Středoškolská technika 2010

Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT

VÝPOČTY POVRCHU A OBJEMU TĚLES

Petr Michal

Střední průmyslová škola, Nové Město nad Metují

Československé armády 376

Obsah

Obsah 0

Úvod *4*

1. Plošné útvary *5*

1.1. Čtverec **8**

1.2. Obdélník **9**

1.3. Rovnoběžník **10**

1.4. Lichoběžník **11**

1.5. Různoběžník **12**

1.6. Kosočtverec **13**

1.7. Trojúhelník **14**

1.8. Rovnoramenný trojúhelník **15**

1.9. Rovnostranný trojúhelník **16**

1.10. Pravidelný n-úhelník **18**

1.11. Kružnice a kruh **19**

1.12. Elipsa **20**

2. Tělesa *21*

2.1. Sestrojování těles **21**

- Sestrojení kvádru 22
- Sestrojení válce 28
- Sestrojení klínu s válcovou plochou 34

Tipy a rady usnadňující kreslení: 37

2.2. Simpsonův vzorec **41**

2.3. Příklad použití Simpsonova vzorce **42**

2.4. Kvádr **44**

2.5. Krychle ... 46

2.6. Hranol ... 48

2.7. Jehlan ... 49

2.8. Pravidelný jehlan ... 50

2.9. Komolý jehlan ... 51

2.10. Rotační kužel ... 52

2.11. Kužel ... 53

2.12. Komolý kužel ... 54

2.13. Válec ... 55

2.14. Koule ... 56

3. Speciální tělesa ... 59

3.1. Pravidelný komolý jehlan ... 59

3.2. Komolý rotační kužel ... 60

3.3. Jehlanec s obdélníkovými podstavami ... 61

3.4. Obecný klín ... 61

3.5. Kosý hranol ... 62

3.6. Koso seříznutý kolmý trojboký hranol ... 62

3.7. Na obou stranách koso seříznutý n-boký hranol ... 63

3.8. Nepravidelný jehlan kolmý a kosý ... 63

3.9. Nepravidelný komolý jehlan kolmý a komolý jehlan kosý ... 64

3.10. Kosý válec ... 64

3.11. Koso seříznutý válec ... 65

3.1. Klín s válcovou plochou – úsek válce ... 66

3.2. Kosý kužel ... 66

3.3. Anuloid (prstenec s kruhovým průřezem) ... 67

3.4. Prstenec s eliptickým průřezem ... 68

3.5. Prstenec s obdélníkovým průřezem....68

3.6. Guldinovo pravidlo pro povrch rotačních těles....69

3.7. Guldinovo pravidlo pro objem rotačních těles....71

3.8. Guldinovo pravidlo pro výpočet obsahu rotační plochy....73

4. Složená tělesa....74

4.1. Těleso č.1....75

4.2. Těleso č.2....78

4.3. Těleso č.3 - činka....84

4.4. Těleso č.4....89

Závěr....96

Použitá literatura....97

Úvod

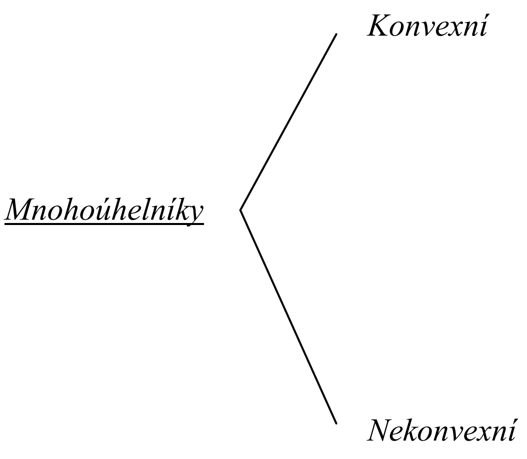
V úvodu bych Vás chtěl přivítat a seznámit s obsahem své ročníkové práce. Je zaměřena na práci v programu Geonext, s pomocí něho se věnuji plošným obrazcům a tělesům. Tentosoftware je využívánna mnoha školách jako matematicko-fyzikální program, který je volně stažitelný, poměrně dobře ovladatelný a má mnoho užitečných funkcí.Geonext vypadá zprvu jako nenápadný program, ale po chvíli zjistíme, že je vybaven s mnoha funkcemi, které se při rýsování velice hodí a ve srovnání s konkurenčními programy určitě není pozadu.Program je navíc plně v češtině.Tuto práci jsem si vybral, protože se mi program v hodinách matematiky zalíbil, práce s ním mě bavila a byla příjemnou změnou.

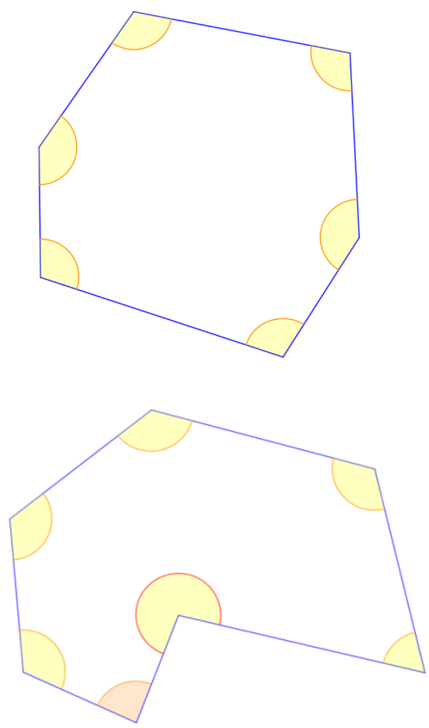
Celá práce se skládá ze čtyř hlavních částí.První část obsahuje přehled vzorců pro plošná tělesa, která jsou potřebná pro další výpočty s tělesy prostorovými.Ve druhé části mé ročníkové práce se zaměřuji na samotné sestrojování konstrukcí v programu Geonext.Postupů konstruování je samozřejmě více, proto se snažím vybrat ty nejefektivnější a nejrychlejší.Některé útvary nejsou úplně přesné (o tom se zmíním dále), ale tato tělesa jsou pouze názorná.Třetí část se skládá z přehledu potřebných vzorců pro výpočty povrchů a obsahů 3D těles. Čtvrtá část je zaměřena na výpočty vlastností těles složených. Cílem této práce je vytvoření učební pomůcky pro hodiny matematiky –jako soubor nejpotřebnějších vzorců s příslušnými obrázky, konstrukce v Geonextu a některé speciální vzorce.

1.Plošné útvary

Plošné útvary jsou velmi důležité i pro konstrukci a výpočty vlastností u prostorových těles, kde se objevují jako stěny, podstavy atd. Jelikož se má práce zabývá především tělesy, tyto plošné útvary zde slouží spíše jako obecný přehled, jejich rozdělení a pro výpočty jejich obvodů a obsahů. Při konstrukci těchto útvarů jsem postupoval „normálně“ a když byl například obdélník hotový, musel jsem ho ještě několika operacemi upravit. Nejprve jsem skryl body (rohy obdélníka) a pomoví nových bodů v blízkosti bodů původních jsem mohl upravovat jejich pozice – tím pádem i popisky, které jsem posléze přejmenoval (na A, B, C a D). Toto jsem udělal proto, že původní popisky bodů překrývali čáry a jejich rozmístění bylo neestetické. (To samé platí i u konstrukcí 3D těles) Pokud chceme označit úhel, můžeme v jeho vlastnostech přepsat text, zobrazující úhel ve stupních, nebo obecně pomocí řeckého písmena (α, β, γ…). Pokud je potřeba zvýraznit úhel 90°, já osobně v celé mé ročníkové práci do popisku píši přímo 90°, protožepouze samotná „tečka“ není téměř vidět. Posledními kroky jsou přejmenování a změna barev u stran a popisků, popřípadě u označení úhlů.***Mnohoúhelníky***

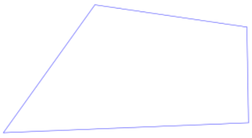
*Mnohoúhelníkem je uzavřená lomená čára (spojené a uzavřené úsečky) a část roviny, kterou tato čára ohraničuje. Vzorec pro spočtení **počtu úhlopříček** je:* $\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\,.\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{3})$*, kde n znamená počet vrcholů. Zvláštním případem je tzv. Pravidelný mnohoúhelník, u něhož jsou stejné všechny jeho vnitřní úhly (tím pádem i strany). Dále lze mnohoúhelníky rozdělit na **konvexní** a **nekonvexní**.(Konvexní úhly – od 0° po 180°. Nekonvexní úhly – od 180° po 360°.)*





