmitů

Antirezonanční frekvence módů kmitů je možné vypočítat pomocí vzorců, které slouží k výpočtu rezonance (viz: Metodika: Vzorce pro výpočty módů kmitů). Místo rezonančního vlnového čísla  $\eta_r$  se však dosadí antirezonanční vlnové číslo  $\eta_a$ .

Další možností, jak vypočítat antirezonanční frekvence pro daný mód kmitu, je využít vztah, který je popsán v rovnici:

$$\frac{\eta_a}{\eta_r} = \frac{f_a}{f_r}$$

Upravením této rovnice lze získat vzorec pro výpočet antirezonanční frekvence k dané rezonanční frekvenci:

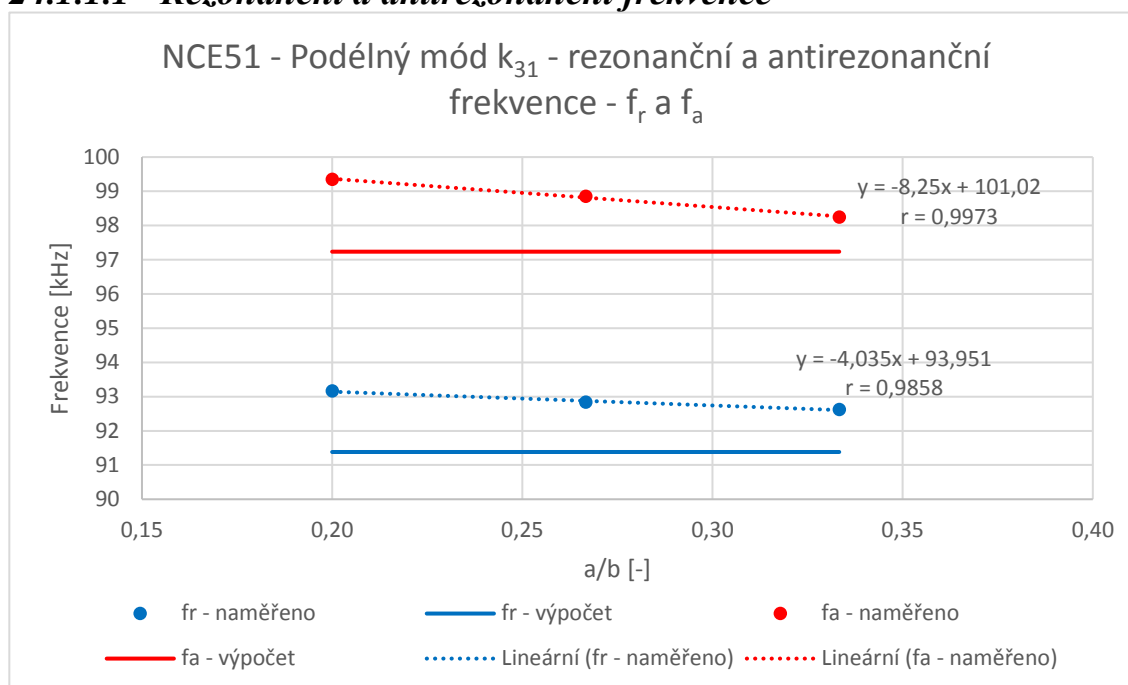
$$f_a = \frac{\eta_a}{\eta_r} \cdot f_r$$

## 24 Výsledky

### 24.1 Rezonátor NCE51

#### 24.1.1 Podélný mód kmitu $k_{31}$

##### 24.1.1.1 Rezonanční a antirezonanční frekvence



Graf 3: NCE51 - Podélný mód  $k_{31}$  - rezonanční a antirezonanční frekvence -  $f_r$  a  $f_a$

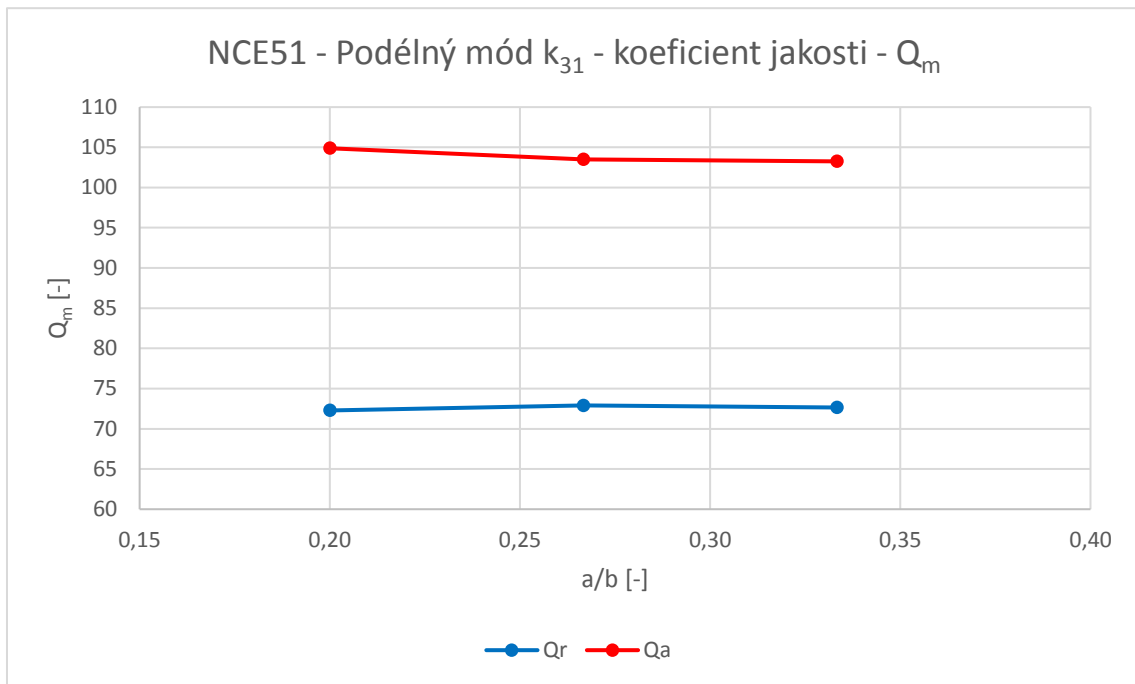
Na tomto grafu je možné porovnat naměřené a vypočtené hodnoty pro podélný mód kmitu  $k_{31}$ , který se u piezoelektrického rezonátoru NCE51 vyskytoval pro rozměry strany  $a = 3 - 5$  mm.

Z grafu je patrné, že naměřené rezonanční i antirezonanční frekvence jsou vyšší, než ukazují analytické výpočty pomocí vzorců. V grafu si lze také povšimnout, že naměřené frekvence jsou ovlivněny snižujícím se rozměrem strany  $a$ , zatímco podle výpočtů by měly být konstantní.

Naměřené antirezonanční frekvence také vykazují o trochu lepší korelaci než rezonanční frekvence. Korelace naměřených rezonančních i antirezonančních frekvencí lze však považovat za velmi dobré.

Za překvapivé lze považovat, že naměřené rezonanční i antirezonanční frekvence vzrůstají se snižujícím se rozměrem strany  $a$ , místo aby se přibližovaly vypočteným hodnotám pro tyčinku s poměrem stran  $a \ll b$ .

### 24.1.1.2 Koeficient mechanické jakosti



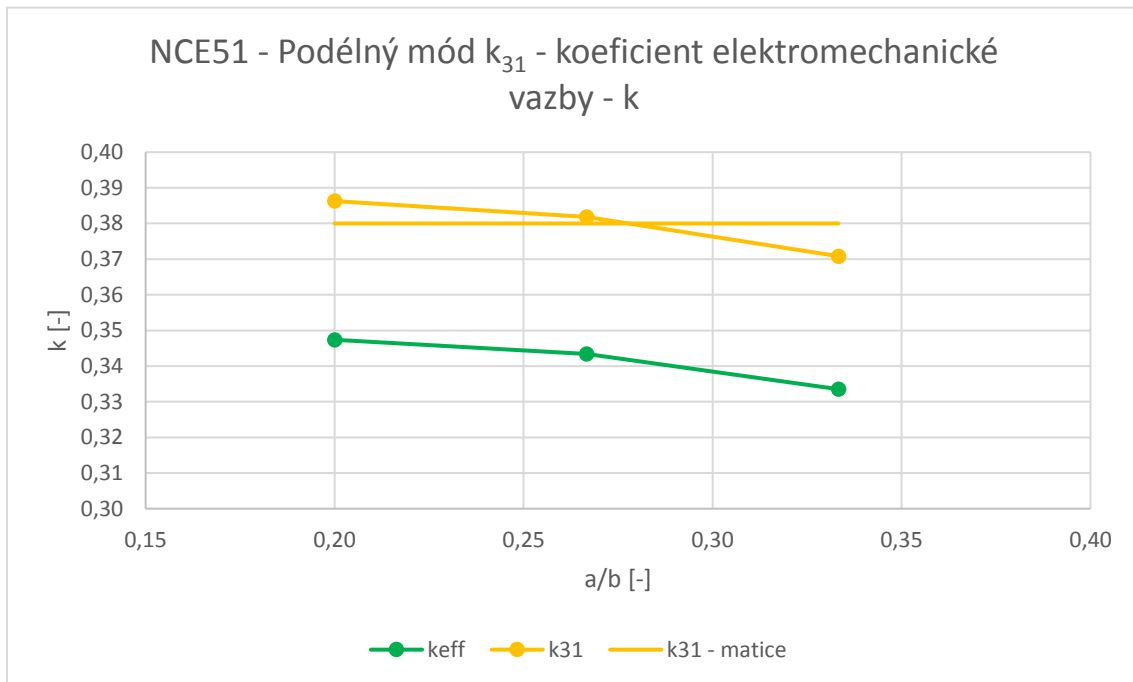
Graf 4: NCE51 - Podélný mód  $k_{31}$  – koeficient mechanické jakosti –  $Q_m$

Graf 4 porovnává hodnoty koeficientů jakosti  $Q_r$  a  $Q_a$  pro piezoelektrický rezonátor NCE51 při podélném módu kmitu  $k_{31}$ .

Z grafu je patrné, že tento rezonátor má poměrně nízký koeficient jakosti. Naměřené hodnoty  $Q_a$  jsou podstatně vyšší než naměřené hodnoty  $Q_r$ .

Dále si lze povšimnout, že koeficienty jakosti  $Q_r$  a  $Q_a$  si udržují poměrně konstantní hodnoty se změnou rozměrů rezonátoru.

### 24.1.1.3 Koeficient elektromechanické vazby



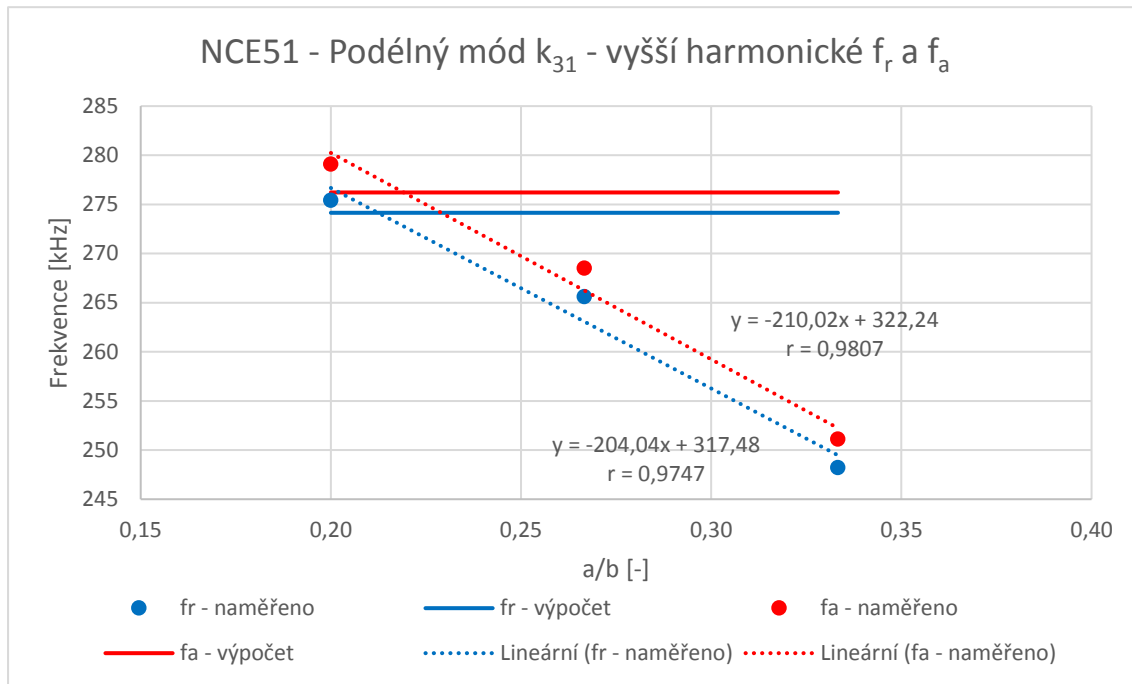
Graf 5: NCE51 - Podélný mód  $k_{31}$  - koeficient elektromechanické vazby -  $k$

Na tomto grafu je možné porovnat hodnoty vypočtených koeficientů elektromechanické vazby  $k_{eff}$  a  $k_{31}$  a jejich porovnání s hodnotou, kterou udává matice  $k$  danému typu PZT keramiky od výrobce.

V grafu si lze povšimnout, že zatímco hodnota  $k_{31}$  udávaná maticí je konstantní pro všechny rozměry, kde se podélný mód kmitu  $k_{31}$  vyskytuje, hodnoty  $k_{eff}$  i  $k_{31}$  s rostoucím rozměrem strany  $a$  klesají. Vypočtená hodnota koeficientu  $k_{31}$  však dosahuje podobných výsledků, jako udává matice.

Hodnota  $k_{eff}$  je pro tento mód kmitu průměrně menší o 10 % než hodnota  $k_{31}$ .

### 24.1.1.4 Vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence



Graf 6: NCE51 - Podélný mód  $k_{31}$  - vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence -  $f_r$  a  $f_a$

Graf 6 zobrazuje naměřené a vypočtené vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence pro podélný mód kmitu  $k_{31}$ .

