



Středoškolská technika 2023

**Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na
ČVUT**

Model zakřiveného časoprostoru

Jan Zrůst

Gymnázium Botičská

Botičská 1, 128 01 Praha 2

Anotace

Tato práce se zabývá vytvořením modelu Schwarzschildova řešení obecné relativity namapovaným na třírozměrný euklidovský prostor a zkoumáním drah těles v něm se pohybujících.

Abstract

This project deals with creating a model of the Schwarzschild solution of general relativity mapped onto a three-dimensional Euclidean space and analysing the trajectories of bodies moving within it.

Obsah

| | |
|----------------------------------|----|
| Úvod | 6 |
| Přehled literatury | 7 |
| Moderní fyzika | 7 |
| OTR | 7 |
| Metodika | 9 |
| Matematická rovnice modelu | 9 |
| Počítačový model | 10 |
| Fyzický model | 11 |
| Výsledky a diskuse | 12 |
| Závěr | 14 |

Úvod

V této práci jsem se zabýval převedením matematické rovnice na objekt, kterého je možno se dotknout, si na něj šáhnout anebo tím, že je to model zakřiveného časoprostoru, pozorovat jak by se v něm pohybovali předměty jiné. (hlavně kuličky, neboť ty mají díky své kulatosti vhodné vlastnosti k tomu, aby se mohli něčím/někde volně pohybovat/kutálet) Protože vytvořit model zakřiveného čtyřdimenzionálního časoprostoru by bylo prakticky nemožné, je nutno se trochu uskromnit. Ideální se v tomto případě zdá být obyčejná 2D plocha, kterou nějaké lokální narušení prohne do rozměru třetího. (vlastně tady přespříliš složitě popisují vodní vír)

Přehled literatury

Moderní fyzika

Dnešní svět, tak jak ho chápeme a jak mu rozumíme, popisují dvě hlavní teorie. A to teorie kvantová a obecné relativity. Ač, doufám prozatím, neslučitelné (nepočítám něco jako Diracovu rovnici, ale opravdové sjednocení, jako např. u elektřiny a magnetismu), tak dohromady dokáží vysvětlit jak vznik fotonu při přeskoku elektronu do nižší energetické hladiny, jeho následný průlet prostředím, ohyb na štěrbině a kolem hmotného tělesa, rudý posuv, kterému podléhá při cestování rozpínajícím se časoprostorem, tak i jeho dopad na molekulu retinalu, čímž vyvolá zase řadu dalších procesů, které tyto teorie (potažmo jejich „zjednodušení“ na chemii) dokáží objasnit.

Je tedy vidět, že obecná teorie relativity a kvantová teorie mají obě bezesporu své výsostné postavení nejen ve fyzice, ale svou aplikací i v již zmíněné chemii, tedy i v biologii, a tedy vlastně úplně všude. (snad až matematiku, která je jediná věda, co platí čistě a priori, a i proto se na nikoho neohlíží)

OTR

Obecná teorie relativity (Relativitätstheorie) je doposud jediná teorie gravitace, která obstála všem experimentům a mnoho z jejích předpovědí bylo nakonec naměřeno a potvrzeno. Jako příklad mohu uvést gravitační čočky, stáčení pericenter, strhávání časoprostoru, černé díry a nebo gravitační vlny. Přitom tím, že jde o geometrickou teorii gravitace není k jejímu pochopení potřeba znát složité matematické operace a dokonce si myslím, že by tomu do jisté míry rozuměli i děti ve školce. (něco úplně jiného je pak skutečně Einsteinovy rovnice napočítat. O tom se říká, že se novináři Eddingtona kdysi ptali, zdali je pravda, že s OTR umí pracovat jen tři lidé na planetě. Jeho odpověď byla: „Ten první jsem já, druhý je Einstein... a kdo je ten třetí?“)

Oč tedy vlastně jde? Čas a prostor nejsou dvě oddělené veličiny, kterým na sobě nijak nezávisí, ale slévají se v jedno. A to v časoprostor. (dokonce se v OTR často převádí mezi metrem a sekundou, a tudíž musejí mít ten samý rozměr [$c = 1$ a tedy $1s = 299792458m$]) Zároveň se také nepohybujeme v euklidovském světě, ale náš časoprostor je pokrivený hmotou, jež se v něm pohybuje po nejrovnějších možných drahách v časoprostoru, který si tato hmota sama zakřivila. (Asi nejznámější je, že součtem vnitřních úhlů trojúhelníku nemusíme dojít k úhlu přímému a že povrch koule není $4\pi r^2$)

Tato rovnost rozložení hmoty v časoprostoru a jeho zakřivením jsou asi nejlépe vidět přímo ze samotné rovnice.