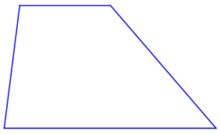
- ***<u>Čtyřúhelník</u>***

Různoběžník



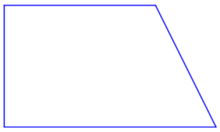
Lichoběžník

- Obecný



- Rovnoramenný

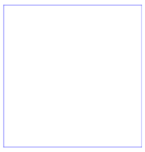
- Pravoúhlý



Rovnoběžník

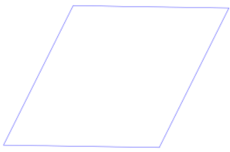
- Obecný

- Čtverec

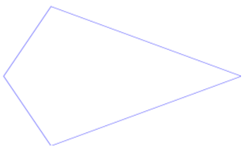


- Obdélník

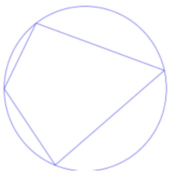
- Kosočtverec



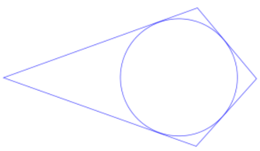
Deltoid

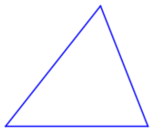
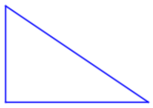
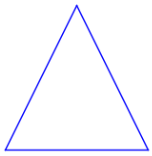
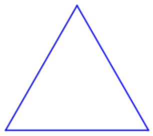


Tětivový čtyřúhelník

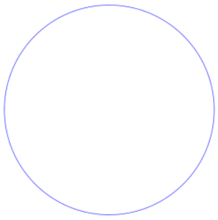


Tečnový čtyřúhelník



- ***Trojúhelník***
  - Obecný
  
  - Pravoúhlý
  
  - Rovnoramenný
  
  - Rovnostranný
  

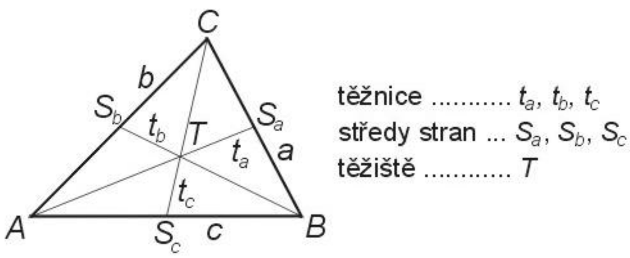
- ***Kružnice***

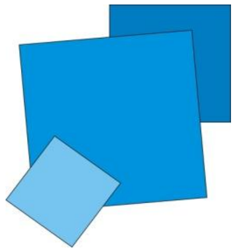


U plošných obrazců se budeme setkávat s těmito označeními:

o - obvod plošného útvaru
S – obsah plošného útvaru

a, b, c, d… - označení stran útvarů
A, B,C… **-** označení vrcholů (bodů)
α, β, γ… - označení příslušného úhlu
v – výška daného útvaru
t – těžnice, (tečna ke kružnici)
T – těžiště
S_a; S_b; S_c – středy stran
u – úhlopříčka
r – poloměr kružnice
d – průměr kružnice
ϱ - poloměr kružnice vepsané
r - poloměr kružnice opsané





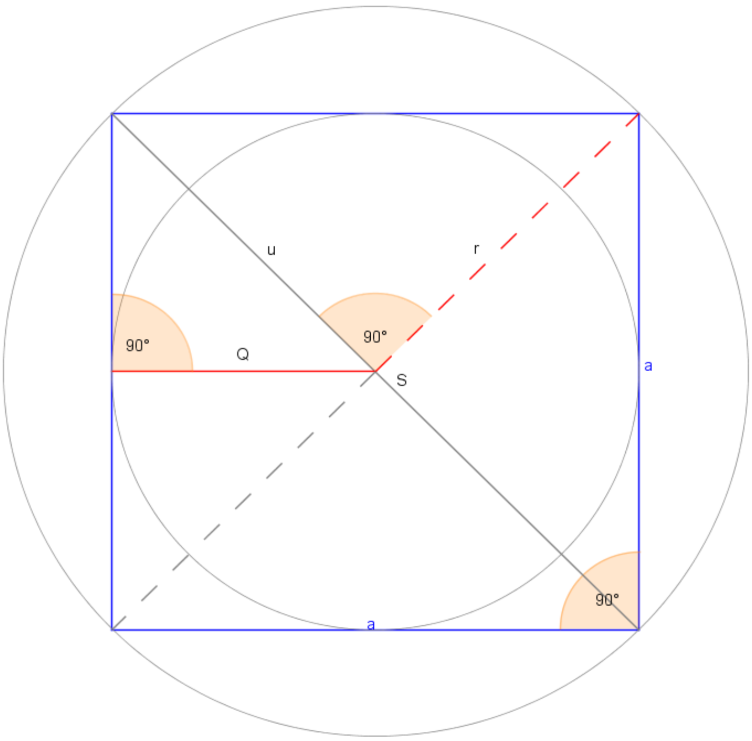
1.1. Čtverec

Mnohoúhelníky > Pravidelný mnohoúhelník

Čtyřúhelníky >Rovnoběžníky >Pravoúhlé / Rovnostranné> Čtverec

Čtverec je plošný útvar, který má 4 stejně dlouhé strany **„a."** Sousední strany jsou na sebe kolmé => protilehlé jsou rovnoběžné. Je to vlastně speciální případ obdélníku, který má stejné všechny strany. Lze mu také opsata vepsat kružnici (**r** – poloměr kružnice opsané, **Q** – poloměr kružnice vepsané). Tyto kružnice mají střed v průsečíku úhlopříček čtverce.U čtverce platí, že úhlopříčky **„u"** mezi sebou svírají úhel 90° - kolmé, jsou stejně dlouhé, úhlopříčka půlí oba protilehlé úhly. Osově souměrný je podle čtyř os. Čtverec je též stěnou (podstavou) mnoha prostorových těles – krychle, čtyřboký hranol, čtyřboký jehlan, čtyřboký komolý jehlan. Součet vnitřních úhlů = 360°.

Čtverec	
Obvod:	$o = 4a$
Obsah:	$S = a^2$
Poloměr opsané kružnice:	$r = \frac{u}{2}$
Poloměr vepsané kružnice:	$\varrho = \frac{a}{2}$
Délka úhlopříčky:	$u = a\sqrt{2}$
Počet vrcholů:	4
Vnitřní úhel při vrcholu:	90°
Stěna (podstava)u:	Krychle, hranol, jehlan, komolý jehlan



Obvod: $o = 4a$

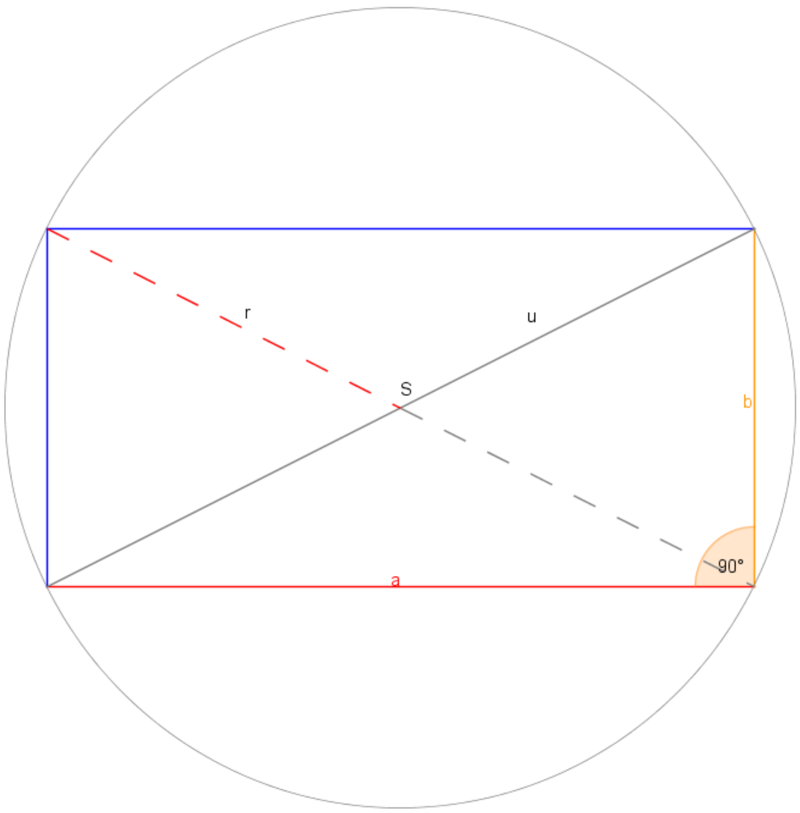
Obsah: $S = a^2$

Délka úhlopříčky: $u = a\sqrt{2}$

Poloměry kružnic: $r = \frac{u}{2}$; $\varrho = \frac{a}{2}$

1.2. Obdélník

Čtyřúhelníky >Rovnoběžníky > Pravoúhlé / Různostranné> Obdélník



Obvod: $o = 2(a + b)$

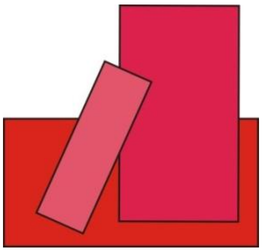
Obsah: $S = a \cdot b$

Délka úhlopříčky:

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Poloměr kružnice opsané:

$$r = \frac{u}{2}$$

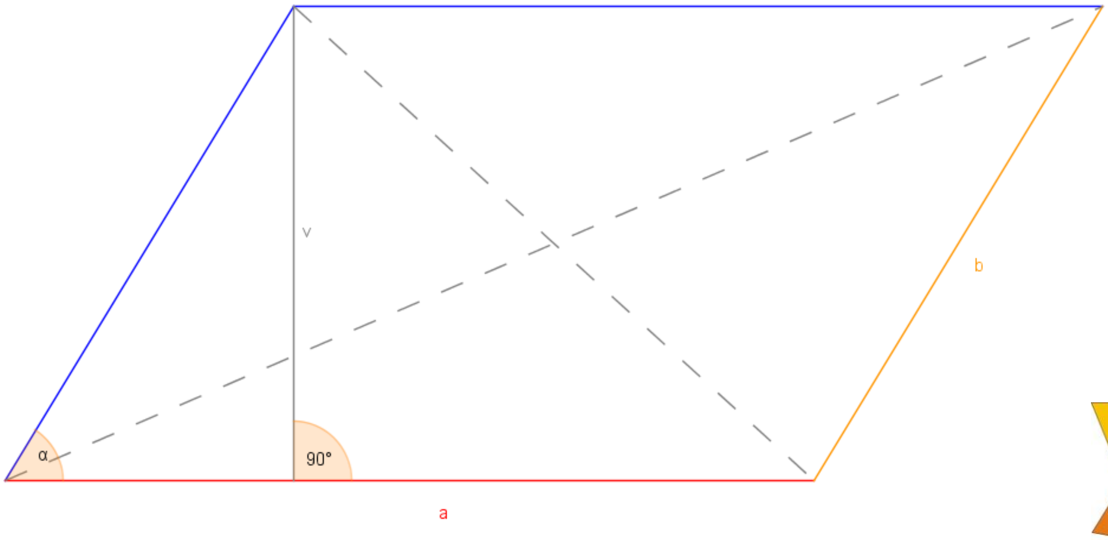


Podobně jako u čtverce zde platí, že strany **(a, b)** jsou na sebe kolmé a protilehlé **(a-a, b-b)**jsou spolu rovnoběžné. Jiné je to však s délkami obdélníka – protilehlé (rovnoběžné) strany mají stejné velikosti, avšak každý pár protilehlých stran má vůči sobě velikost jinou. (Při stejných velikostech by se jednalo o čtverec.) Úhlopříčky **„u“**se tady také navzájem půlí, ale už zde neplatí rozpůlení úhlu. U obdélníka platí středová souměrnost podle průsečíku úhlopříček a lze mu kružnici pouze opsat, taktéž se středem v průsečíku úhlopříček. Vepsat mu ji nelze, protože by se nedotýkala všech čtyř stran zároveň. Součet vnitřních úhlů = 360°.

Obdélník	
Obvod:	$o = 2(a + b)$
Obsah:	$S = a \cdot b$
Poloměr opsané kružnice:	$r = \frac{u}{2}$
Poloměr vepsané kružnice:	–
Délka úhlopříčky:	$u = \sqrt{a^2 + b^2}$
Počet vrcholů:	4
Vnitřní úhel při vrcholu:	90°
Stěna (podstava)u:	Kvádr, hranol, jehlan, komolý jehlan

1.3. Rovnoběžník

Čtyřúhelníky > Rovnoběžníky> Obecný rovnoběžník



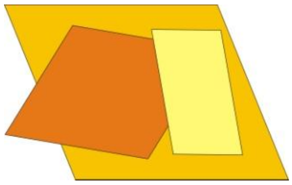
Obvod:

$o = 2(a + b)$

Obsah:

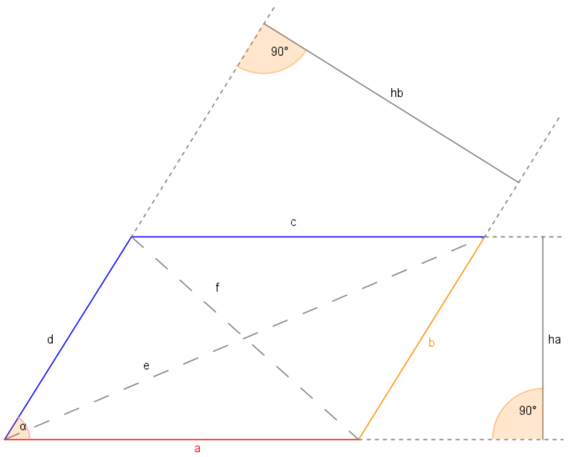
$S = a \cdot v_a$

$S = b \cdot v_b$



Rovnoběžníky mají protilehlé strany i úhly shodné a dají se rozdělit na: **Pravoúhlé** (obdélník a čtverec) a **Kosoúhlé** (kosočtverec a kosodélník). Dalším rozdělení rovnoběžníků je na **Rovnostranné** (všechny strany stejně dlouhé – kosočtverec, čtverec) a **Různostranné** (oba páry délek mají navzájem různé velikosti stran – kosodélník, obdélník). Kružnice lze opsat a vepsat čtverci a obdélníku, vepsat jen čtverci. Úhlopříčky se opět vzájemně půlí. Vyskytuje se zde výška **„v,“** potřebná k výpočtu obsahu.

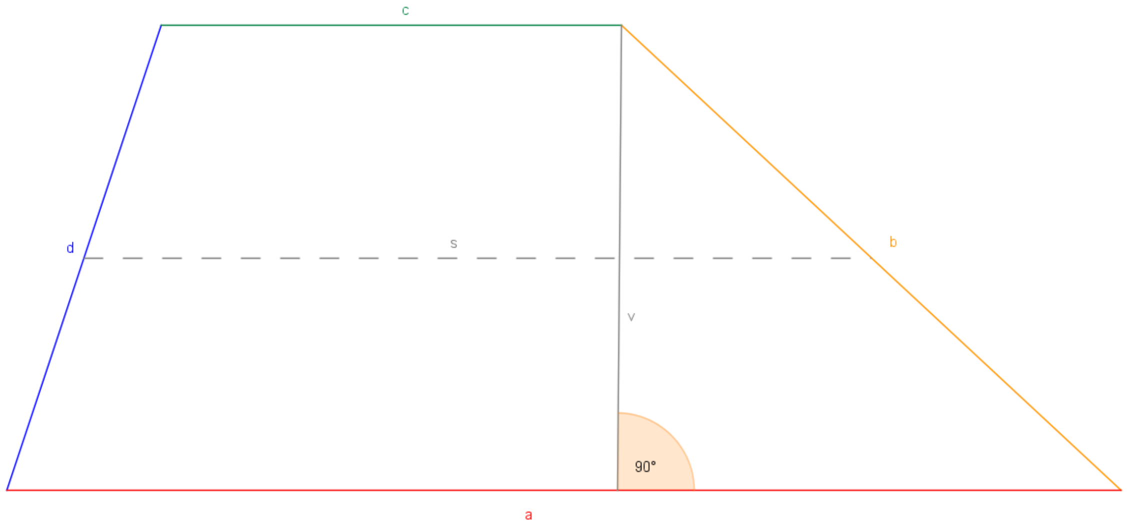
Součet vnitřních úhlů = 360°.