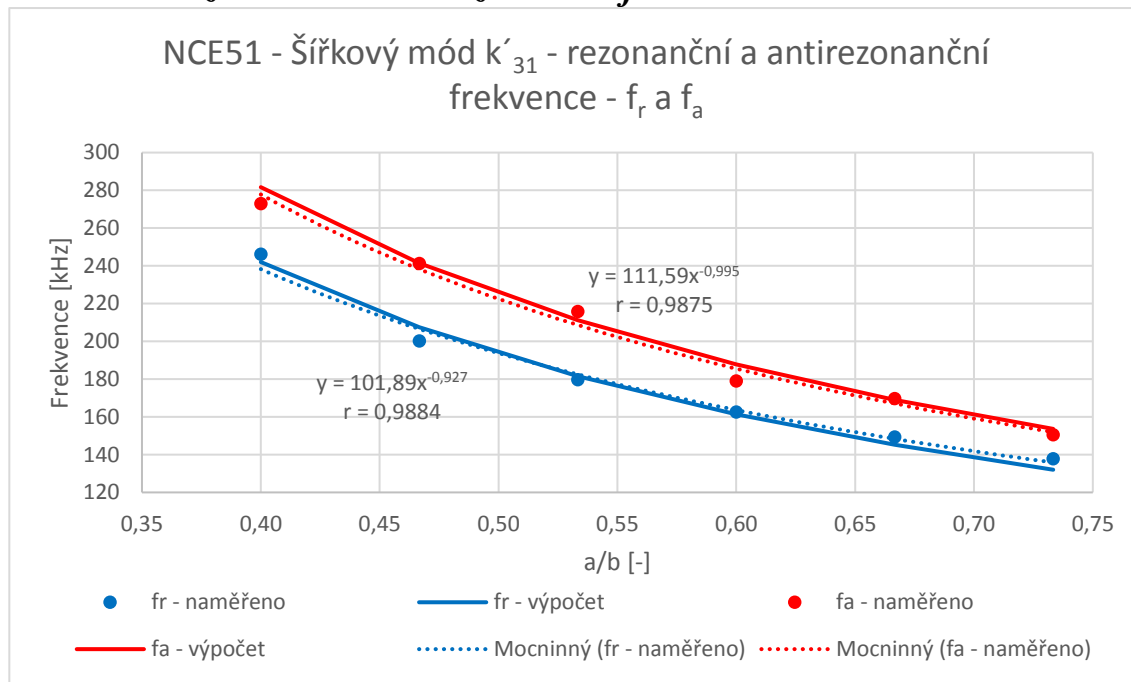
V grafu si lze povšimnout, že naměřené frekvence, stejně jako u základních frekvencí, rostou se snižujícím se rozměrem strany  $a$ , zatímco podle výpočtů by měly být konstantní. V porovnání se základními frekvencemi klesají tyto frekvence podstatně rychleji.

Oproti základním rezonančním a antirezonančním frekvencím tohoto módu kmitu také došlo k vzájemnému přiblížení těchto frekvencí.

I tyto rezonanční a antirezonanční frekvence dosahují velmi dobré korelace.

## 24.1.2 Šířkový mód kmitu $k'_{31}$

### 24.1.2.1 Rezonanční a antirezonanční frekvence



Graf 7: NCE51 - Šířkový mód  $k'_{31}$  - rezonanční a antirezonanční frekvence -  $f_r$  a  $f_a$

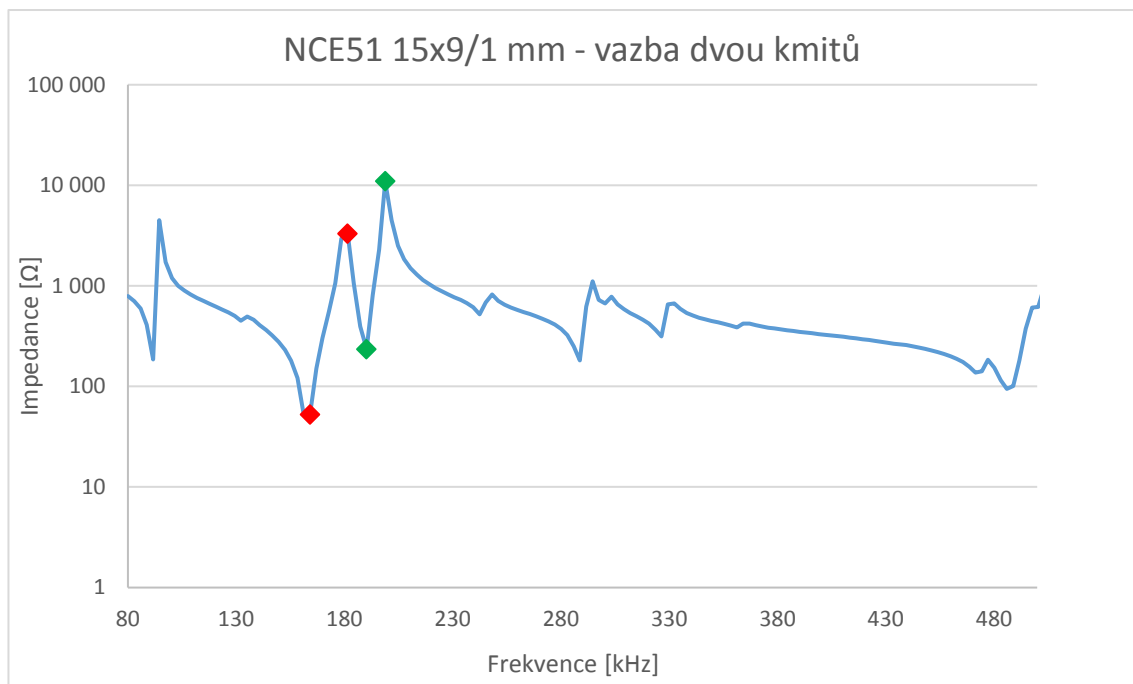
Graf 7 zobrazuje naměřené a vypočtené hodnoty rezonančních a antirezonančních frekvencí pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$ , který se u piezoelektrického rezonátoru NCE51 vyskytoval pro rozměry strany  $a = 6 - 11$  mm.

Z grafu je patrné, že naměřené rezonanční i antirezonanční frekvence přibližně kopírují údaje získané z teoretických výpočtů pomocí vzorců.

Je však možné si povšimnout, že se naměřené hodnoty pro některé poměry stran místy odchýlí trochu více. Toto odchýlení může být způsobeno tím, že se v impedančním spektru nacházely rezonanční a antirezonanční frekvence dvou různých módů kmitů těsně vedle sebe, případně se i zcela překrývaly a dochází tak k vazbě dvou kmitů (viz graf 8). Z měření se ukázalo, že vazba dvou kmitů se u rezonátoru NCE51 vyskytuje pro poměry stran  $a/b = 0,53$  a  $0,6$ .

Korelace naměřených rezonančních i antirezonančních frekvencí lze považovat za velmi dobré.



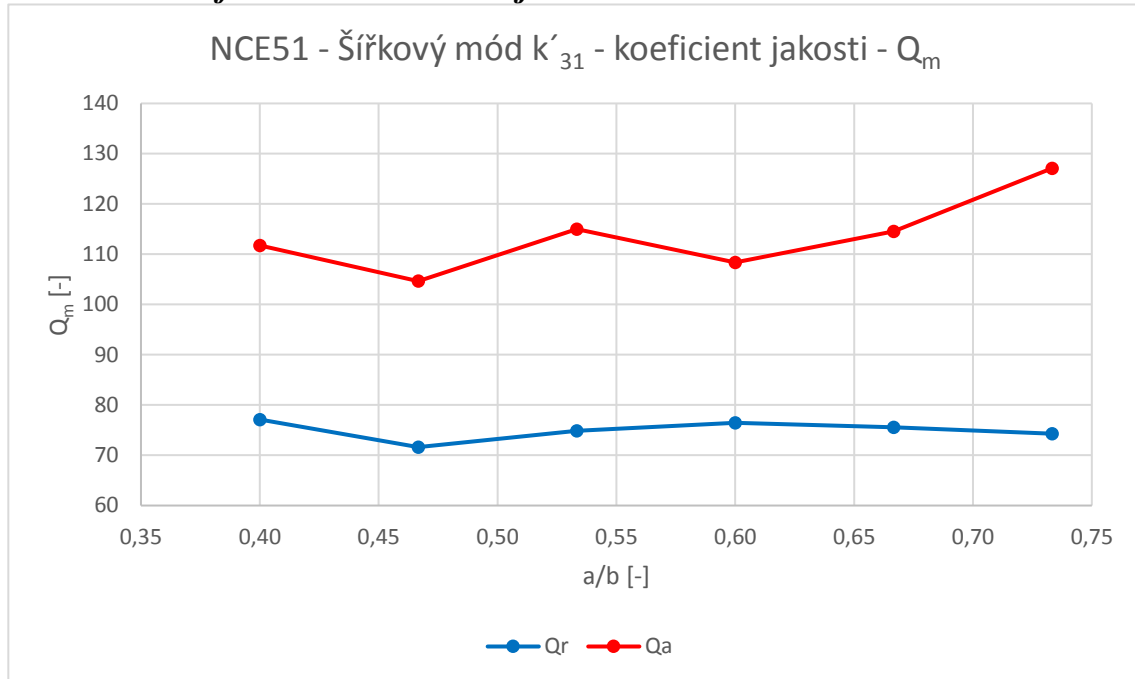


Graf 8: NCE51 - vazba dvou kmitů u šířkového módu kmitu  $k'_{31}$  při  $a/b = 0,6$

Červené body – rezonance a antirezonance šířkového módu kmitu  $k'_{31}$

Zelené body – rezonance a antirezonance jiného nedefinovaného módu kmitu

### 24.1.2.2 Koeficient mechanické jakosti



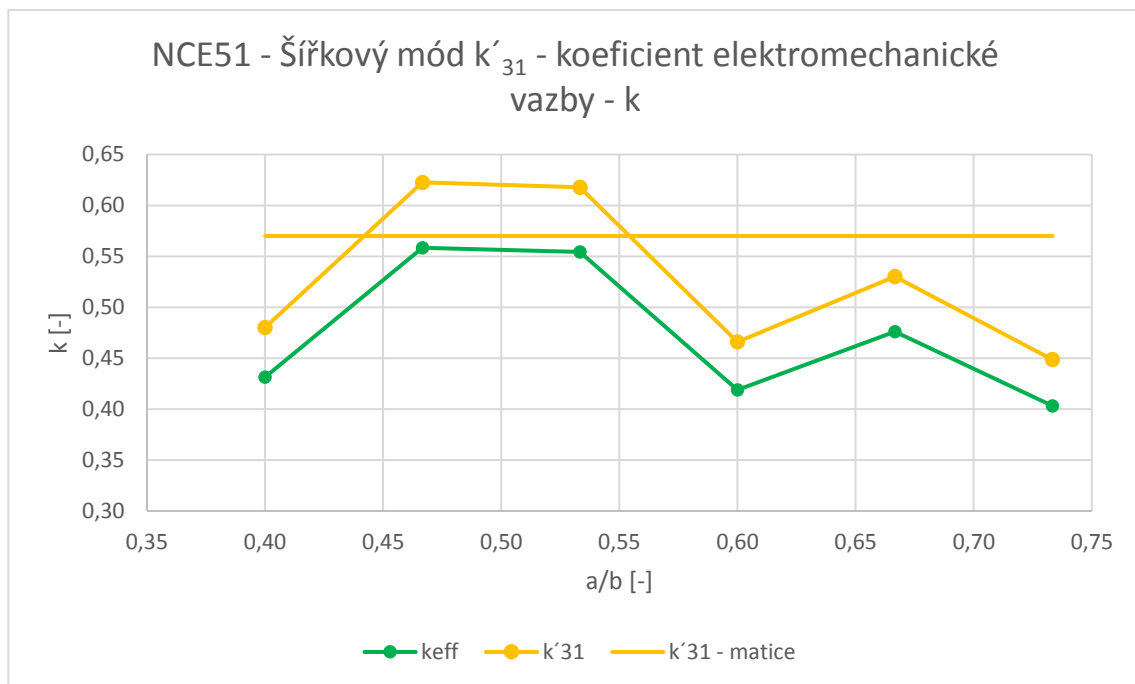
Graf 9: NCE51 - Šířkový mód  $k'_{31}$  – koeficient mechanické jakosti –  $Q_m$

Graf 9 zobrazuje hodnoty koeficientů jakosti  $Q_r$  a  $Q_a$  piezoelektrického rezonátoru NCE51 pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$ .

Hodnoty  $Q_r$  i  $Q_a$  se zde oproti podélnému módu kmitu  $k_{31}$  mírně zvýšily. Stále také platí, že koeficient jakosti  $Q_a$  je podstatně vyšší než koeficient jakosti  $Q_r$ .

Dále si lze povšimnout, že zatímco koeficient jakosti  $Q_r$  je pro tento mód kmitu přibližně konstantní, koeficient jakosti  $Q_a$  má spíše tendenci mírně stoupat.

### 24.1.2.3 Koeficient elektromechanické vazby



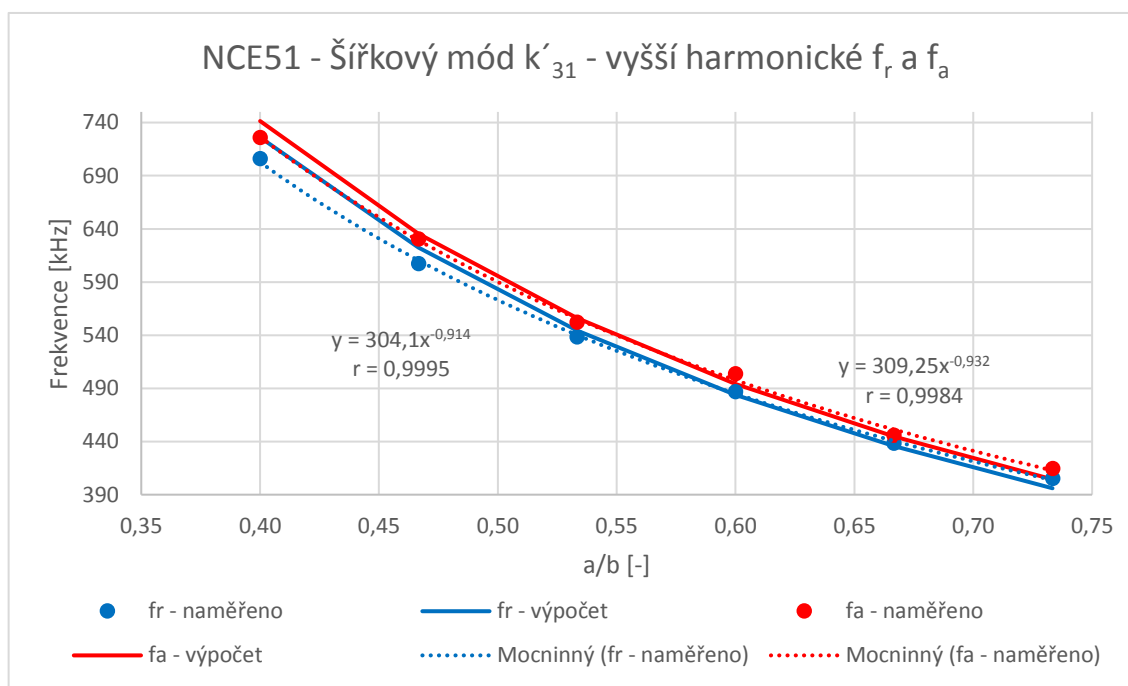
Graf 10: NCE51 - Šířkový mód  $k'_{31}$  - koeficient elektromechanické vazby -  $k$

Tento graf zobrazuje hodnoty vypočtených koeficientů elektromechanické vazby  $k_{eff}$  a  $k'_{31}$  na základě měření pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$  a jejich porovnání s hodnotou, která byla vypočtena na základě údajů z matice  $k$  danému typu PZT keramiky poskytnuté výrobcem.