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}$$

Rovnice 1 Einsteinova rovnice zakřivení časoprostoru. Na levé straně je Einsteinův tenzor a kosmologický člen. Na pravé straně je tenzor energie a hybnosti. V překladu je na levé straně pouze zakřivení časoprostoru, a to se rovná straně pravé, kde je pouze, co se kde zrovna nachází.

Schwarzschildovo řešení OTR

Vždy je pěkné si něco nového vyzkoušet na jednoduchém případě. Zde to znamená, že se budou Einsteinovy rovnice počítat okolo sféricky symetrického tělesa, v jehož okolí se nic nenachází a výsledek bude z pohledu vnějšího pozorovatele.

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = 0$$

Rovnice 2 Schwarzschildovo řešení Einsteinových rovnic

Díky bohu se nejedná o 16 diferenciálních rovnic, ale jen o dvě klasické. (z 16 se díky symetriím stalo jen deset, z těch je mnoho zcela triviálních a jediné co zbude, jsou čtyři rovnice, kde jen dvě jsou na sobě nezávislé)

$$A(r) = c_1 + \frac{c_2}{r} \quad a \quad B(r) = \frac{1}{A(r)}$$

Rovnice 3 a 4 Čistě pro zajímavost uvádím tyto dvě rovnice. Zde $c_{1,2}$ jsou pouze integrační konstanty, které díky Newtonovské limitě musí vyjít na $c_1 = 1$ a $c_2 = \frac{2GM}{c^2}$.

Dá se tedy napsat Schwarzschildova metrika v poměrně elegantním tvaru:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega^2$$

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \quad a \quad r_g \equiv \frac{2GM}{c^2}$$

Rovnice 4 Veličina r_g představuje Schwarzschildův poloměr. (Tento zápis je v polárních a pokrivených souřadnicích. Proto se doslovně neshoduje s známým $ds^2 = \Sigma dx^2$) Dále je zde vidět, že závorka je vlastně $A(r)$ z rovnice 3 a ve druhém členu ve zlomku je $B(r)$ z rovnice 4.

Metodika

Matematická rovnice modelu

Protože udělat model čtyřdimenzionálního zakřiveného časoprostoru v našem třírozměrném prostoru by bylo prakticky nemožné, je potřeba se trochu uskromnit. Jako ideální se zdá být 2D „časoprostor“ (bez času a jedné prostorové souřadnice, aby to bylo právě 2D) namapovaný na klasický E_3 . (euklidovský prostor) Toto namapování se dělá pomocí diagramu vnoření. Tam jde o to, že všechny souřadnice, kterých se chceme zbavit zavedeme jako konstantní.

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\varphi^2$$

Rovnice 5 Toto je Schwarzschildova metrika pro konstantní t , a tedy $dt^2 = 0$ (první člen z rovnice 5 vypadne) a $\theta = \frac{\pi}{2}$. (tedy z třetího členu vypadne $d\theta^2$ i $\sin^2\theta = 1$ a zbyde pouze $d\varphi^2$)

To by byla metrika Schwarzschildova, kterou už jen stačí sjednotit s obecnou metrikou rotační plochy. (také tím, že se mapuje na E_3 , tak budou platit krásné vzorce jako Pythagorova věta)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Rovnice 6 Zde je $z = f(x, y)$, a protože je vše sféricky symetrické, tak dále jen $f(r)$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + d(f(r))^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + f'^2 dr^2$$