Rovnoběžník	
Obvod:	$o = 2(a + b)$
Obsah:	$S = a \cdot v$
Poloměr opsané kružnice:	–
Poloměr vepsané kružnice:	–
Délka úhlopříčky:	$e = \sqrt{(a + h_a.cotg\ \alpha)^2 + h_a^2}$ $f = \sqrt{(a - h_a.cotg\ \alpha)^2 + h_a^2}$
Počet vrcholů:	4
Stěna (podstava):	Hranol, jehlan, komolý jehlan

1.4. Lichoběžník

Čtyřúhelníky >Lichoběžníky>Obecný lichoběžník



Obvod: $o = a + b + c + d$

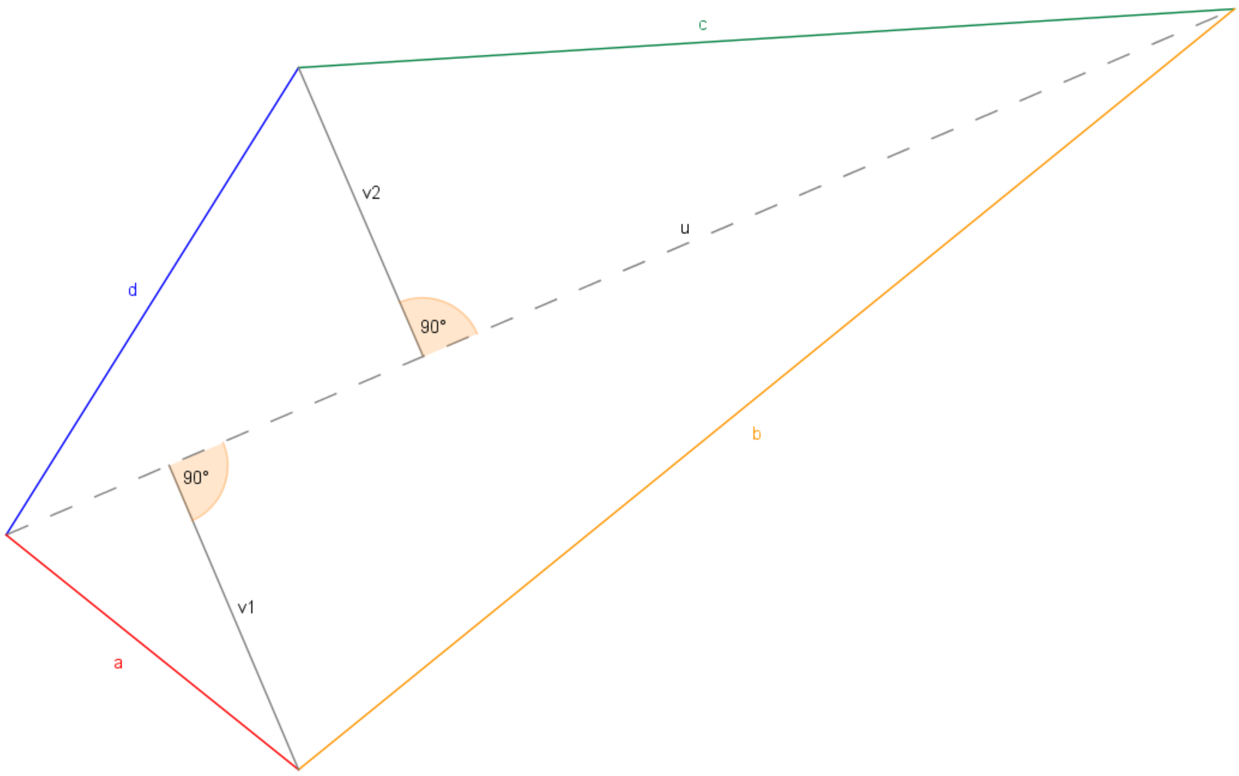
Obsah: $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$

Délka střední příčky: $s = \frac{a+c}{2}$

Lichoběžník	
Obvod:	$o = a + b + c + d$
Obsah:	$S = \frac{a+c}{2} \cdot v$
Střední příčka:	$s = \frac{a+c}{2}$
Počet vrcholů:	4
Stěna (podstava):	Hranol, jehlan, komolý jehlan

1.5. Různoběžník

Čtyřúhelníky >Různoběžníky



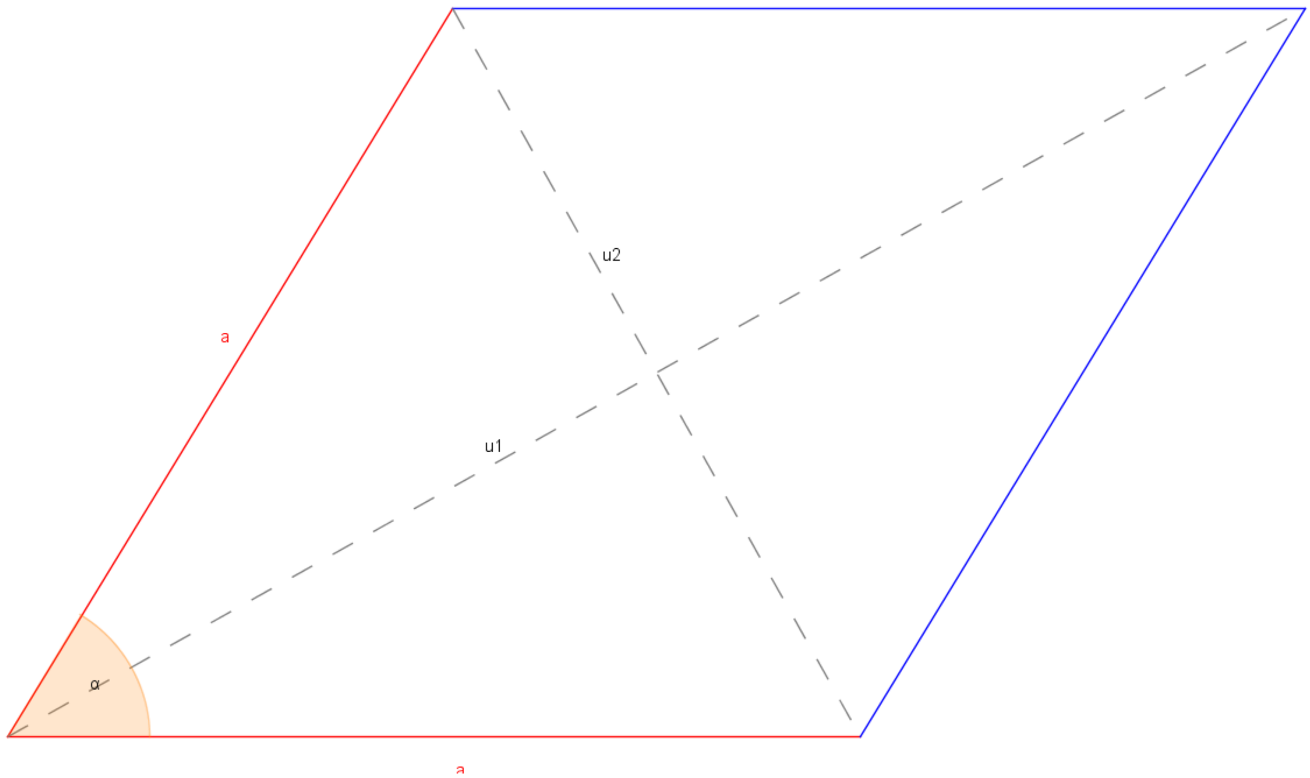
Obvod: $o = a + b + c + d$

Obsah: $S = \frac{u \cdot (v_1 + v_2)}{2}$

Různoběžník	
Obvod:	$o = a + b + c + d$
Obsah:	$S = \frac{u \cdot (v_1 + v_2)}{2}$
Počet vrcholů:	4
Stěna (podstava):	Hranol, jehlan, komolý jehlan

1.6. Kosočtverec

Čtyřúhelníky >Rovnoběžníky > Kosočtverec



Obvod: $o = 4a$ $a^2 = \left(\frac{u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{2}\right)^2$

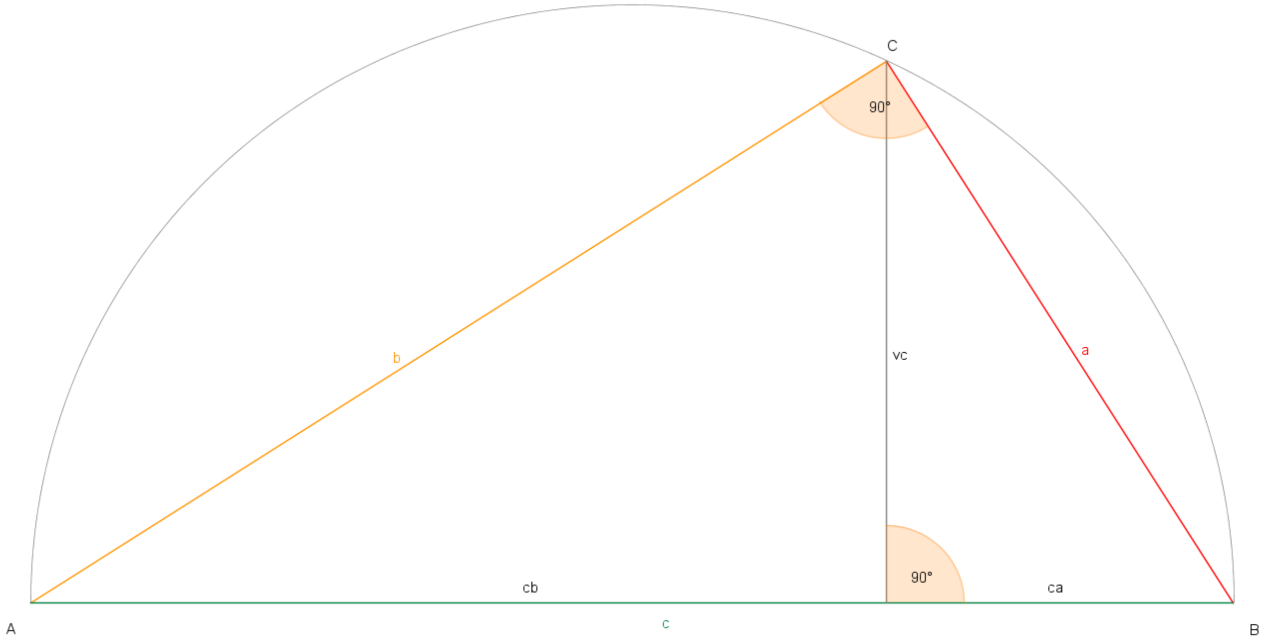
Obsah: $S = \frac{u_1 \cdot u_2}{2} = a^2 \sin\alpha$ $S = a \cdot v$