V grafu si lze povšimnout, že hodnota  $k'_{31}$  vypočtená pomocí matice je znovu konstantní pro všechny rozměry, kde se podélný mód kmitu  $k'_{31}$  vyskytuje. Koeficienty elektromechanické vazby  $k_{eff}$  a  $k'_{31}$  jsou pro tento mód kmitu velmi proměnlivé. Nejvyšších hodnot dosahují při rozměrech strany  $a = 7; 8$  mm, kdy dosahují dokonce vyšších hodnot, než je hodnota vypočtená podle matice. Pro ostatní rozměry jsou naměřené koeficienty nižší než podle výpočtů na základě matice.

Hodnota  $k_{eff}$  je pro tento mód kmitu průměrně menší o 10 % než hodnota  $k'_{31}$ .

### 24.1.2.4 Vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence



Graf 11: NCE51 – Šířkový mód  $k'_{31}$  – vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence –  $f_r$  a  $f_a$

Tento graf porovnává naměřené a vypočtené vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$ .

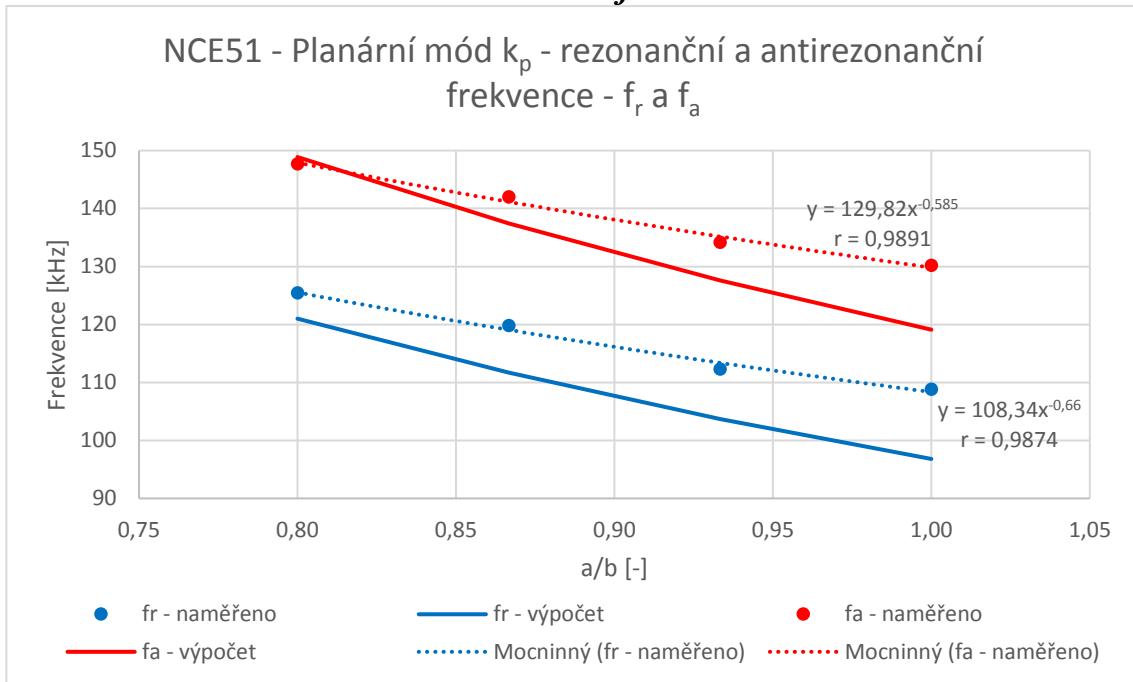
V grafu je možné pozorovat, že naměřené hodnoty odpovídají vypočteným hodnotám rezonančních a antirezonančních frekvencí. Oproti základním frekvencím došlo k podstatnému snížení rozestupu mezi rezonančními a antirezonančními frekvencemi a u vyšších poměrů stran  $a/b$  je tento rozstup téměř minimální.

U těchto frekvencí nedochází k žádným vazbám kmitů na rozdíl od základních rezonančních a antirezonančních frekvencích.

Korelace těchto naměřených frekvencí je opět velmi dobrá.

### 24.1.3 Planární mód kmitu $k_p$

#### 24.1.3.1 Rezonanční a antirezonanční frekvence



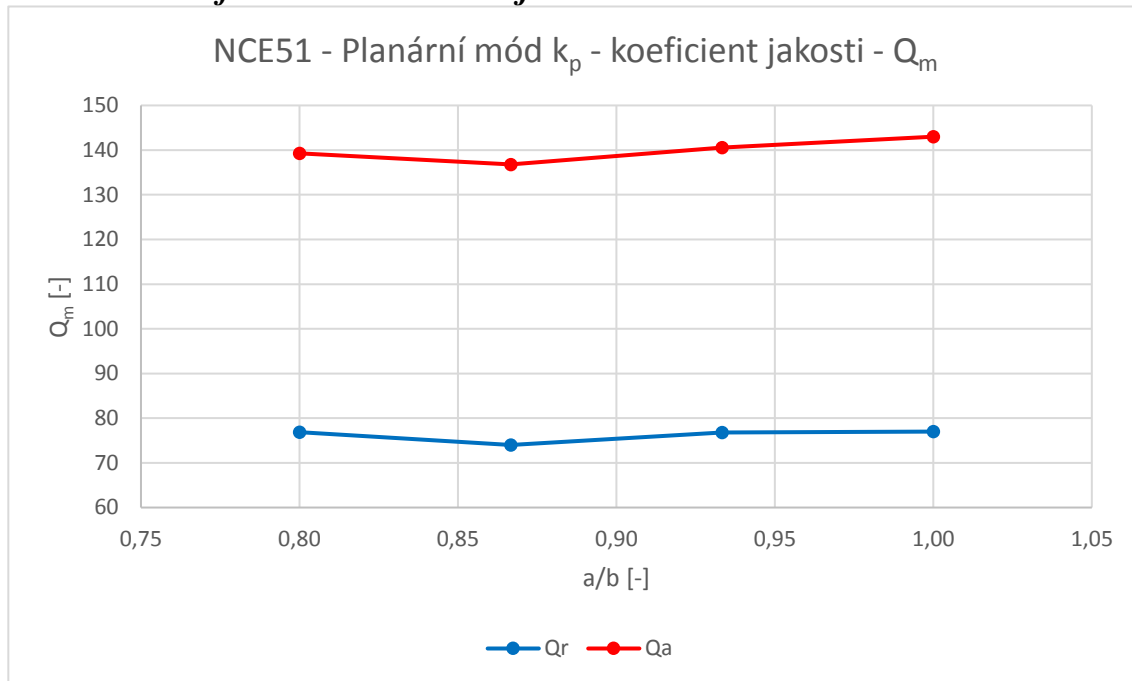
Graf 12: NCE51 - Planární mód  $k_p$  - rezonanční a antirezonanční frekvence -  $f_r$  a  $f_a$

Graf 12 zobrazuje naměřené a vypočtené hodnoty rezonančních a antirezonančních frekvencí pro planární mód kmitu  $k_p$ , který se u piezoelektrického rezonátoru NCE51 vyskytoval pro rozměry strany  $a = 12 - 15$  mm.

V grafu si lze povšimnout, že rezonanční i antirezonanční frekvence se zvyšujícím se rozměrem klesají. Naměřené hodnoty však neklesají tak strmě, jak ukazují výsledky získané ze vzorců. Vzájemný rozestup mezi rezonančními a antirezonančními frekvencemi zůstává přibližně stejný.

Korelace naměřených rezonančních i antirezonančních frekvencí jsou téměř stejné a lze je považovat za velmi dobré.

### 24.1.3.2 Koeficient mechanické jakosti



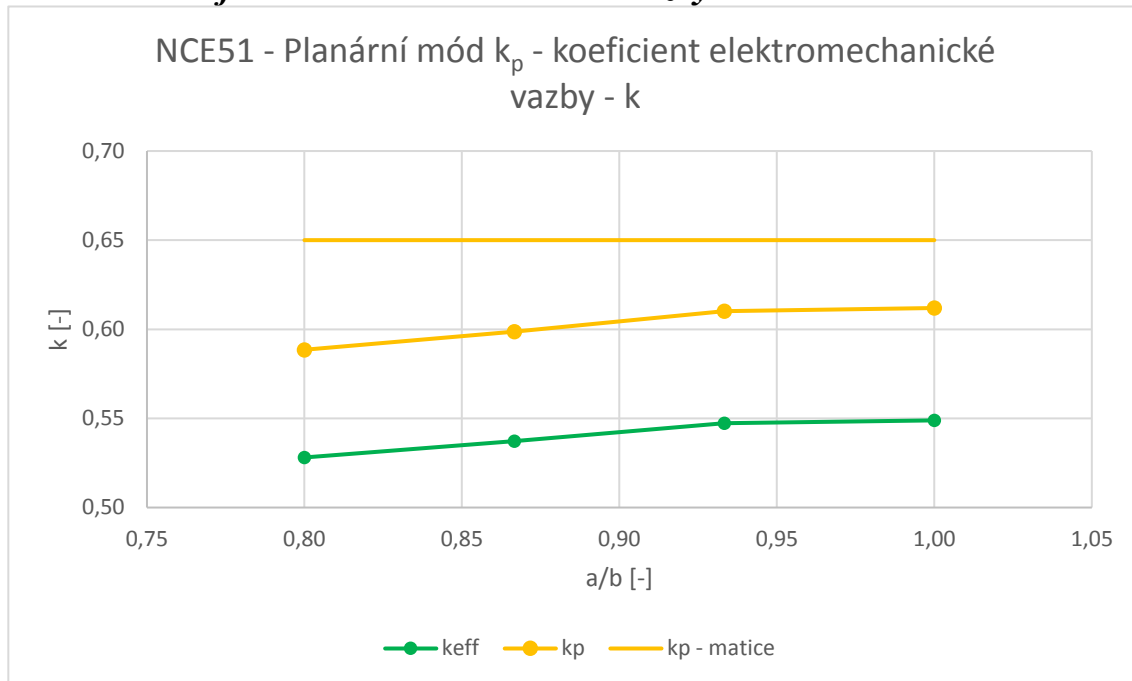
Graf 13: NCE51 - Planární mód  $k_p$  – koeficient mechanické jakosti –  $Q_m$

Na tomto grafu je možné spatřit hodnoty koeficientů jakosti  $Q_r$  a  $Q_a$  piezoelektrického rezonátoru NCE51 pro planární mód kmitu  $k_p$ .

Hodnoty  $Q_r$  i  $Q_a$  se zde oproti podélnému a šířkovému módu kmitu  $k_{31}$  a  $k'_{31}$  zvýšily. Stejně jako u předchozích módů kmitů i zde platí, že koeficient jakosti  $Q_a$  je podstatně vyšší než koeficient jakosti  $Q_r$ .

Stejně jako u šířkového módu kmitu  $k'_{31}$  si lze povšimnout, že zatímco koeficient jakosti  $Q_r$  je pro tento mód kmitu víceméně konstantní, koeficient jakosti  $Q_a$  má sklon mírně stoupat.

### 24.1.3.3 Koeficient elektromechanické vazby



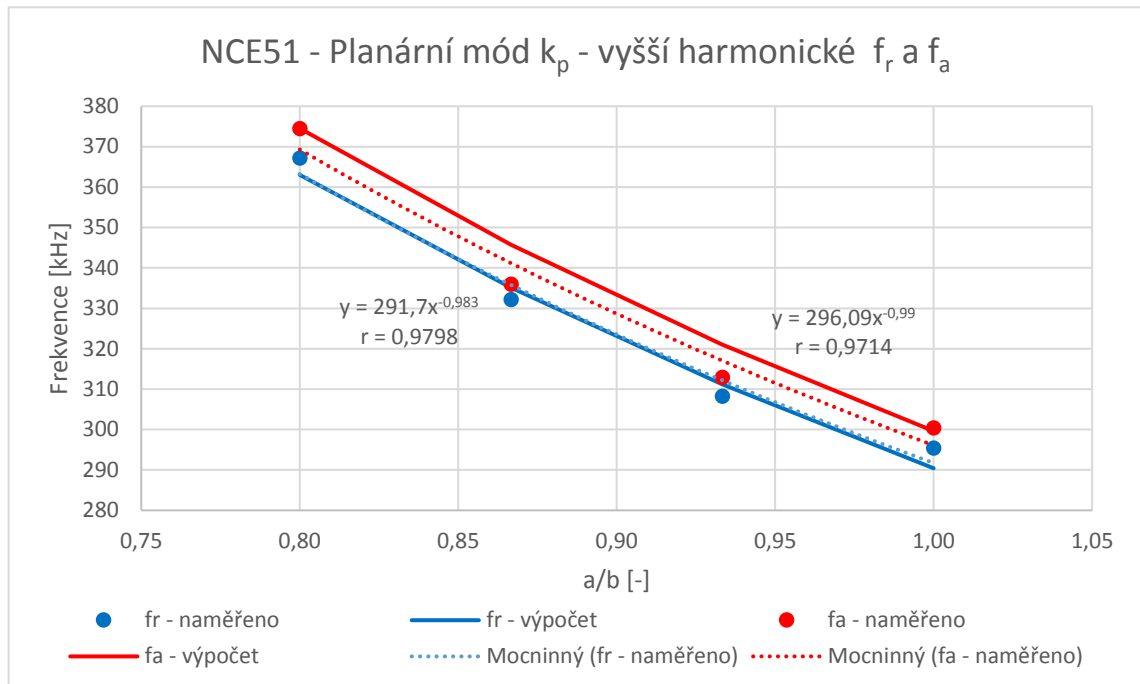
Graf 14: NCE51 - Planární mód  $k_p$  - koeficient elektromechanické vazby -  $k$

Graf 14 zobrazuje hodnoty vypočtených koeficientů elektromechanické vazby  $k_{eff}$  a  $k_p$  na základě měření pro planární mód kmitu  $k_p$ . Tyto koeficienty jsou zde také porovnány s hodnotou, která byla vypočtena na základě údajů z matice od výrobce k danému typu PZT keramiky.

V grafu si lze povšimnout, že hodnota  $k_p$  vypočtená pomocí matice je, stejně jako u ostatních módů kmitu, opět konstantní pro všechny rozměry, kde se podélný mód kmitu  $k_p$  vyskytuje. Navzdory tomu koeficienty elektromechanické vazby  $k_{eff}$  i  $k_p$  s přibývajícím rozměrem strany  $a$  stoupají. Hodnoty koeficientu  $k_p$  vypočtené na základě měření jsou také nižší, než kolik udává výpočet na základě matice.