Rovnice 7 Přepisem do polárních souřadnic se dá krásně přiblížit naší zjednodušené Schwarzschildově metrice. (to f' s čarou v poslední části vzorce znázorňuje derivaci, která podle kvality tiskárny nemusí být dobře čitelná)

$$ds^2 = (1 + f'^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Rovnice 8 Poslední a finální úprava rovnice pro rotační plochu

Nyní už nezbyvá nic jiného, než sjednotit rovnici 5 s rovnicí 8. při jejich porovnání je vidět, že se liší pouze členy první. Je tedy žádoucí, aby:

$$\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} = 1 + f'^2$$

Rovnice 9 Tato diferenciální rovnice je tedy jediné, co je potřeba vypočítat na stanovení modelu onoho zakřiveného časoprostoru. (a to ačkoli postrádá čas i jednu prostorovou složku) Jednoduchou úpravou lze dostat vzorec:

$$\frac{df}{dr} = \sqrt{\frac{r_g}{r - r_g}}$$

Rovnice 10

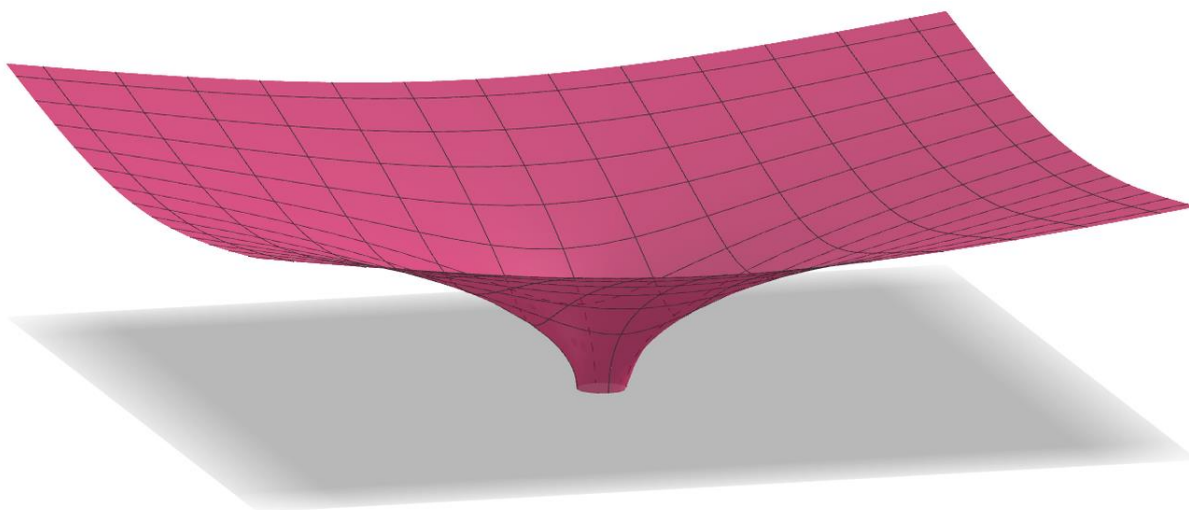
Po integrování a po následné substituci za člen $r - r_g$ nezbude nic jiného než samotný předpis pro $f(r)$ z rovnice číslo 7. (resp. již rovnice 6)

$$f(r) = \sqrt{4r_g(r - r_g)}$$

Rovnice 11 Finální rovnice diagramu vnoření (namapování) Schwarzschildova řešení Einsteinovy OTR na Euklidův prostor.

Počítačový model

Mnoho internetových kalkulaček umožňuje zadat rovnici, načež zobrazí její graf. Jedním z takových programů je i Geogebra.org. V ní byl vytvořen následující obrázek:



Obrázek 1 Graf rovnice 11. Zde je krásně patrné, že toto zobrazení funguje pouze při r větších, než je Schwarzschildův poloměr. (v principu je sice možné mapovat i za Schwarzschildovým poloměrem, ale buď by bylo nutné takovouto geometrií porušit některé poměrně důležité fyzikální zákony a nebo je toto řešení tak nestabilní, že jím neproletí ani foton, a proto se zde ničím takovým nebudu zabývat)