Kosočtverec	
Obvod:	$o = 4a$
Obsah:	$S = \frac{u_1 \cdot u_2}{2}$
Počet vrcholů:	4
Stěna (podstava):	Klenec, hranol, jehlan

1.7. Trojúhelník

Trojúhelníky > Obecný/Pravoúhlý/Rovnoramenný/Rovnostranný trojúhelník

Součet vnitřních úhlů: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Obvod: $o = a + b + c$

Obsah: $S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \quad * \, s = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ *cyklická záměna, u pravoúhlého trojúhelníka-* $S = \frac{a \cdot b}{2}$

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin\gamma$ *cyklická záměna*

$S = \frac{abc}{4r}$ *r – poloměr kružnice opsané* $r = \frac{abc}{4S}$; $r = \frac{a}{2 \, sin \, \alpha}$ *cykl. z.*

$S = \frac{a+b+c}{2} \cdot \varrho$ *ϱ – poloměr kružnice vepsané* $\varrho = \frac{S}{s}$

Pythagorova věta:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Euklidova věta:

pro výšku: $v^2 = c_a \cdot c_b$

pro odvěsny: $a^2 = c \cdot c_a$, $b^2 = c \cdot c_b$

Sinová věta: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$

Kosinová věta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha$

cyklická záměna

Tyto věty jsou často využívány u 3D těles, respektive u jejich podstav či stěn.

1.8. Rovnoramenný trojúhelník

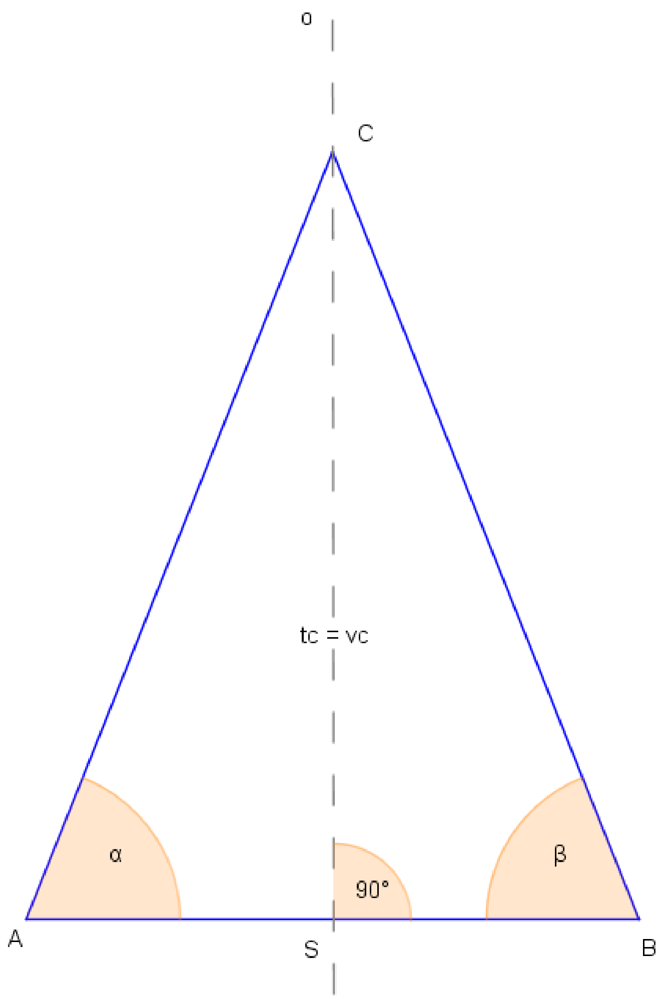
Obvod: $o = a + b + c$

Obsah: $S = a^2 sin\gamma$

$S = \frac{a^2}{2} sin2\alpha$

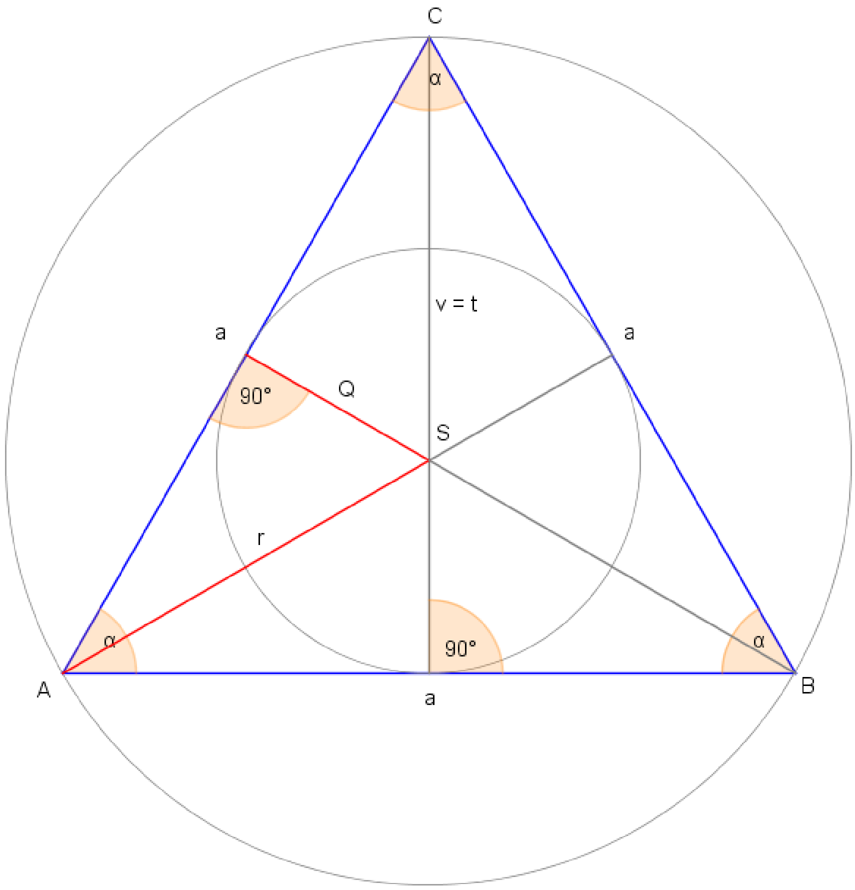
(platí zde cyklická záměna)

Obsah lze spočítat i ze v vztahů pro obecný trojúhelník.



1.9. Rovnostranný trojúhelník

Trojúhelníky > Rovnostranný trojúhelník



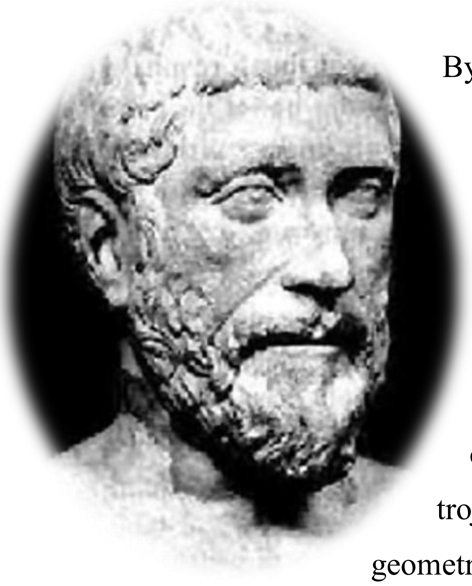
U rovnostranného trojúhelníka lze obsah spočítat takto:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné (60°), společně se stranami, výškami i těžnicemi. Střed vepsané i opsané kružnice je v témže bodě.