Hodnota  $k_{eff}$  je pro tento mód kmitu průměrně menší o 10 % než hodnota  $k_p$ .

### 24.1.3.4 Vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence



Graf 15: NCE51 – Planární mód  $k_p$  – vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence –  $f_r$  a  $f_a$

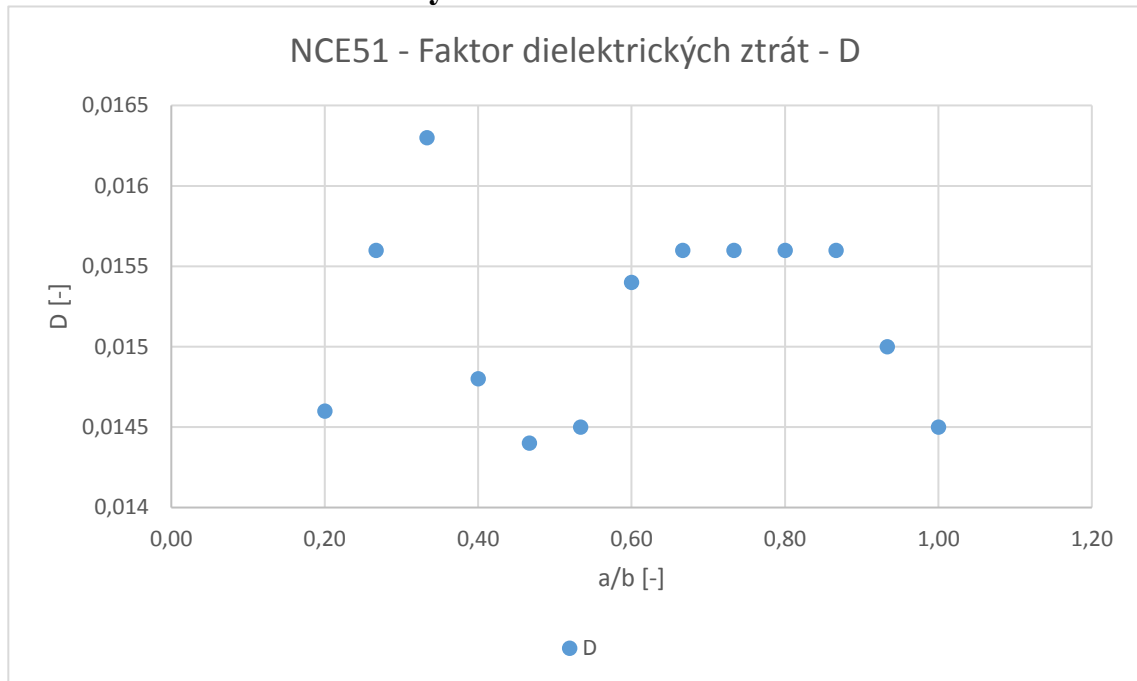
Do tohoto grafu jsou zaneseny naměřené a vypočtené vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence planárního módu kmitu  $k_p$ .

Naměřené hodnoty rezonančních a antirezonančních frekvencí opět přibližně odpovídají výpočtům. I u tohoto módu kmitu platí, že se oproti základním frekvencím tyto rezonanční a antirezonanční frekvence přiblížily. Tyto frekvence také klesají s rostoucím poměrem stran  $a/b$  podstatně rychleji oproti základním frekvencím.

Korelace těchto naměřených frekvencí lze označit za velmi dobré.



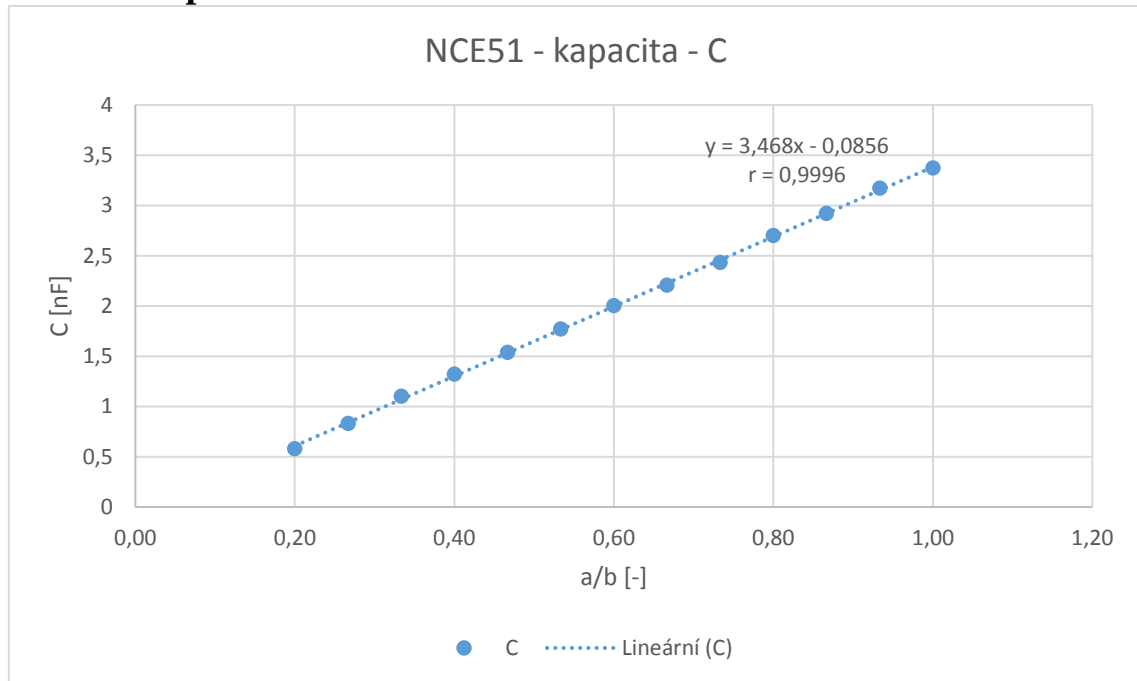
#### 24.1.4 Faktor dielektrických ztrát



Graf 16: NCE51 - Faktor dielektrických ztrát - D

Faktor dielektrických ztrát u piezoelektrického rezonátoru NCE51 byl pro zkoumané rozměry málo proměnlivý. Nelze zde proto ani určit, zda má vzestupnou, či klesající tendenci. Rozdíl mezi maximální a minimální naměřenou hodnotou byl velmi malý, a to jen 0,0019. To značí, že maximální změna velikosti úhlu  $\delta$ , který svírá velikost impedance a kapacitance byla o  $0^{\circ}6'31,9''$ . Na základě tohoto měření lze říci, že se uvnitř rezonátoru nenacházela žádná prasklina, která by ovlivnila jeho vlastnosti.

## 24.1.5 Kapacita



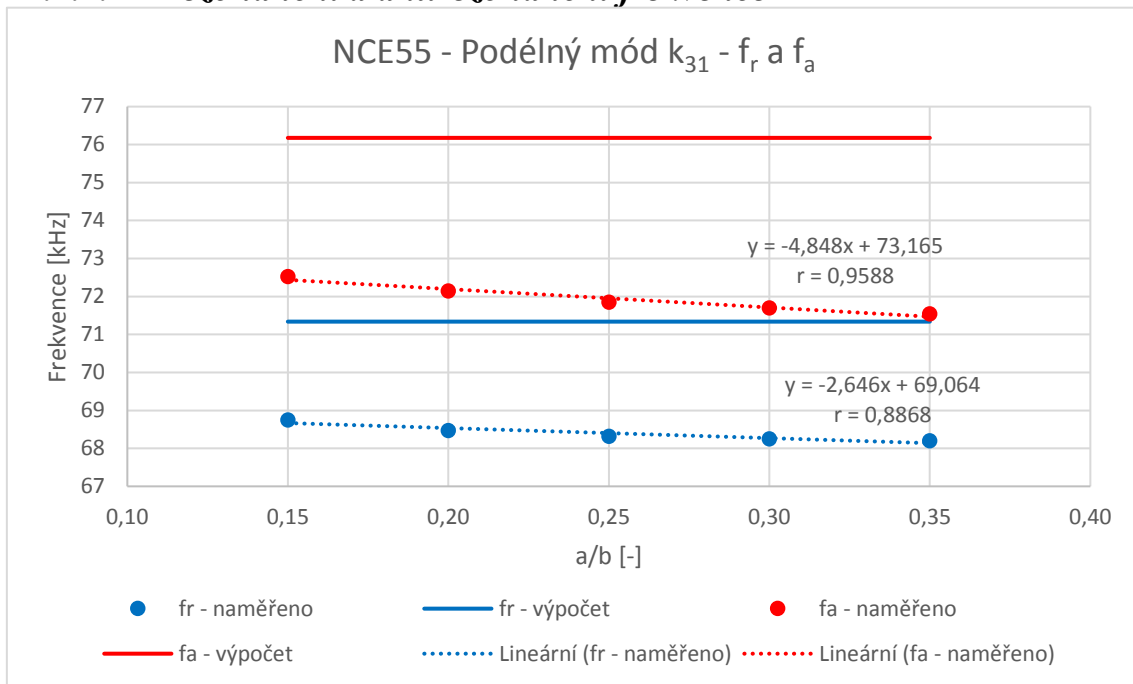
Graf 17: NCE51 - kapacita – C

Na tomto grafu je možné pozorovat, že kapacita u rezonátoru NCE51 lineárně stoupala, a to v závislosti na zvyšujícím se plošném rozměru rezonátoru. Toto tvrzení potvrzuje i korelace naměřených hodnot, jejíž hodnota byla 0,9996. Lze tedy říci, že použitá PZT keramika u piezoelektrického rezonátoru NCE55 byla homogenní a že při broušení nedošlo k žádné větší odchylce. Celkový rozdíl kapacit mezi největším a nejmenším rozměrem byl 2,79 nF.

## 24.2 Rezonátor NCE55

### 24.2.1 Podélný mód kmitu $k_{31}$

#### 24.2.1.1 Rezonanční a antirezonanční frekvence



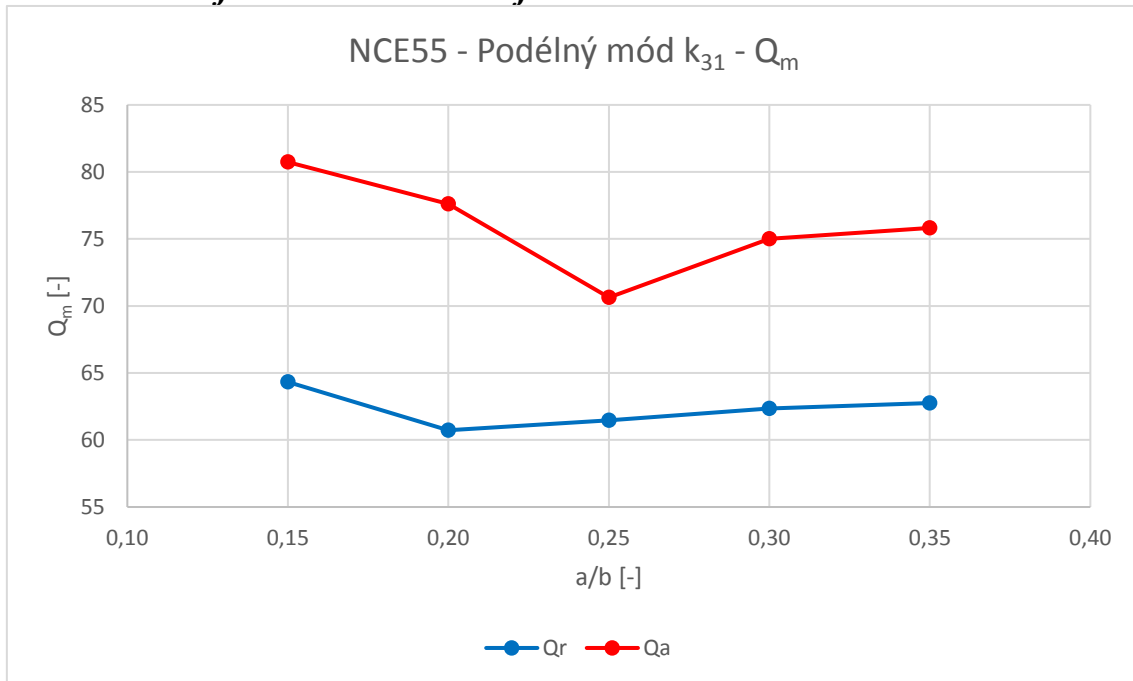
Graf 18: NCE55 - Podélný mód  $k_{31}$  - rezonanční a antirezonanční frekvence –  $f_r$  a  $f_a$

Na tomto grafu je možné porovnat naměřené a vypočtené hodnoty pro podélný mód kmitu  $k_{31}$  piezoelektrického rezonátoru NCE55. Tento mód se zde vyskytoval při rozměrech strany  $a = 3 - 7$  mm.

Z grafu lze vypořadovat, že naměřené rezonanční i antirezonanční frekvence jsou nižší, než ukazují analytické výpočty pomocí vzorců. Naměřené frekvence jsou ovlivněny snižujícím se rozměrem strany  $a$ , zatímco podle výpočtů by měly být konstantní. Naměřené rezonanční i antirezonanční frekvence se lineárně snižují s rozměrem strany  $a$  a přibližují se tak analyticky vypočteným hodnotám pro úzkou tyčinku.

Naměřené antirezonanční frekvence také vykazují podstatně lepší korelaci než rezonanční frekvence.

### 24.2.1.2 Koeficient mechanické jakosti



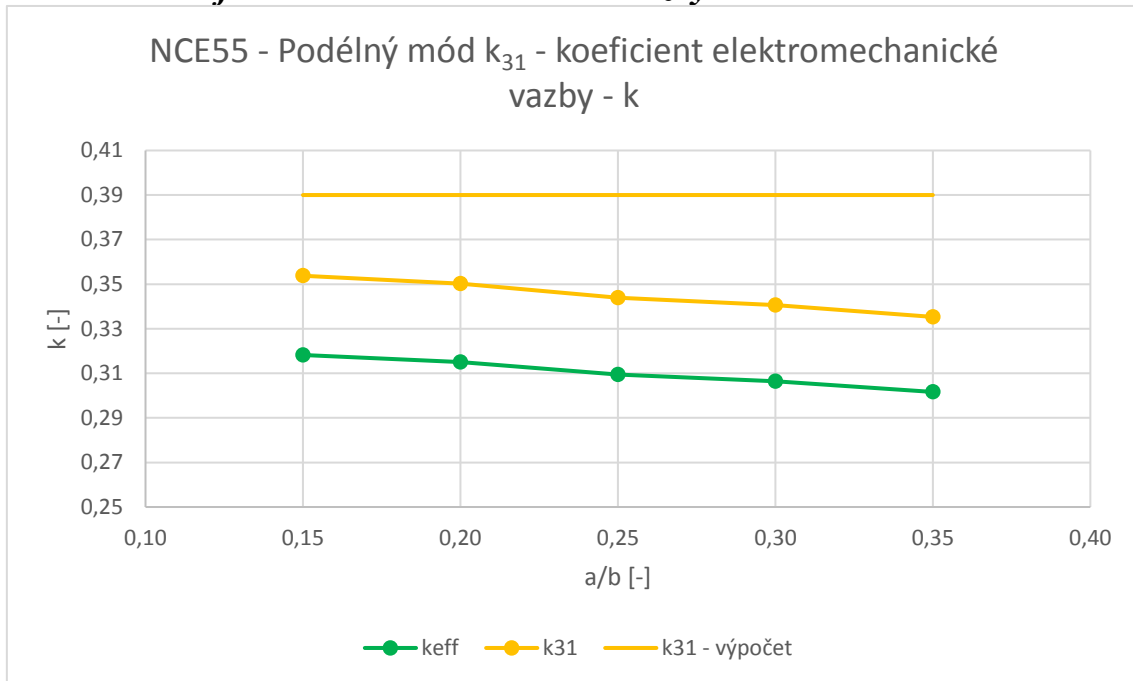
Graf 19: NCE55 – Podélný mód  $k_{31}$  – koeficient mechanické jakosti –  $Q_m$

Graf 19 porovnává hodnoty koeficientů jakosti  $Q_r$  a  $Q_a$  pro piezoelektrický rezonátor NCE55 při podélném módu kmitu  $k_{31}$ .