Pro vytvoření 3D modelu ale Geogebra nestačí. Naštěstí však existuje internetový nástroj ještě mocnější, a to Wolfram|Alpha.com. Ten dokáže grafy nejenom vytvářet, ale také exportovat jak 3D model do mnoha formátů. (já využil typ .stl)

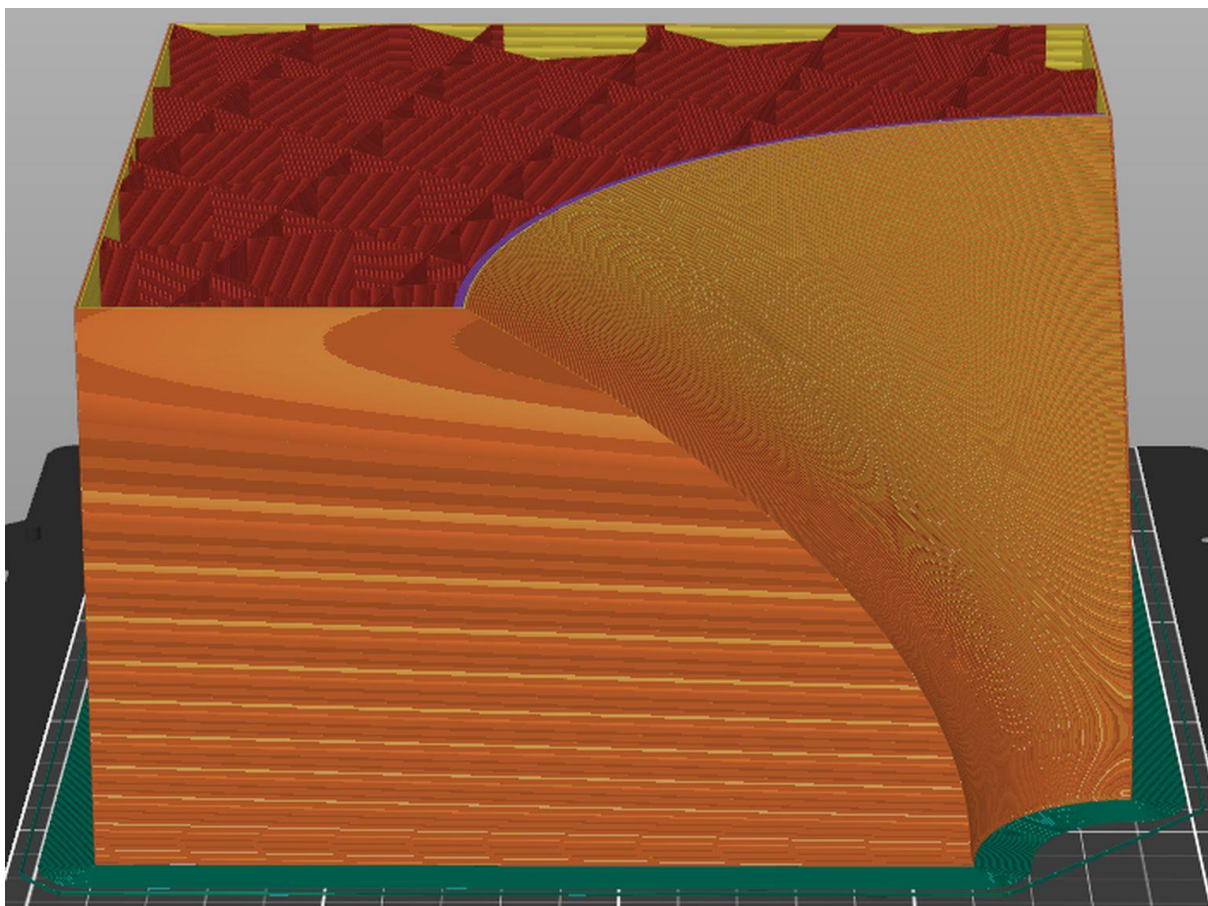
Pro jednoduchost jsem se rozhodl použít pro výpočet r_g (vzorec v rovnici 4), které je nutno dosadit do finální rovnice číslo 11 hmotnost Slunce, jež činí přibližně $1,988\,435 \times 10^{30}$ kilogramů. Schwarzschildův poloměr pro takovouto hmotnost je asi 2 953,250 123 metrů. (tedy skoro 3 kilometry a pro srovnání r_g pro zemi se pohybuje okolo 8,87 milimetru. Na tak malý rozměr by se musela stlačit Zeměkoule, aby se z ní stala černá díra)