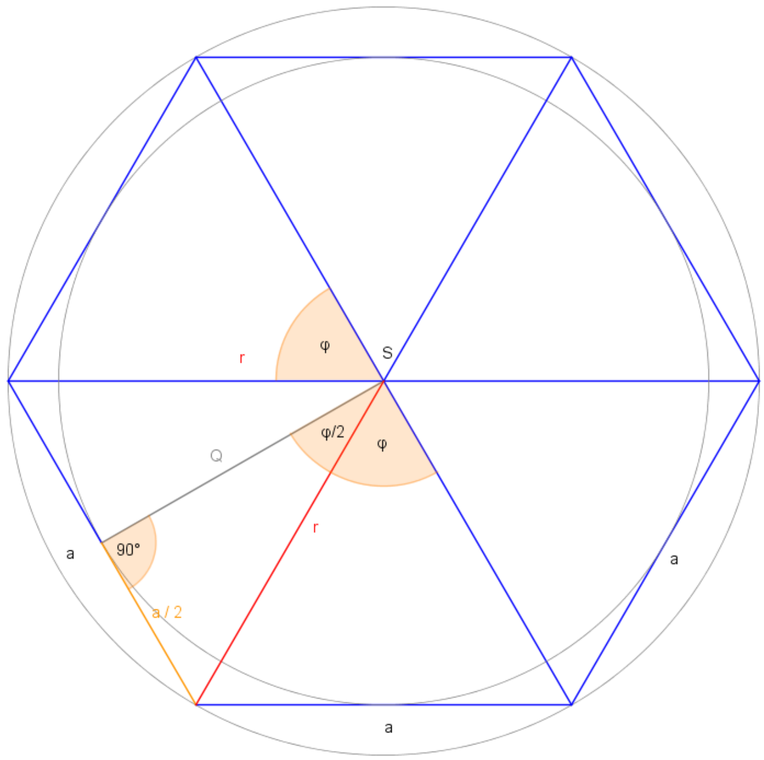
Obecný trojúhelník	
Obvod:	$o = a + b + c$
Obsah:	$S = \frac{a \cdot v_a}{2}, S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin\gamma$
Počet vrcholů:	3
Součet **vnitřních úhlů:**	180°
Stěna (podstava):	Hranol, jehlan, komolý jehlan

Pythagoras ze Samu (6. – 5. Stol. př. n. l.)



Byl to legendární řecký filosof a matematik. Správy o jeho životě jsou však velmi málo spolehlivé. On se svými žáky vynaložil veliké úsilí na to, aby geometrii dali vědecký charakter. Pythagorovi se připisuje hlavně věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníka, čtyřúhelníka a pravidelných mnohoúhelníků a dále pak geometrický způsob řešení kvadratických rovnic. Nejslavnější je však známá Pythagorova věta, která vyjadřuje souvislost mezi čtvercem sestrojeným nad odvěsnami a přeponou pravoúhlého trojúhelníka. Tato věta se považuje za jednu z nejdůležitějších vět geometrie, využívanou při řešení geometrických problémů.

1.10. Pravidelný n-úhelník



Obvod: $o = n \cdot a$

Obsah: $S = n \cdot \frac{a}{2} \cdot \varrho$

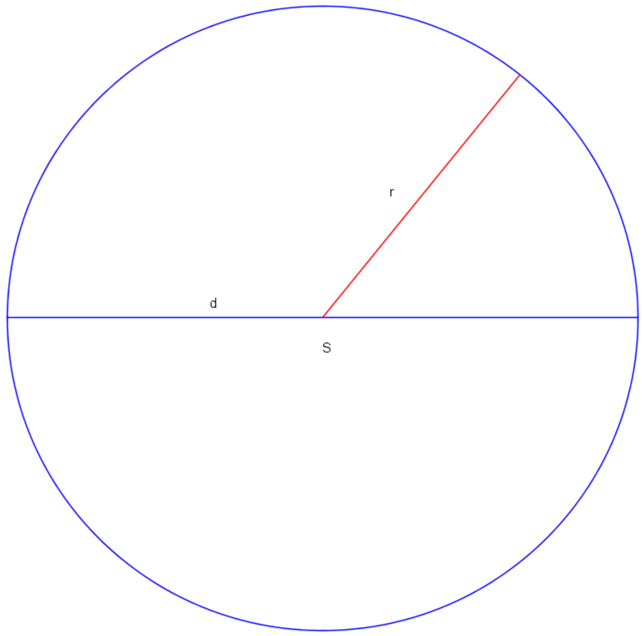
$S = \frac{o \cdot \varrho}{2}$

Pravidelný n-úhelník	
Obvod:	$o = n \cdot a$
Obsah:	$S = n \cdot \frac{a}{2} \cdot \varrho$, $S = \frac{o \cdot \varrho}{2}$
Počet úhlopříček:	$\frac{n(n-3)}{2}$
Počet vrcholů:	n
Součet **vnitřních úhlů:**	$(n-2) \cdot 180°$
Stěna (podstava):	Hranol, jehlan, komolý jehlan

1.11. Kružnice a kruh

Kružnice: Všechny body, které mají stejnou vzdálenost od středu S (poloměr r).

Kruh: Všechny body, které mají stejnou vzdálenost od středu S, nebo menší (menší než poloměr r).$o = \omega r + 2r \sin\frac{\omega}{2}$



Délka kružnice – obvod kruhu: $o = 2\pi r,\ \ o = \pi d$

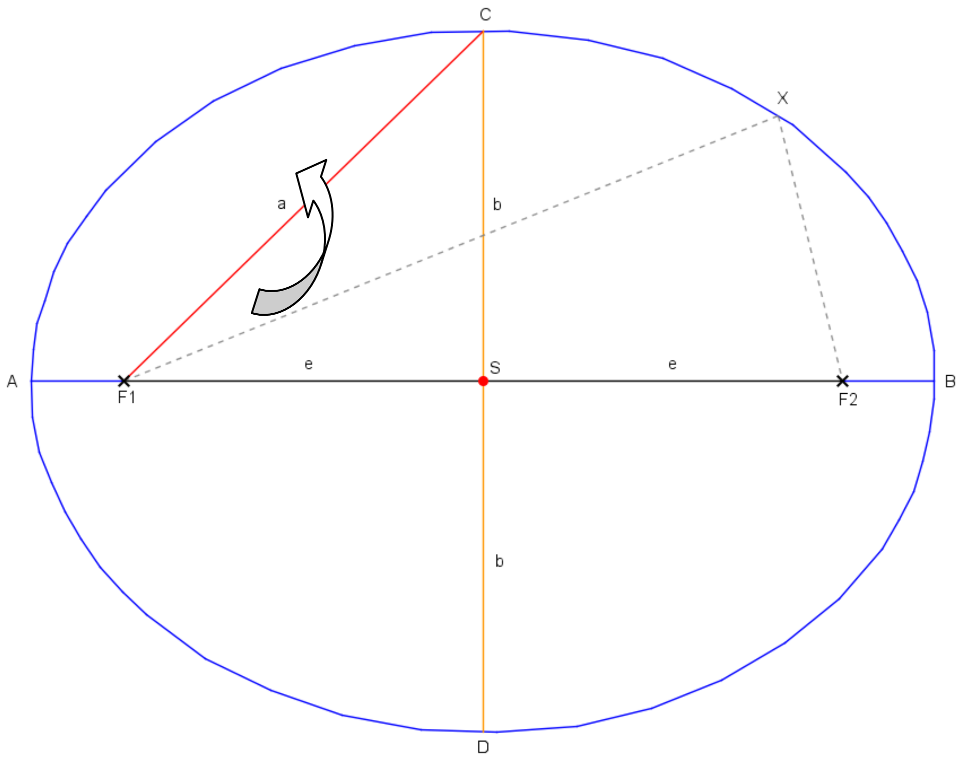
Obsah kruhu: $S = \pi r^2 \omega = 2\alpha$

$S = \frac{\pi d^2}{4}$

Kružnice a kruh	
Obvod:	$o = 2\pi r,\ \ o = \pi d$
Obsah:	$S = \pi r^2$, $S = \frac{\pi d^2}{4}$
Počet vrcholů:	Nekonečně mnoho
Stěna (podstava):	Válec, kužel, komolý kužel

1.12. Elipsa

Elipsa vznikne tak když si představíme, že body F1 a F2 (ohniska) jsou kolíky v zemi a k oběma těmto kolíkům se přiváže provázek delší než je vzdálenost obou kolíků od sebe. Součet vzdáleností od obou ohnisek k bodu X mají všechny body elipsy stejný. Poté se provázek napne a jeho opisující tvar (pohybující se bod X) je právě elipsa.



Délka úsečky „a“ je rovna délce úsečky |AS|. Pokud je úsečka „a“ rovna úsečce „b,“ jedná se o kružnici. Při přepočtech délek úseček a, b, e je používána Pythagorova věta.