Na základě naměřených hodnot lze říci, že tento rezonátor má nižší koeficient jakosti než piezoelektrický rezonátor NCE51. Naměřené hodnoty  $Q_a$  jsou vyšší než naměřené hodnoty  $Q_r$ .

Dále si lze povšimnout, že koeficient jakosti  $Q_r$  si udržuje poměrně konstantní hodnoty, zatímco  $Q_a$  má tendenci mírně klesat.

### 24.2.1.3 Koeficient elektromechanické vazby



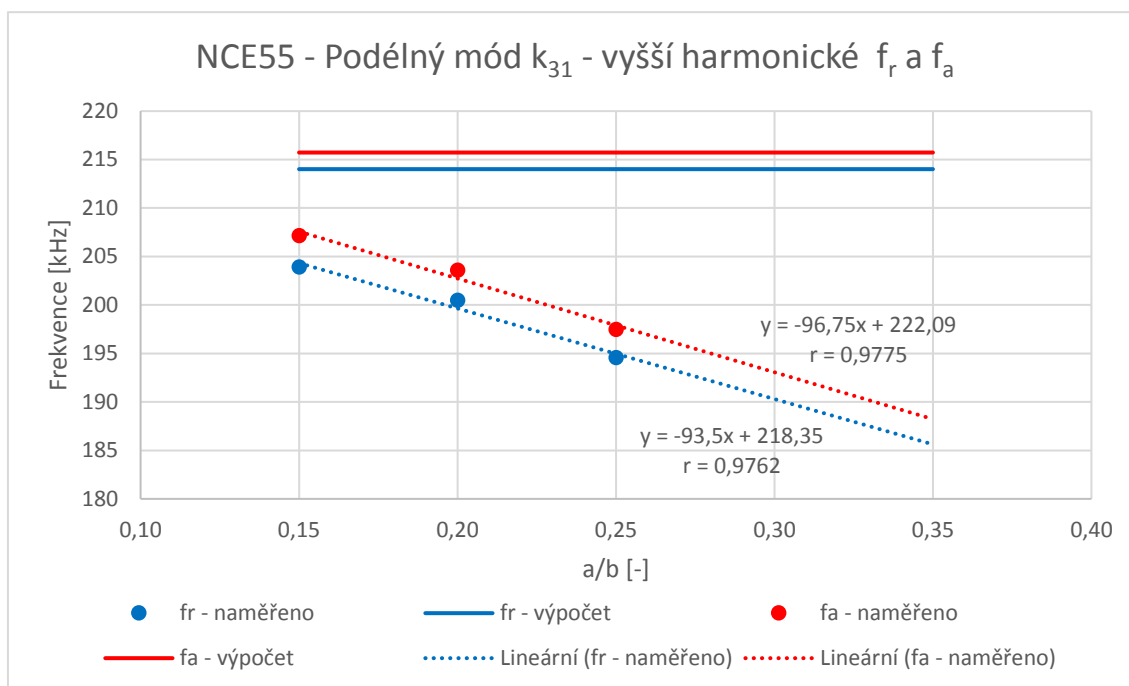
Graf 20: NCE55 – Podélný mód  $k_{31}$  – koeficient elektromechanické vazby –  $k$

Na grafu 20 je možné porovnat hodnoty vypočtených koeficientů elektromechanické vazby  $k_{eff}$  a  $k_{31}$  a jejich porovnání s hodnotou, kterou udává matice k danému typu PZT keramiky od výrobce.

V grafu si lze povšimnout, že zatímco hodnota  $k_{31}$  udávaná maticí je konstantní pro všechny rozměry, kde se podélný mód kmitu  $k_{31}$  vyskytuje, hodnoty  $k_{eff}$  i  $k_{31}$  se zvyšujícím se rozměrem strany a klesají. Hodnoty  $k_{eff}$  i  $k_{31}$  také dosahují nižších hodnot, než udává matice.

Hodnota  $k_{eff}$  je pro tento mód kmitu průměrně menší o 10 % než hodnota  $k_{31}$ .

### 24.2.1.4 Vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence



Graf 21: NCE55 - Podélný mód  $k_{31}$  - vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence -  $f_r$  a  $f_a$

Tento graf porovnává naměřené a vypočtené vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence pro podélný mód kmitu  $k_{31}$ .

V grafu si lze povšimnout, že naměřené frekvence, stejně jako u základních frekvencí, rostou se snižujícím se rozměrem strany  $a$ , zatímco podle výpočtů by měly být konstantní, a jsou opět nižší, než ukazuje teorie.

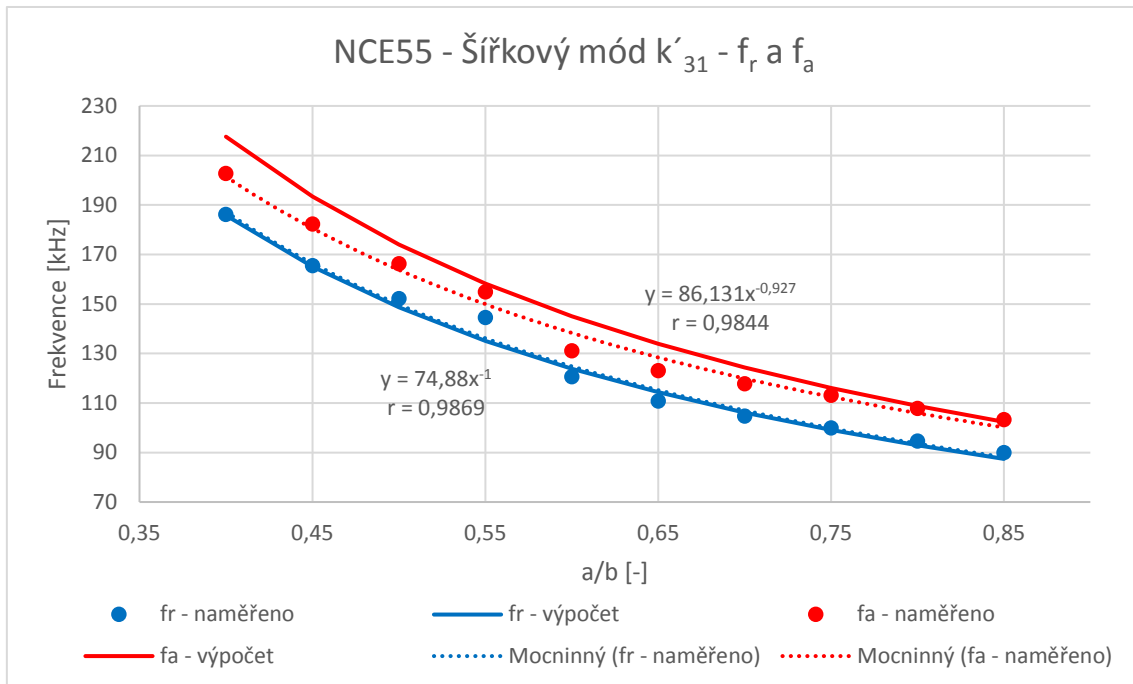
V porovnání se základními frekvencemi klesají tyto frekvence podstatně rychleji a jejich vzájemný rozestup se snížil.

Dále si lze také povšimnout, že zatímco se základní rezonanční a antirezonanční frekvence podélného módu kmitu  $k_{31}$  u rezonátoru NCE55 vyskytují pro poměry stran  $a/b = 0,15 - 0,35$ , vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence tohoto módu kmitu se vyskytují jen pro poměry stran  $a/b = 0,15 - 0,25$ .

I tyto rezonanční a antirezonanční frekvence mají velmi dobrou korelaci.

## 24.2.2 Šířkový mód kmitu $k'_{31}$

### 24.2.2.1 Rezonanční a antirezonanční frekvence

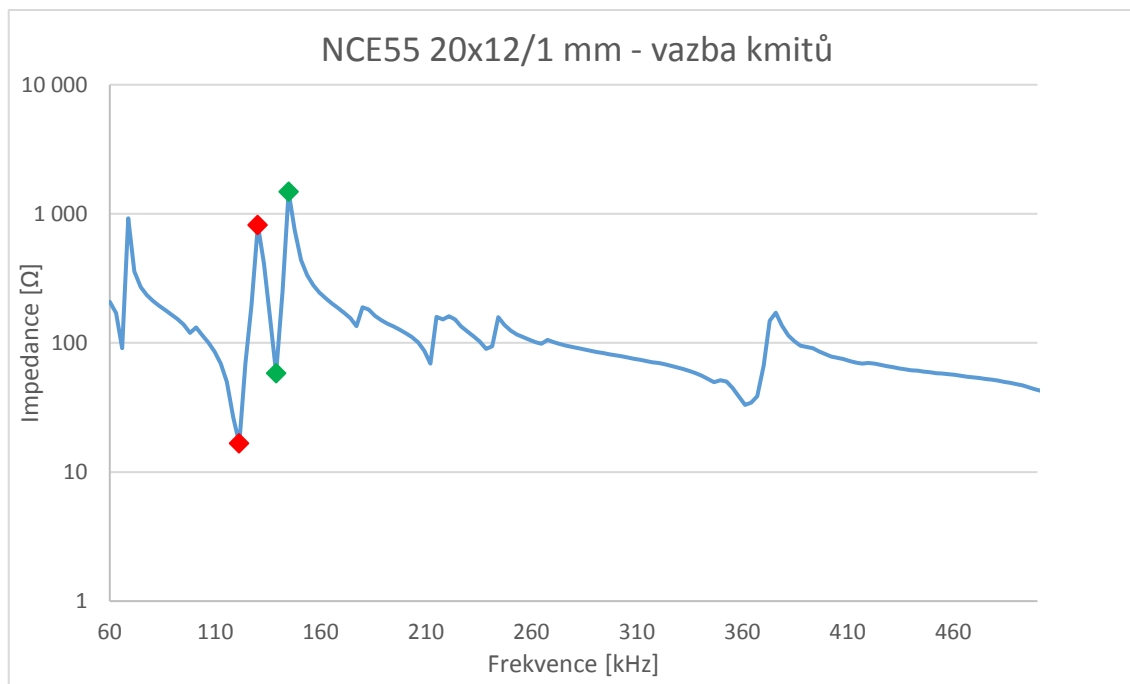


Graf 22: NCE55 – Šířkový mód  $k'_{31}$  - rezonanční a antirezonanční frekvence –  $f_r$  a  $f_a$

Do grafu 22 jsou zaneseny naměřené a vypočtené hodnoty rezonančních a antirezonančních frekvencí pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$ , který se u piezoelektrického rezonátoru NCE55 vyskytoval pro rozměry strany  $a = 8 - 17$  mm.

Při pohledu na graf si lze povšimnout, že naměřené hodnoty nekopírují analyticky vypočtenou křivku zcela ideálně. Rovnoměrný pokles frekvencí je narušen v úseku pro  $a/b = 0,55 - 0,65$ , kdy došlo k posunutí frekvencí i ke změně jejich vzájemného rozestupu. Tento posun je způsoben tím, že se v impedančním spektru nacházely rezonanční a antirezonanční frekvence dvou různých módů kmitů těsně vedle sebe, případně se i zcela překrývaly a dochází tak k vazbě dvou kmitů (viz graf 23).

Naměřené rezonanční frekvence disponují o trochu lepší korelací, nicméně korelace u naměřených rezonančních i antirezonančních frekvencí jsou velmi dobré.



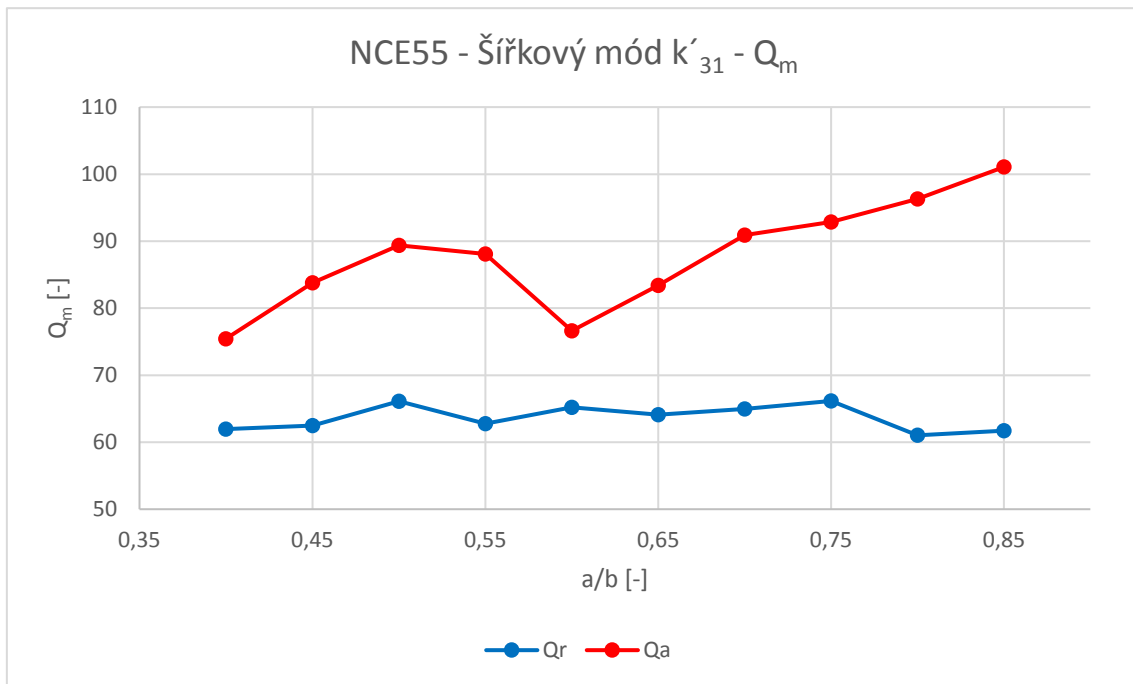
Graf 23: NCE55 - vazba dvou kmitů u šířkového módu kmitu  $k'_{31}$  při  $a/b = 0,6$