Tento soubor jsem pak následně upravil v programu Fusion 360, od společnosti Autodesk. Rozhodl jsem se pro zmenšení 1:100 000. (každý centimetr na mém modelu by byl v realitě jeden kilometr)

Fyzický model

Dle mého uvážení jsem dospěl k názoru, že nejpřesnější možný výsledek dostanu, vytisknu-li model na 3D tiskárně. Eliminuje se tím jakákoli lidská nedokonalost při manuální práci a docílí se tak přesné geometrie. (kterou jsme doted' tak složitě počítali)

Upravený, rozřezaný a zmenšený model jsem z Fusionu 360 nahrál do PrusaSliceru. (verze 2.5.2) Jako ideální druh filamentu pro tisk takto velkých modelů mi vyšel materiál PLA. Výrobce uvádí, že je vhodný jak pro malé detaily, tak právě i pro velké modely. Jediná jeho velká nevýhoda je malá teplotní odolnost, ale to ani v takovéto aplikaci není potřeba.



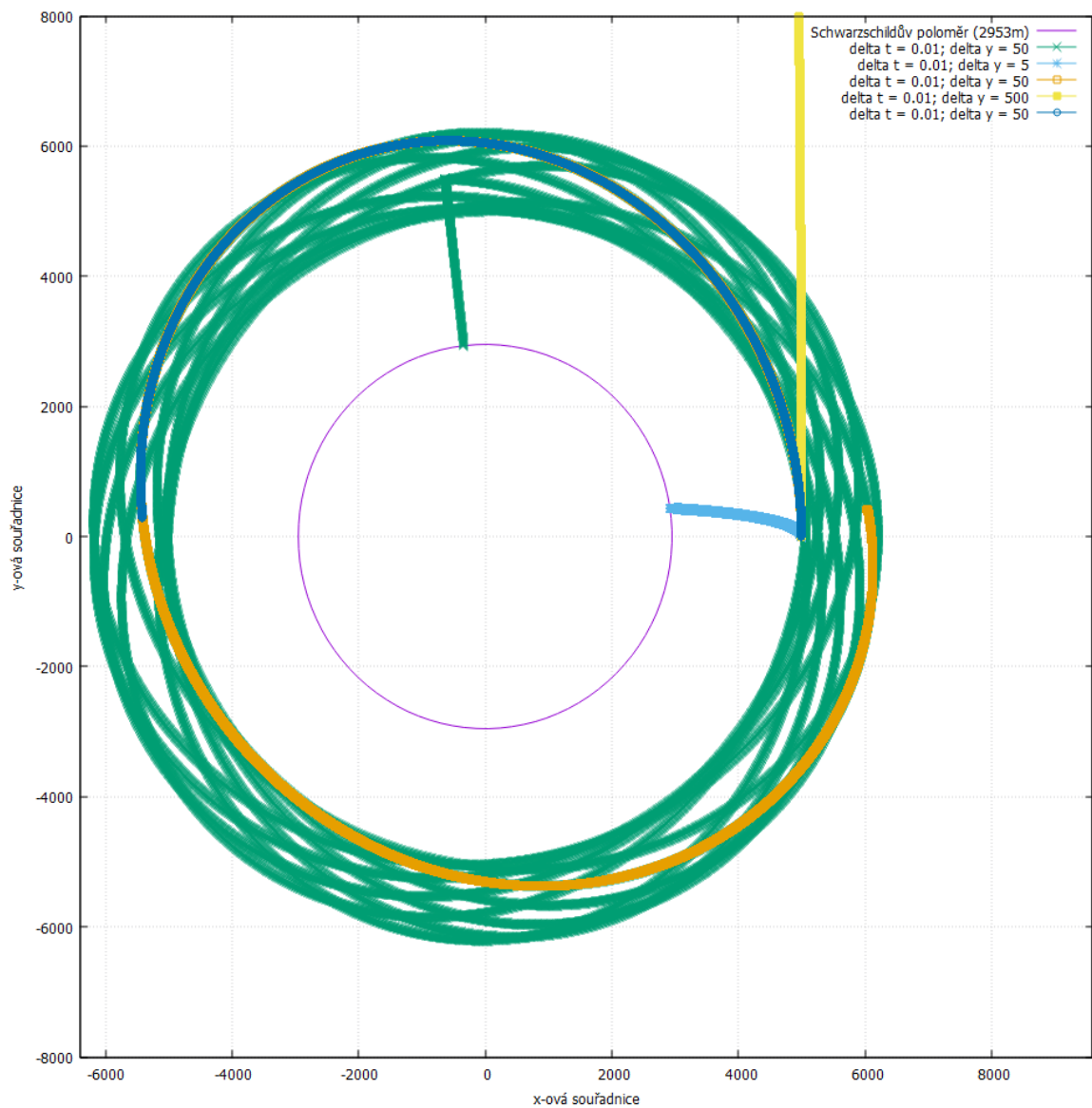
Obrázek 2 Náhled na budoucí výtisk v PrusaSliceru (předpokládaná doba tisku je 10 hodin)