Obvod: $o \doteq \pi(a+b)$

$$o \doteq \pi\left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]$$

Obsah: $S = \pi ab$

Pomocné vzorce

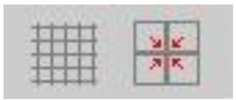
Výstřednost e: $\boldsymbol{e} = \sqrt{a^2 - b^2}$

2. Tělesa

V Geonextu samozřejmě lze zkonstruovat i 3D tělesa. Není to však program stavěný pro tělesa a nemá na to ani žádnou speciální funkci. Sestrojit se ale dají geometrickou metodou, kde je šířka tělesa natočena pod úhlem 45° a o $\frac{1}{2}$ *její skutečné délky zkrácená. Takto vytvořená tělesa jsou určena pouze pro názornost, například na rozdíl od AutoCadu, kde můžeme tělesa natáčet, stínovat atd. Pokud chceme rozlišit barvami některé stěny, umožní to funkce „Polygon," která stěnu vybarví a poté můžeme měnit barvy. Dokonce lze nastavit i intenzitu průhlednosti.*

2.1. Sestrojování těles

Program Geonext neumí pouze kreslení základních plošných útvarů a obrazců, ale lze v něm také bez větších problémů nakreslit tělesa trojrozměrná. Je to program dynamické geometrie, ve kterém lze dané objekty upravovat a také zachovává vztahy mezi objekty při jejich pohybu. Ovládat program se dá víceméně dvěma způsoby. Prvním způsob je pomocí roletových lišt, které nalezneme nad kreslící plochou. Druhý způsob je menu s příslušnými ikonkami v levé části. Protože Geonext má mnoho užitečných funkcí, nabízí se i více způsobů jak sestrojit potřebné útvary či tělesa.

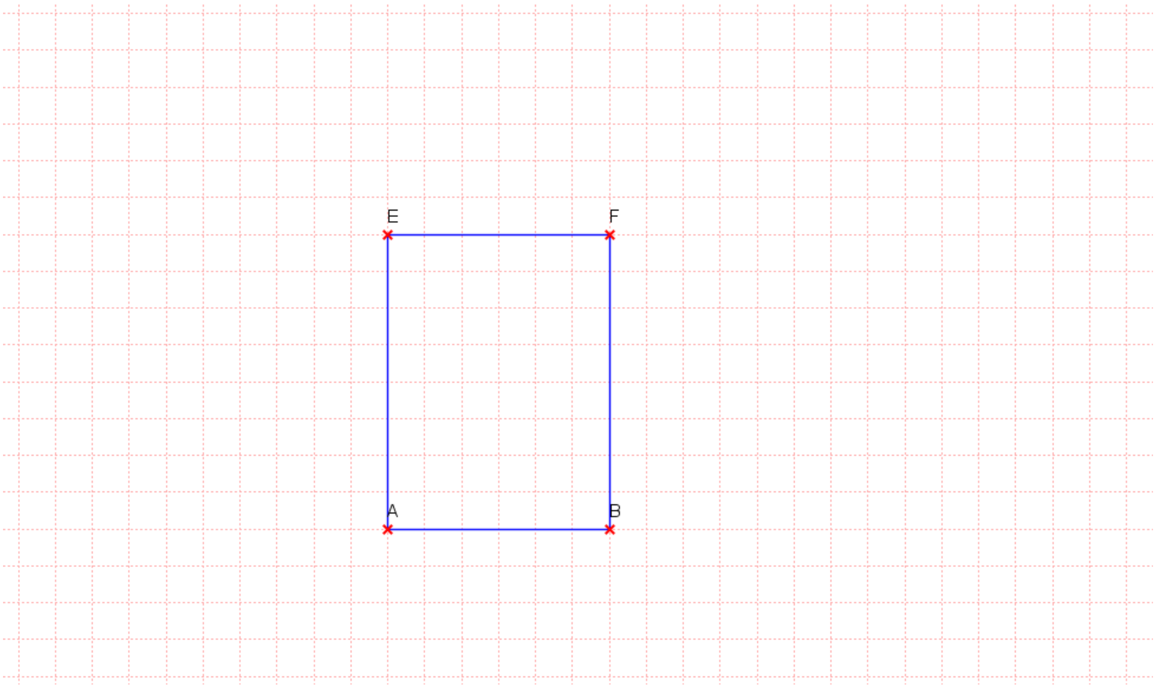


U sestrojování prostorových těles je pro usnadnění práce vhodné si nastavit tzv. „Zobrazení mřížky" a poté volbu „Přichycení bodu k mřížce." Tyto volby nám značně usnadní a urychlí práci. Samotné zobrazení mřížky je spíše jen orientační, ale volba která bod k mřížce přichytí je velmi užitečná hlavně pro osově souměrná tělesa.

Já osobně ji používám ze začátku konstruování, ale při větším počtu čar je tato volba spíše zpomalující, jelikož body, které chceme vložit blízko mřížky se na ni automaticky naváží, proto je vhodné tut volbu později vypnout a přídadně potřeby znovu zapínat a vypínat. Při první volbě se na kreslící ploše objeví šedá orientační mřížka, při volbě druhé mříka zčevená. Lze však zapnout přichycování k mřížce, aniž bychom předtím mřížku zobrazovali. V této části se zabývám konstrukcí kvádru a válce, protože se jedná o různé konstrukce: „hranaté" a o těleso s kruhovou podstavou. Ostatní tělesa lze narýsovat podobným způsobem jako tato.

- **Sestrojení kvádru**

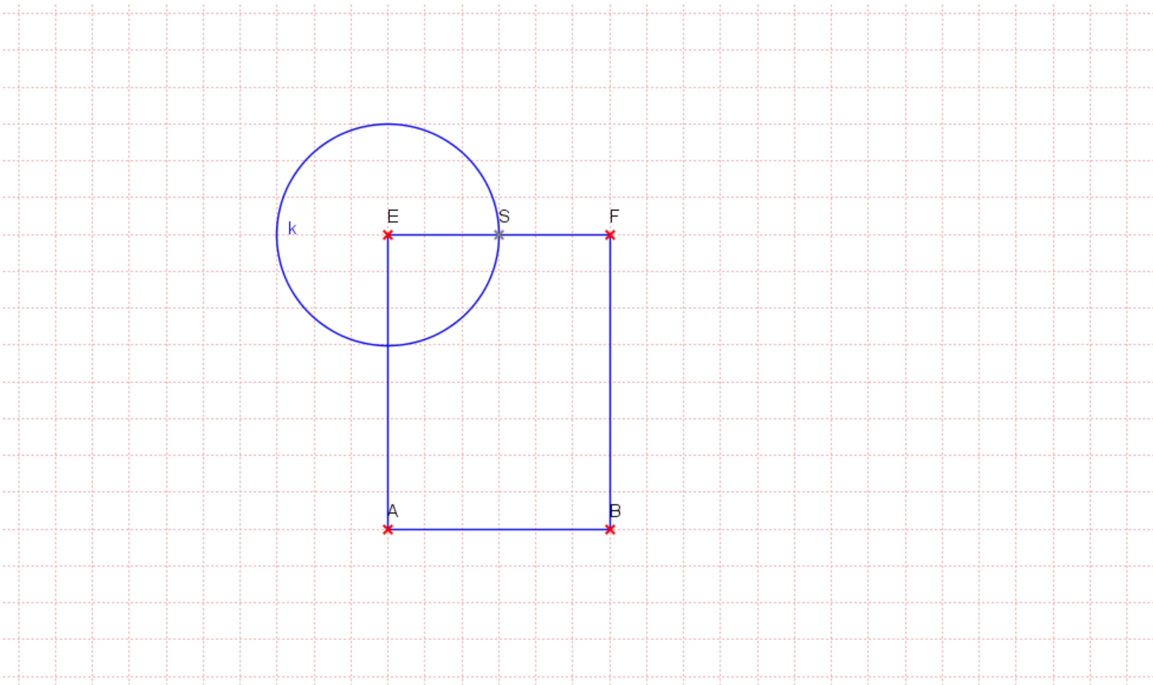
V prvním kroku sestrojíme obdélník pomocí úseček. Kolmost nám zajišťuje mřížka, která při zapnutí volby „Přichycení bodu" zčervená.