Červené body – rezonance a antirezonance šířkového módu kmitu  $k'_{31}$

Zelené body – rezonance a antirezonance jiného nedefinovaného módu kmitu



### 24.2.2.2 Koeficient mechanické jakosti



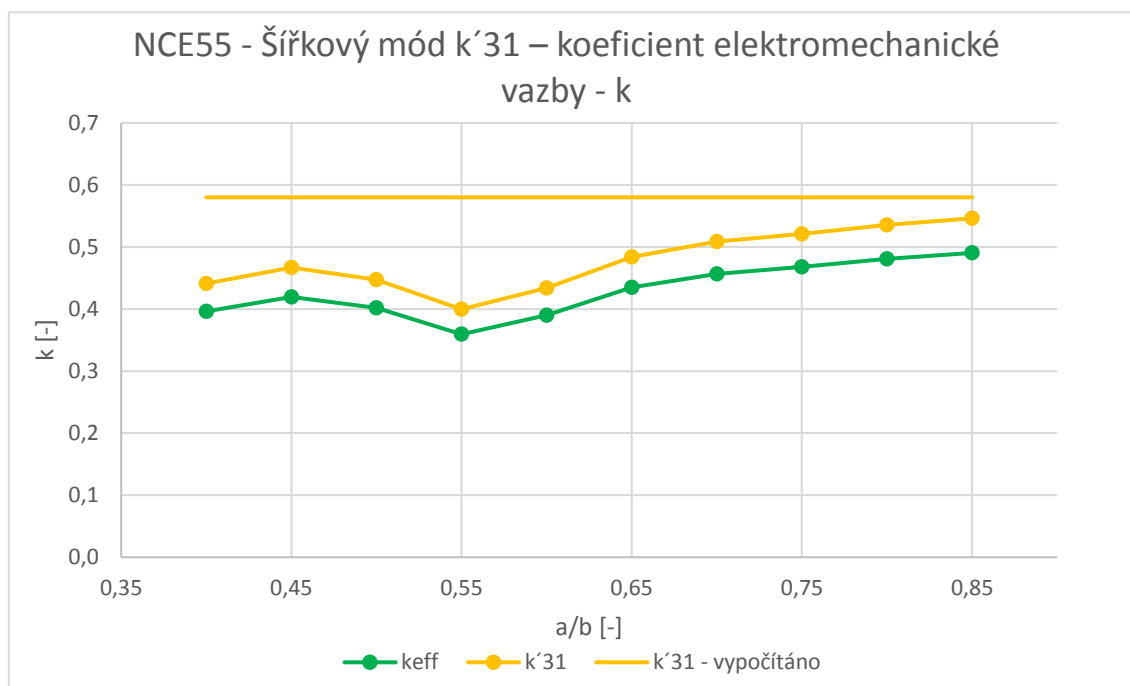
Graf 24: NCE55 – Šířkový mód  $k'_{31}$  – koeficient mechanické jakosti –  $Q_m$

Graf 24 zobrazuje hodnoty koeficientů jakosti  $Q_r$  a  $Q_a$  piezoelektrického rezonátoru NCE55 pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$ .

Hodnoty  $Q_r$  i  $Q_a$  se zde oproti podélnému módu kmitu  $k_{31}$  zvýšily. Stále také platí, že koeficient jakosti  $Q_a$  je podstatně vyšší než koeficient jakosti  $Q_r$ .

Koeficient mechanické jakosti  $Q_r$  si pro tento mód kmitu opět udržuje přibližně konstantní hodnoty. Koeficient jakosti  $Q_a$  má tendenci stoupat, je však možné pozorovat jeho náhlý propad pro  $a/b = 0,5$ . Poté však už jen vzrůstá.

### 24.2.2.3 Koeficient elektromechanické vazby



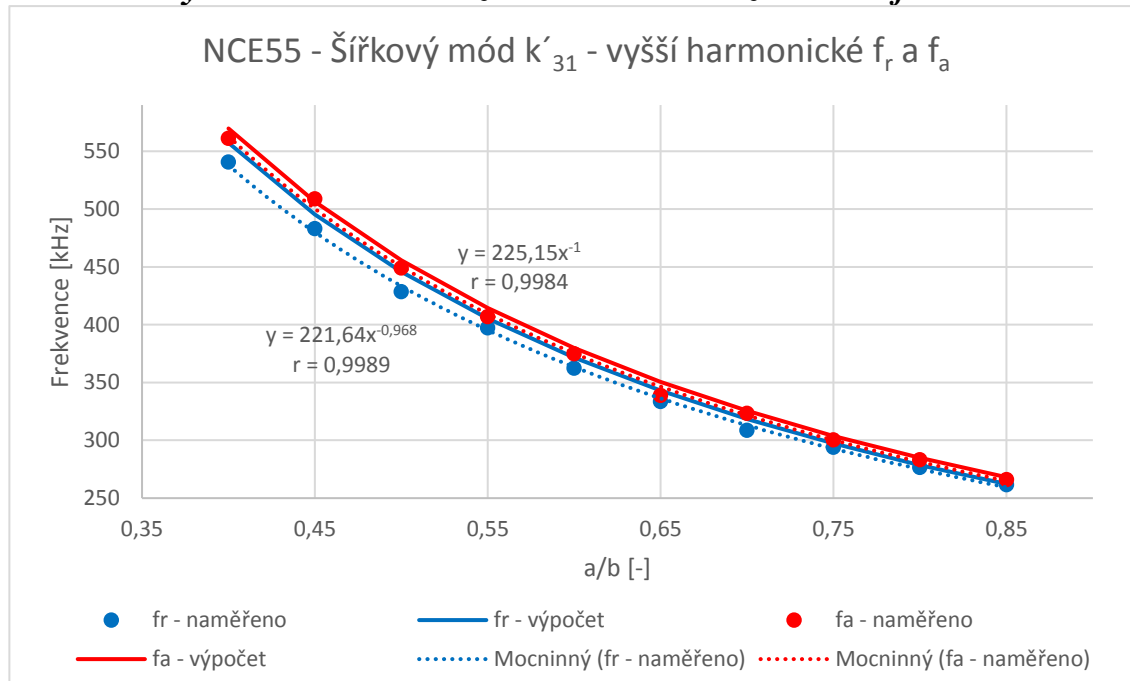
Graf 25: NCE55 – Šířkový mód  $k'_{31}$  – koeficient elektromechanické vazby –  $k$

Tento graf zobrazuje hodnoty vypočtených koeficientů elektromechanické vazby  $k_{eff}$  a  $k'_{31}$  na základě měření pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$  a jejich porovnání s hodnotou, která byla vypočtena na základě údajů z matice  $k$  danému typu PZT keramiky poskytnuté výrobcem.

V grafu si lze povšimnout, že hodnota  $k'_{31}$  vypočtená pomocí matice je znovu konstantní pro všechny rozměry a je vyšší než hodnoty získané z měření. Až na mírný pokles při  $a/b = 0,55$ , lze říci, že koeficienty elektromechanické vazby  $k_{eff}$  a  $k'_{31}$  s rostoucí stranou  $a$  vzrůstají až nakonec naměřené  $k'_{31}$  se téměř shoduje s hodnotou  $k'_{31}$  vypočtenou podle matice.

Hodnota  $k_{eff}$  je pro tento mód kmitu průměrně menší o 10 % než hodnota  $k'_{31}$ .

#### 24.2.2.4 Vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence



Graf 26: NCE55 – Šířkový mód  $k'_{31}$  – vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence –  $f_r$  a  $f_a$

Graf 26 obsahuje naměřené a vypočtené vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence pro šířkový mód kmitu  $k'_{31}$ .

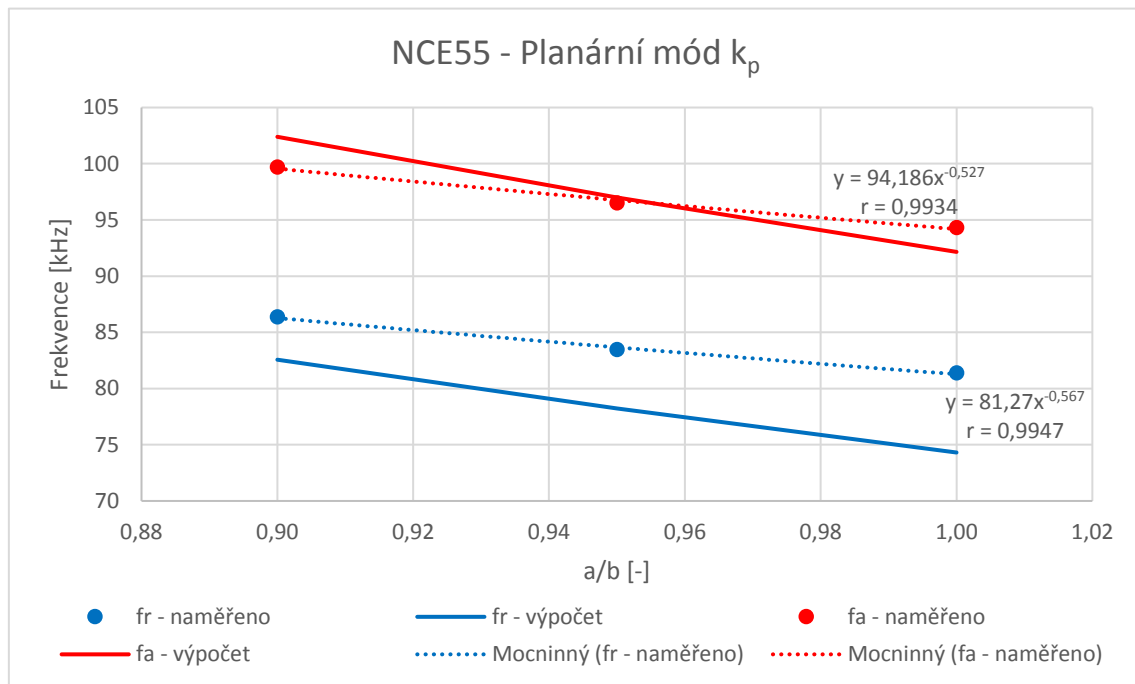
V grafu je možné pozorovat, že naměřené hodnoty přibližně kopírují naměřené hodnoty. Oproti základním rezonančním a antirezonančním frekvencím je u těchto frekvencí rozestup mezi rezonančními a antirezonančními frekvencemi podstatně menší. Tyto frekvence také klesají s rostoucím poměrem stran  $a/b$  podstatně více než základní frekvence.

Na rozdíl od základních rezonančních a antirezonančních frekvencí nejsou tyto frekvence provázány žádnou vazbou kmitů.

Naměřené rezonanční a antirezonanční frekvence mají opět velmi dobrou korelaci.

## 24.2.3 Planární mód kmitu $k_p$

### 24.2.3.1 Rezonanční a antirezonanční frekvence



Graf 27: NCE55 – Planární mód  $k_p$  – rezonanční a antirezonanční frekvence –  $f_r$  a  $f_a$

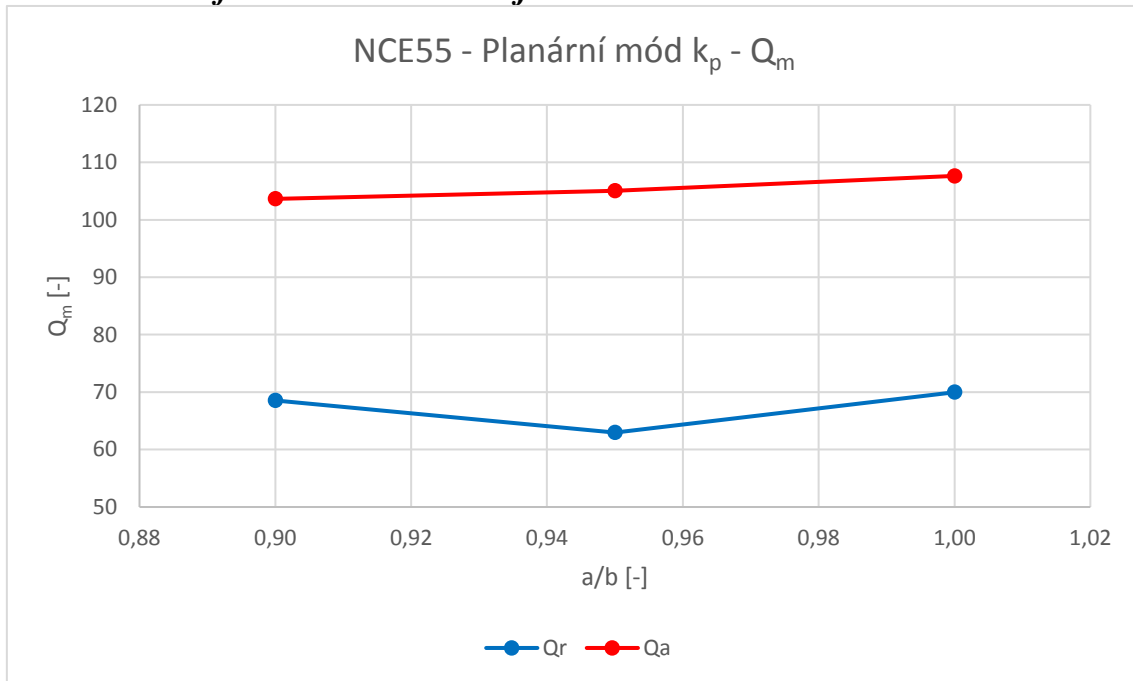
Graf 27 zobrazuje naměřené a vypočtené hodnoty rezonančních a antirezonančních frekvencí pro planární mód kmitu  $k_p$ , který se u piezoelektrického rezonátoru NCE55 vyskytoval pro rozměry strany  $a = 18 - 20$  mm.

Naměřené hodnoty potvrzují výsledky z analytických výpočtů, které ukazují, že rezonanční i antirezonanční frekvence se zvyšujícím se rozměrem strany a klesají. Naměřené hodnoty však neklesají tak strmě, jak ukazují výsledky získané ze vzorců. Vzájemný rozstup mezi rezonančními a antirezonančními frekvencemi zůstává přibližně stejný.

Naměřené rezonanční frekvence přibližně odpovídají vypočteným hodnotám, zatímco naměřené rezonanční frekvence jsou vyšší, než ukazují výpočty.

Naměřené rezonanční i antirezonanční frekvence dosahují velmi dobré korelace.