Výsledky a diskuse



Obrázek 3 Čtyři takovéto model dají dohromady celé „hrdlo“ časoprostoru a následně čím větší je vzdálenost od středu, tím menší bude celkové zakřivení

Výsledkem mojí práce je, prozatím, model časoprostoru zakřiveného sféricky symetrickým tělesem o hmotnosti našeho Slunce ve měřítku 1:100 000. Sestává se ze čtyř samostatných bloků, jež jsou až na barvu naprosto identické. V co nejbližší době bych se chtěl zaměřit na analýzu pohybu těles (kuliček různých hmotností a velikostí) v tomto modelu a postupně ho také zvětšovat. Z předběžných matematických výpočtů to vypadá, že by se objektu pohybujícím se na takto zakřivené rovině opravdu stáčelo perihelium. (což je v souladu jak s OTR, tak s reálným pozorováním) Zatím jsem ale počítal pouze pohyb bez tření a odporu. Nedochozí tedy k žádným ztrátám energie, což je v praxi nereálné. Je tedy nutné do mých výpočtů právě toto tření a odpor přidat. Co je ale nejdůležitější, nepsat si jen rovnice o tom, jak by se příroda chovat měla, ale opravdu naměřit, jak se v mém modelu kuličky budou kutálet a podřídíit teorii realitě. (nikoli naopak, tomu se totiž říká sci-fi a to do vědy nepatří)



Obrázek 4 Zde jsou hrubě napočítané dráhy objektů, jež by se bez tření a bez odporu pohybovali v mém modelu. Vpravo nahoře je legenda. Diferenciální rovnice jsem počítal jako diferenční schéma, proto je u každého výpočtu uvedeno delta t a také jaká byla počáteční „rychlost“. Na světle modré dráze je vidět těleso, jež bylo příliš pomalé a tím pádem bylo vtaženo za horizont událostí. Naopak žluté těleso jen prosvištělo kolem. Zelené je něco mezi a krásně se pohupuje na orbitě. (modrá a oranžová jsou jen rezidua z minulých výpočtů a přesně kopírují dráhu zelenou)

Závěr

Vytvořil jsem fyzický model diagramu vnoření pro Schwarzschildovo řešení OTR. Tento model je složen ze čtyř totožných dílů, neboť Schwarzschildovo řešení je sféricky symetrické. Proces výroby modelu byl následující. Zjistit rovnici pro diagram vnoření. Tuto rovnici následně zanást do grafu. Z grafu udělat 3D model. 3D model následně upravit a vytisknout na 3D tiskárně. Práce na této práci ale nejsou zdaleka u konce. Dále se plánuji zaměřit na analýzu drah pohybu objektů na tomto modelu také zvětšování celého modelu.