### 24.2.3.2 Koeficient mechanické jakosti



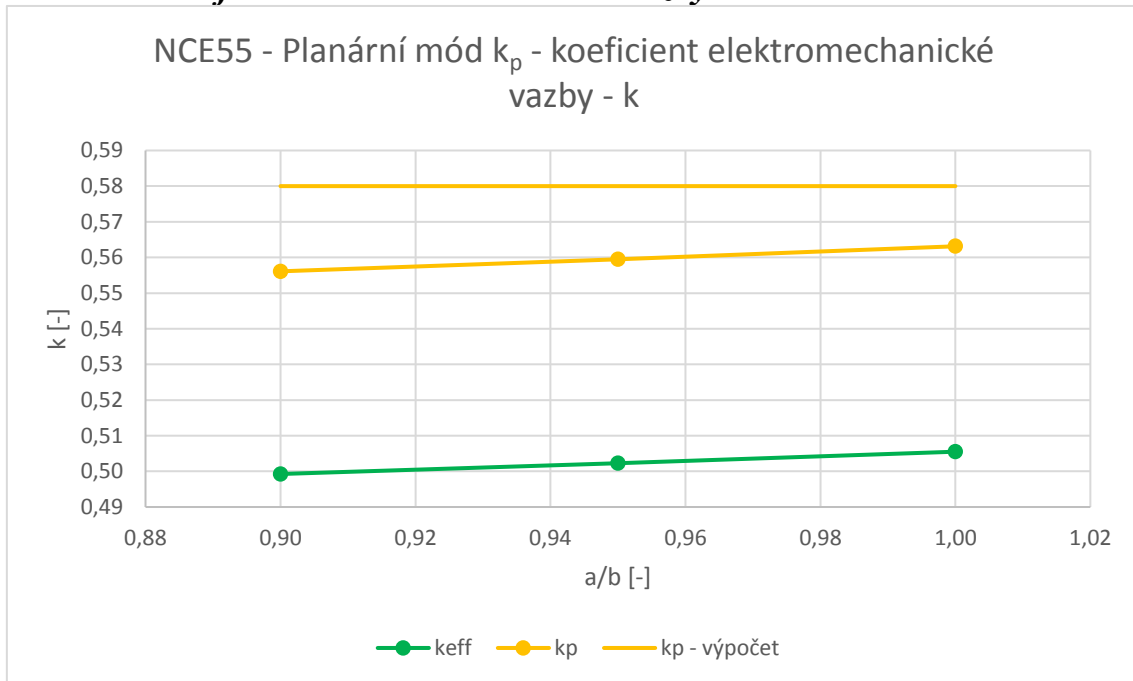
Graf 28: NCE55 – Planární mód  $k_p$  – koeficient mechanické jakosti –  $Q_m$

Graf 28 porovnává hodnoty koeficientů jakosti  $Q_r$  a  $Q_a$  piezoelektrického rezonátoru NCE55 pro planární mód kmitu  $k_p$ .

Hodnoty  $Q_r$  i  $Q_a$  jsou zde v porovnání s podélným a šířkovým módem kmitu  $k_{31}$  a  $k'_{31}$  vyšší. Stejně jako u předchozích módů kmitů i zde platí, že koeficient jakosti  $Q_a$  je vyšší než koeficient jakosti  $Q_r$ .

Stejně jako u šířkového módu kmitu  $k'_{31}$  si lze povšimnout, že zatímco koeficient jakosti  $Q_r$  je konstantní, koeficient jakosti  $Q_a$  mírně stoupá se zvyšující se stranou a.

### 24.2.3.3 Koeficient elektromechanické vazby



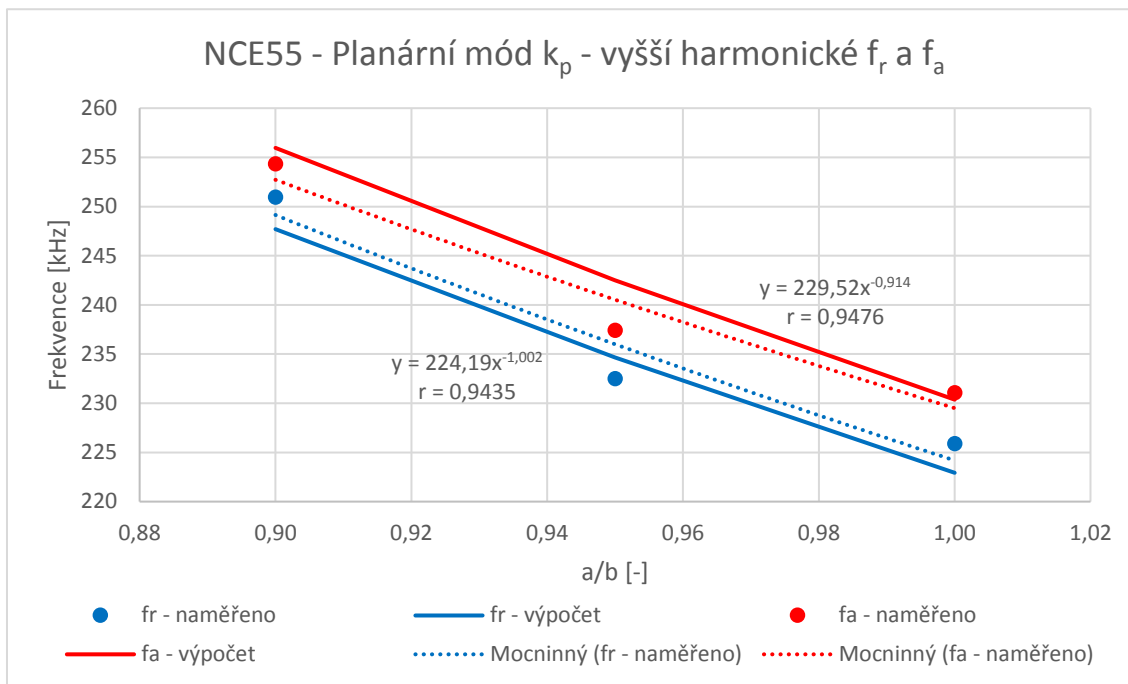
Graf 29: NCE55 – Planární mód  $k_p$  – koeficient elektromechanické vazby –  $k$

Graf 29 zobrazuje hodnoty vypočtených koeficientů elektromechanické vazby  $k_{eff}$  a  $k_p$  na základě měření pro planární mód kmitu  $k_p$ . Tyto koeficienty jsou zde také porovnány s hodnotou, která je udávána výrobcem pro tento typ PZT keramiky.

V grafu si lze povšimnout, že hodnota  $k_p$  vypočtená pomocí matice je, stejně jako u ostatních módů kmitu, opět konstantní pro všechny rozměry, kde se podélný mód kmitu  $k_p$  vyskytuje. Navzdory tomu koeficienty elektromechanické vazby  $k_{eff}$  i  $k_p$  s přibývajícím rozměrem strany a lehce stoupají. Hodnoty koeficientu  $k_p$  jsou o trochu nižší než podle matice.

Hodnota  $k_{eff}$  je pro tento mód kmitu průměrně menší o 10 % než hodnota  $k_p$ .

### 24.2.3.4 Vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence



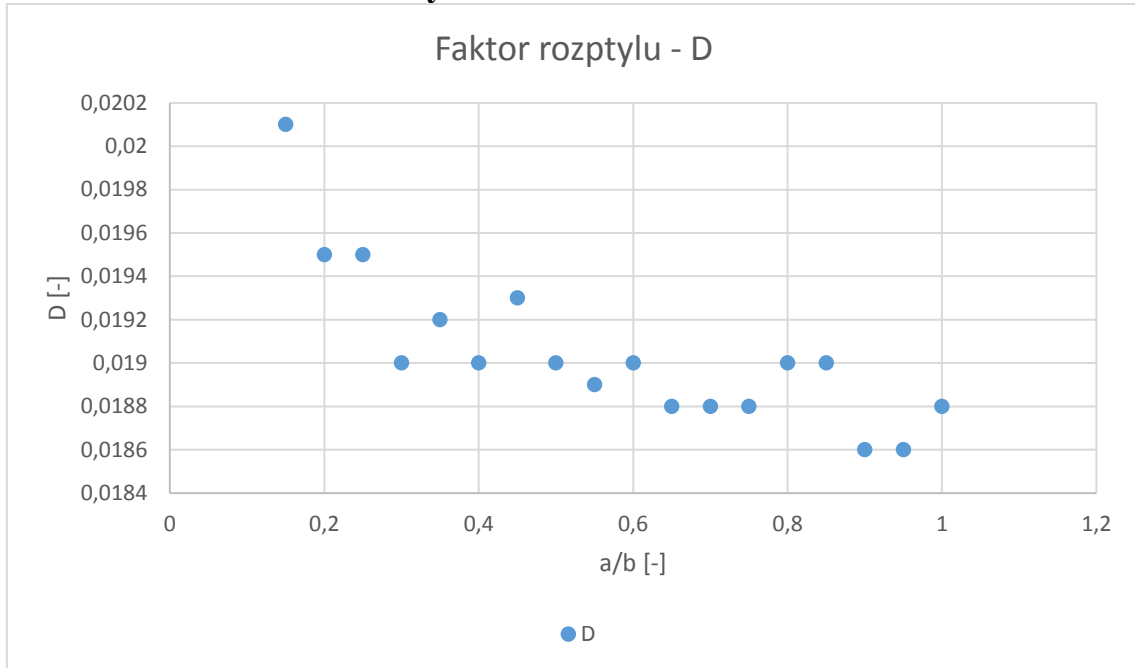
Graf 30: NCE55 – Planární mód  $k_p$  – vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence –  $f_r$  a  $f_a$

Graf 30 porovnává naměřené a vypočtené vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence planárního módu kmitu  $k_p$ .

V grafu lze pozorovat, že naměřené rezonanční a antirezonanční frekvence odpovídají výpočtům. U tohoto módu kmitu opět platí, že jsou tyto rezonanční a antirezonanční frekvence navzájem blíže než tomu je u základních frekvencí. Tyto frekvence také klesají s rostoucím poměrem stran  $a/b$  podstatně rychleji oproti základním frekvencím tohoto módu kmitu.

Korelace těchto naměřených frekvencí lze stále označit za dobré.

#### 24.2.4 Faktor dielektrických ztrát

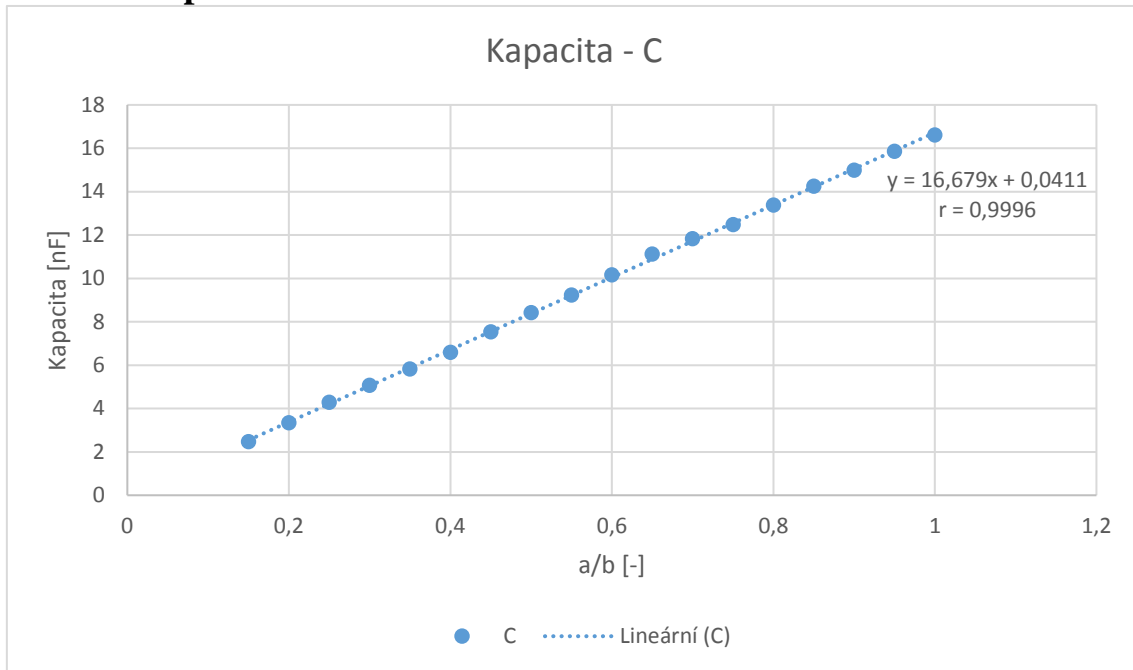


Graf 31: NCE55 - Faktor dielektrických ztrát - D

Faktor dielektrických ztrát u piezoelektrického rezonátoru NCE55 byl stejně jako u rezonátoru NCE51 málo proměnlivý. Zde však lze říci, že měl tendenci se zvyšujícím se poměrem stran klesat. Rozdíl mezi maximální a minimální naměřenou hodnotou byl velmi malý, a to jen 0,0015. To značí, že maximální změna velikosti úhlu  $\delta$ , který svírá velikostí impedance a kapacity byla o  $0^{\circ}5'9,4''$ . Na základě tohoto měření lze říci, že se uvnitř rezonátoru nenacházela žádná prasklina, která by ovlivnila jeho vlastnosti.



## 24.2.5 Kapacita



Graf 32: NCE55 – Kapacita - C

Na tomto grafu je možné pozorovat, že kapacita u piezoelektrického rezonátoru NCE55 lineárně stoupala se zvyšujícím se rozměrem rezonátoru. Toto tvrzení potvrzuje i korelace naměřených hodnot, jejíž hodnota byla 0,9996. Lze tedy říci, že použitá PZT keramika u piezoelektrického rezonátoru NCE55 byla homogenní a že při broušení nedošlo k žádné větší odchylce. Celkový rozdíl kapacit mezi největším a nejmenším rozměrem byl 14,13 nF.

## 25 Diskuse

S piezoelektrickým jevem se dnes setkáváme prakticky denně. Jedním z příkladů využití tohoto jevu mohou být piezoelektrické rezonátory. Praktická část tohoto projektu byla zaměřena na piezoelektrické rezonátory deskového typu ze dvou různých typů použité PZT keramiky. Praktická část měla za úkol zjistit, jak se budou měnit módy kmitů, jejich rezonanční a antirezonanční frekvence, koeficienty mechanické jakosti a koeficienty elektromechanické vazby v závislosti na změně poměru stran  $a$  a  $b$  v rozmezí od čtvercové desky ( $a = b$ ) až po úzkou tyčinku ( $a \ll b$ ).

V praktické části této práce byla potvrzena jedna ze tří hypotéz.

První hypotéza, která předpokládala, že rezonanční a antirezonanční frekvence podélného módu kmitu  $k_{31}$  nebudou ovlivněny změnou poměru stran  $a/b$  nebyla potvrzena.

Ačkoliv analytické výpočty pomocí vzorců ukazují, že rezonanční i antirezonanční frekvence podélného módu kmitu  $k_{31}$  se nebudou měnit v závislosti na rozměru strany  $a$ , tento trend nebyl z výsledků měření potvrzen. Z výsledků vyplynulo, že se snižujícím se poměrem stran  $a/b$  se zvyšují rezonanční i antirezonanční frekvence tohoto módu kmitu. U rezonátoru NCE51 se tyto frekvence začaly vzdalovat hodnotám získaným z výpočtů. U rezonátoru NCE55 se naměřené frekvence naopak přibližovaly teoretické křivce.

Pro ostatní zkoumané módy kmitu u obou rezonátorů vývoj změn rezonančních a antirezonančních frekvencí přibližně odpovídal analytickým výpočtům.

Dále také bylo zjištěno, že u rezonátoru NCE51 při šířkovém módu  $k'_{31}$  dochází u poměrů stran  $a/b = 0,53$  a  $0,6$  k vazbě dvou kmitů. U rezonátoru NCE55 se tato vazba vyskytuje u šířkového módu  $k'_{31}$  a to při poměrech stran  $a/b = 0,55 - 0,65$ . Vazba dvou kmitů se zde projevuje posunutím rezonančních i antirezonančních frekvencí šířkového módu  $k'_{31}$ . Lze si tedy povšimnout, že se jedná téměř o ty samé poměry stran.

Z výsledků bylo také zjištěno, že vyšší harmonické rezonanční a antirezonanční frekvence jsou téměř třikrát vyšší než základní rezonanční a antirezonanční frekvence. Tento téměř trojnásobný rozdíl tak odpovídá použití trojnásobné hodnoty rezonančního vlnového čísla při výpočtu vyšších harmonických frekvencí ( $\eta_r = 3\pi/2$ ) oproti rezonančnímu vlnovému číslu základních rezonančních frekvencí ( $\eta_r = \pi/2$ ). Tyto frekvence také klesají oproti základním frekvencím podstatně rychleji s rostoucím poměrem stran  $a/b$ . Vzájemný rozestup těchto rezonančních a antirezonančních frekvencí se také podstatně snížil oproti rozestupu základních rezonančních a antirezonančních frekvencí.

Druhá hypotéza, která říkala, že koeficient mechanické jakosti  $Q_a$  pro antirezonanci bude u všech módů kmitů vždy vyšší, než koeficient mechanické jakosti  $Q_r$  pro rezonanci byla úspěšně potvrzena.

Výsledky měření ukazují, že u každého zkoumaného kmitu byl koeficient mechanické jakosti  $Q_a$  podstatně vyšší než koeficient mechanické jakosti  $Q_r$ .

Z měření také vyplynulo, že piezoelektrický rezonátor NCE51 dosahoval vyšších hodnot koeficientů  $Q_r$  i  $Q_a$  a rozdíly mezi těmito koeficienty byly v rámci jednoho kmitu větší než u piezoelektrického rezonátoru NCE55.

Dále lze také říci, že zatímco koeficient  $Q_r$  zůstává u všech módů kmitů spíše konstantní, koeficient  $Q_a$  má tendenci spíše vzrůstat v závislosti na zvětšení poměru stran  $a/b$ .

Na základě výsledků z měření lze také říci, že piezoelektrický rezonátor NCE51 má vyšší koeficient mechanické jakosti než rezonátor NCE55.

Třetí hypotéza, která předpokládala, že naměřený koeficient elektromechanické vazby bude odpovídat koeficientu elektromechanické vazby udávaném maticí od výrobce, nebyla potvrzena.

Z výpočtů na základě rezonančních a antirezonančních frekvencí se ukázalo, že koeficienty elektromechanických vazeb ve většině případů nedosahují tak vysokých hodnot, jako udává matice od výrobce, ale jsou nižší.

Podle výpočtů na základě matice vlastností by také měly být hodnoty koeficientů elektromechanických vazeb pro jednotlivé módy kmitů konstantní pro všechny rozměry.

Výsledky ale ukazují, že v případě podélného módu kmitu  $k_{31}$  u obou rezonátorů koeficient elektromechanické vazby  $k_{31}$  klesá se zvyšujícím se poměrem stran  $a/b$ .

Koeficient elektromechanické vazby  $k'_{31}$  u širkového módu  $k'_{31}$  rezonátoru NCE51 je velmi proměnlivý a nemá zřetelnou závislost na poměru stran  $a/b$ . U rezonátoru NCE55 koeficient  $k'_{31}$  má tendenci se zvyšujícím se poměrem stran  $a/b$  spíše stoupat.

U planárního módu  $k_p$  u obou zkoumaných rezonátorů koeficient elektromechanické vazby  $k_p$  stoupá se zvyšujícím se poměrem stran  $a/b$ .

Dále se zjistilo, že u obou piezoelektrických rezonátorů vyrobených z materiálů PZT keramiky NCE51 a NCE55 je koeficient elektromechanické vazby  $k_{eff}$  v průměru o 10 % nižší než koeficient elektromechanické vazby  $k_n$ .

## Závěr

Tento projekt byl zaměřen na piezoelektrické rezonátory. Praktická část tohoto projektu byla zaměřena na piezoelektrické rezonátory deskového typu ze dvou různých druhů použité PZT keramiky. Experimentální část zkoumala, jak se budou měnit módy kmitů, jejich rezonanční a antirezonanční frekvence, koeficienty mechanické jakosti a koeficienty elektromechanické vazby v závislosti na změně poměru stran  $a$  a  $b$  v rozmezí od čtvercové desky ( $a = b$ ) až po úzkou tyčinku ( $a \ll b$ ).

Na základě výsledků z výzkumu byla potvrzena jedna ze tří hypotéz. První hypotéza, která říkala, že rezonanční a antirezonanční frekvence podélného módu kmitu  $k_{31}$  nebudou ovlivněny změnou poměru stran  $a/b$  nebyla potvrzena. Druhá hypotéza, která předpokládala, že koeficient mechanické jakosti  $Q_a$  bude u všech módů kmitů vždy vyšší, než koeficient mechanické jakosti  $Q_r$  byla úspěšně potvrzena. Třetí hypotéza, která říkala, že naměřený koeficient elektromechanické vazby bude odpovídat koeficientu elektromechanické vazby udávaném maticí od výrobce, nebyla potvrzena.

Mezi hlavní výstupy této práce patří, že rezonanční a antirezonanční frekvence podélného módu kmitu  $k_{31}$  s rostoucím poměrem stran  $a/b$  klesají, místo aby byly konstantní.

Druhým výstupem je, že u obou rezonátorů dochází u šířkového módu kmitu  $k'_{31}$  k vazbě dvou kmitů a posunu rezonančních a antirezonančních frekvencí při téměř stejných poměrech stran. U rezonátoru NCE51 k vazbě dvou kmitů dochází při poměrech stran  $a/b = 0,53$  a  $0,6$ . U rezonátoru NCE55 se pak jedná o poměry stran  $a/b = 0,55 - 0,65$ .

Dalším výstupem je, že u všech zkoumaných módů kmitů si koeficient mechanické jakosti  $Q_r$  udržuje přibližně konstantní hodnoty, zatímco koeficient mechanické jakosti  $Q_a$  má s rostoucím poměrem  $a/b$  tendenci spíše stoupat.

Posledním výstupem je, že koeficient elektromechanické vazby vypočtený na základě měření je ve většině případů nižší než koeficient elektromechanické vazby udávaný maticí od výrobce.

Módy kmitů a jejich vlastnosti jsou téměř shodné pro všechny piezoelektrické rezonátory ze stejného materiálu, které mají stejný poměr stran  $a/b$  bez ohledu na jejich reálné rozměry. Výsledky z praktické části tohoto projektu tedy mohou být použity pro výrobu piezoelektrických rezonátorů deskového typu vyrobených z materiálů PZT keramiky NCE51 a NCE55 s danými požadovanými vlastnostmi o různých velikostech, například při návrhu rezonanční frekvence bez vazby s jiným módem kmitu.

## Literatura

CoJeCo – Polární osa. CoJeCo: Vaše Encyklopedie [online]. 2018, 30.1.2007 [cit. 2018-09-16]. Dostupné z: [http://www.cojeco.cz/index.php?detail=1&id\\_desc=74484&title=pol%ED%20osa&s\\_lang=2](http://www.cojeco.cz/index.php?detail=1&id_desc=74484&title=pol%ED%20osa&s_lang=2)

Erhart 1 – ERHART, Jiří. Piezoelektrické "chytré" materiály pro elektrotechniku: PZT keramika. Elektro. Praha, 2002, 12 (11), 4-7.

Erhart 2 – ERHART, Jiří. Piezoelektrika a feroelektrika: Jevy a jejich vlastnosti [online]. Liberec [cit. 2018-10-21]. Dostupné z: [https://nanoed.tul.cz/pluginfile.php/1057/mod\\_resource/content/5/FPM\\_Piezo\\_prednaska1.pdf](https://nanoed.tul.cz/pluginfile.php/1057/mod_resource/content/5/FPM_Piezo_prednaska1.pdf)

Erhart a kolektiv – ERHART, Jiří, Martin PUSTKA a Petr PŮLPÁN. Aplikace piezoelektrických prvků v mechanických a akustických soustavách. 1. Liberec: VÚTS, 2015. ISBN 978-80-87184-57-8.

Hudeček – HUDEČEK, Ondřej. Elektrické vlastnosti feroelektrických materiálů. Brno, 2010. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně. Vedoucí práce Ing. Martin Frk, Ph.D.

Illinois Capacitor – Impedance, Dissipation Factor and ESR. Illinois Capacitor [online]. 2018 [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: [https://www.illinoiscapacitor.com/pdf/Papers/impedance\\_dissipation\\_factor\\_ESR.pdf](https://www.illinoiscapacitor.com/pdf/Papers/impedance_dissipation_factor_ESR.pdf)

Jedličková a kolektiv – JEDLIČKOVÁ, Dagmar, Věra JEDLIČKOVÁ a Miroslav HALTMAR. Základy elektrotechniky: Elektrostatické pole. Elektronická učebnice [online]. Olomouc, 2015, 28.5.2015 [cit. 2018-11-03]. Dostupné z: <https://eluc.kr-olomoucky.cz/verejne/lekce/448>

Kos – KOS, Lukáš. Studium feroelektrických materiálů. Brno, 2012. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně. Vedoucí práce Ing. Martin Frk, Ph.D.

Orava – ORAVA, Jiří. Materiály s negativním Poissonovým koeficientem. Materiálová věda [online]. 2011, 2011 [cit. 2018-12-02]. Dostupné z: <http://materialovaveda.blogspot.com/2011/07/materialy-s-negativnym-poissonovym.html>

Piezoelectric Ceramic Resonators – ERHART, Jiří, Petr PŮLPÁN a Martin PUSTKA. Piezoelectric Ceramic Resonators. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN 978-331-9424-804.

Pikous – PIKOUS, Matouš. Návrh a optimalizace piezoelektrického transformátoru [online]. Liberec, 2018 [cit. 2018-12-02]. Dostupné z: [http://www1.fs.cvut.cz/stretech/2018/sbornik\\_2018/pdf/48.pdf](http://www1.fs.cvut.cz/stretech/2018/sbornik_2018/pdf/48.pdf). Středoškolská odborná činnost. Doctrina-Podještědské gymnázium s.r.o. Liberec. Vedoucí práce Prof. Mgr. Jiří Erhart, Ph. D.

Stockley a kolektiv – STOCKLEY, Corinne, Chris OXLADE a Jane WERTHEIM. Velká ilustrovaná encyklopedie: fyzika, chemie, biologie. 3. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. ISBN 80-720-0810-2.

Šimáček a Neumann – ŠIMÁČEK, Jiří a Karel NEUMANN. Přístrojové měření: Přístroje pro měření fyzikálních veličin. Elektronická učebnice [online]. Olomouc, 2015, 28.8.2015 [cit. 2018-09-16]. Dostupné z: <https://eluc.kr-olomoucky.cz/verejne/lekce/1590>

WikiSkripta 1 – Elektrostatické pole. WikiSkripta [online]. 2018, 30.11.2017 [cit. 2018-09-16]. Dostupné z: [https://www.wikiskripta.eu/w/Elektrostatick%C3%A9\\_pole](https://www.wikiskripta.eu/w/Elektrostatick%C3%A9_pole)

WikiSkripta 2 – Ultrazvukové vlnění. WikiSkripta [online]. 2018, 18.6.2018 [cit. 2018-09-16]. Dostupné z: [https://www.wikiskripta.eu/w/Ultrazvukov%C3%A9\\_vln%C4%9Bn%C3%AD](https://www.wikiskripta.eu/w/Ultrazvukov%C3%A9_vln%C4%9Bn%C3%AD)

WikiSkripta 3 – Youngův modul pružnosti. WikiSkripta [online]. 2018, 13.5.2018 [cit. 2018-12-02]. Dostupné z: [https://www.wikiskripta.eu/w/Young%C5%AFv\\_modul\\_pru%C5%BEnosti](https://www.wikiskripta.eu/w/Young%C5%AFv_modul_pru%C5%BEnosti)

WikiSkripta 4 – Coulombův zákon a permitivita prostředí. WikiSkripta [online]. 2019, 3.1.2019 [cit. 2019-03-03]. Dostupné z: [https://www.wikiskripta.eu/w/Coulomb%C5%AFv\\_z%C3%A1kon\\_a\\_permitivita\\_prost%C5%99ed%C3%AD](https://www.wikiskripta.eu/w/Coulomb%C5%AFv_z%C3%A1kon_a_permitivita_prost%C5%99ed%C3%AD)

## Obrázky a tabulky

Tomáš – TOMÁŠ, Martin. Veličiny a vztahy v nauce o dielektrikách. Dielektrika: Fyzika normálních dielektrik [online]. Plzeň, 2009, 2009 [cit. 2018-10-20]. Dostupné z: <http://dielektrika.kvalitne.cz/zaklad.html>

Erhart 1 – ERHART, Jiří. Piezoelektrické "chytré" materiály pro elektrotechniku: PZT keramika. Elektro. Praha, 2002, 12 (11), 4-7.

Mašek – MAŠEK, Stanislav Josef. Piezoelektrické transformátory [online]. Plzeň, 2017 [cit. 2018-10-30]. Dostupné z: [https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/27551/1/BP\\_Masek\\_PiezoelektrickeTransformatory.pdf](https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/27551/1/BP_Masek_PiezoelektrickeTransformatory.pdf). Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni Fakulta Elektrotechnická. Vedoucí práce Ing. Václav Koucký, CSc.

Erhart 3 – ERHART, Jiří. Experiments to demonstrate piezoelectric and pyroelectric effects. Physics Education. 2013, 48 (4), 438-446.

Vrňata – VRŇATA, Martin. Impedanční spektroskopie: Návod k laboratorní práci Impedanční spektroskopie. Praha, 2013. Dostupné také z: <https://fchi.vscht.cz/files/uzel/0010367/IS.pdf?redirected>

## **Rozhovor**

Se svolením Prof. Jiřího Erharta, Ph. D. z Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci proběhl dne 19. 6. 2018 rozhovor.