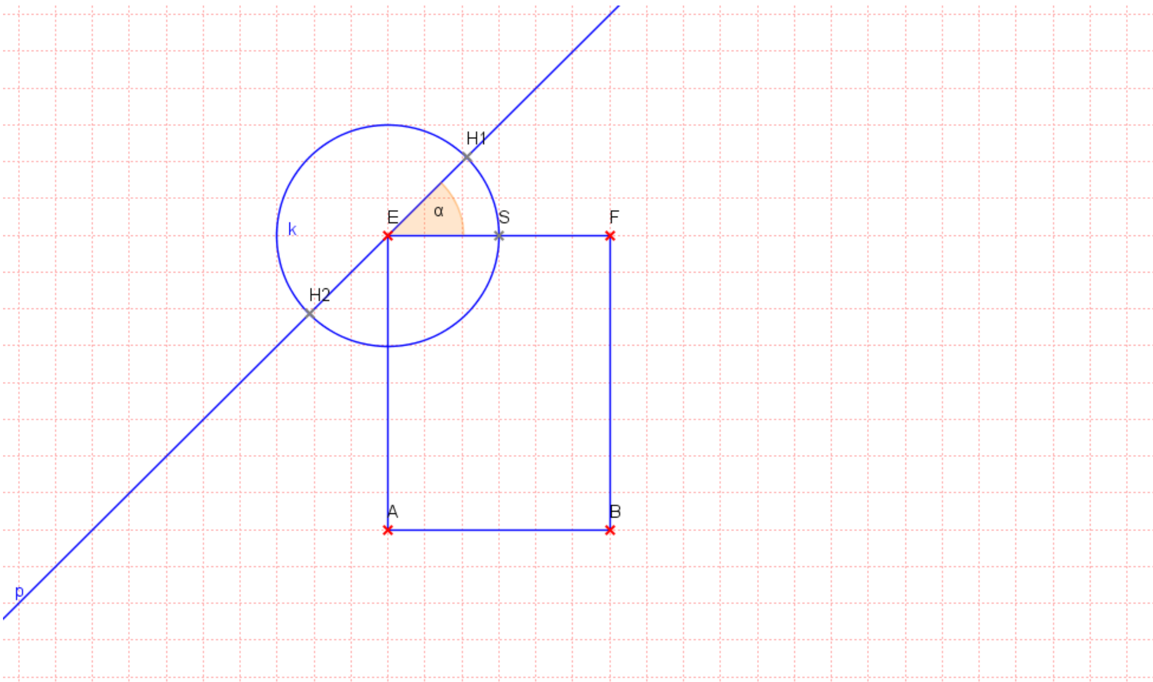
Sestrojíme kružnici **k** se středem **E** a poloměrem $\frac{1}{2}$ **EF**.

Způsob 2 :

Zde se nám nabízí také jiná možnost a to ta, že k úsečce ***SF*** *vytvoříme úhel 45°. Docílíme toho přes Objekty-Úhly-Úhel(zadat velikost). Nejprve klikneme na bod* ***E****, poté na* ***F*** *(pokud chceme, aby úhel byl v bodě* ***F****, klikneme na body v opačném pořadí) a zobrazí se nám tabulka, do které napíšeme potřebný úhel – v tomto případě 45°. Po zadání hodnoty úhlu se zobrazí bod, který po spojení úsečky s bodem, na který jsme kliknuli dříve, tvoří potřebný úhel.*



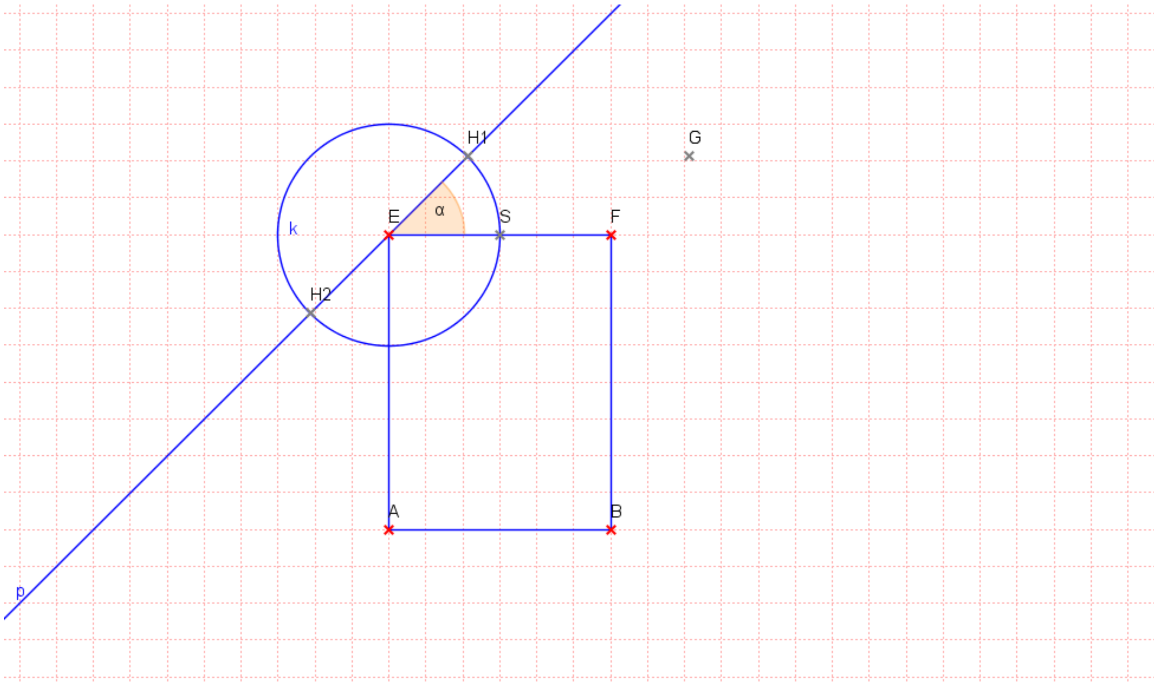
Dalším krokem je sestrojení přímky **p**, procházející bodem **E** a svírající s úsečkou **EF** úhel 45°. Průnikem přímky **p** a kružnicí k nám vzniknou dva body: **H1** a **H2**.



Pro vznik horní podstavy kvádru (a tím bodu **G**) můžeme také použít několik řešení. Asi nejrychlejším způsobem je volba „Bod rovnoběžníku," kdy program sám bod **G** dokreslí. Aby bod rovnoběžníku vznikl nad bodem **F**, musíme nejdřív kliknout na tuto volbu a poté postupně na všechny tři body v pořadí **E-F-H1**, nebo **F-H1-F**.

Způsob 2:

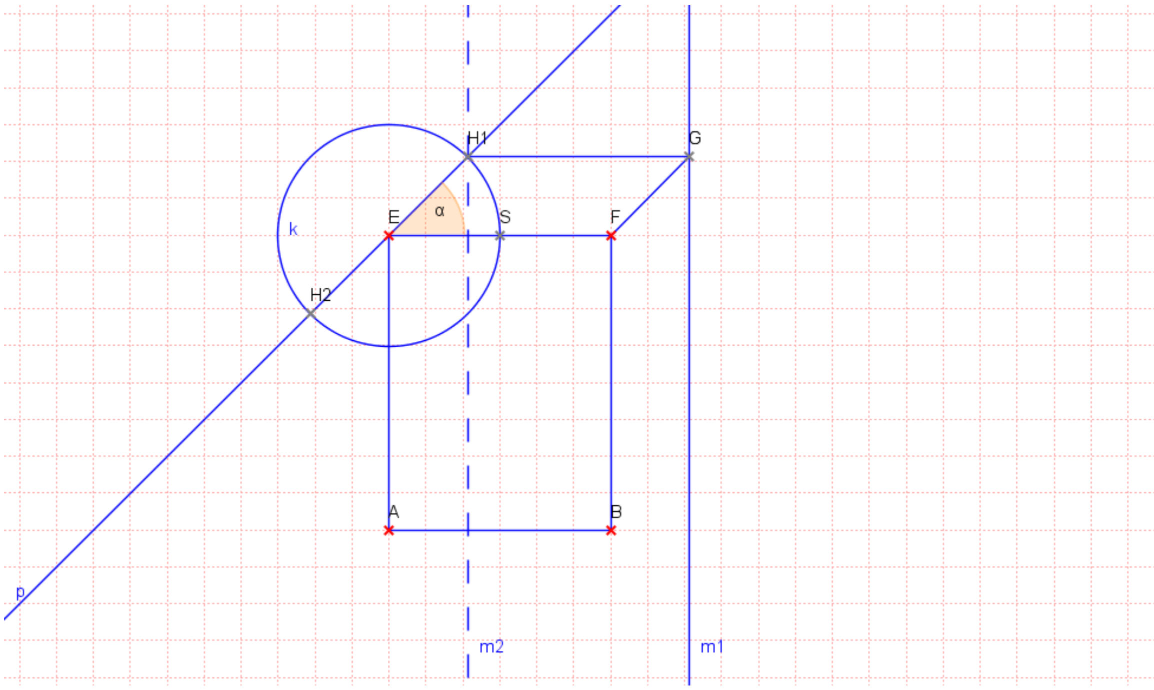
Dalším způsobem sestrojení bodu **G** *je přes rovnoběžky, které však následně musíme skrýt a vzniklé body na nich propojit úsečkami.*



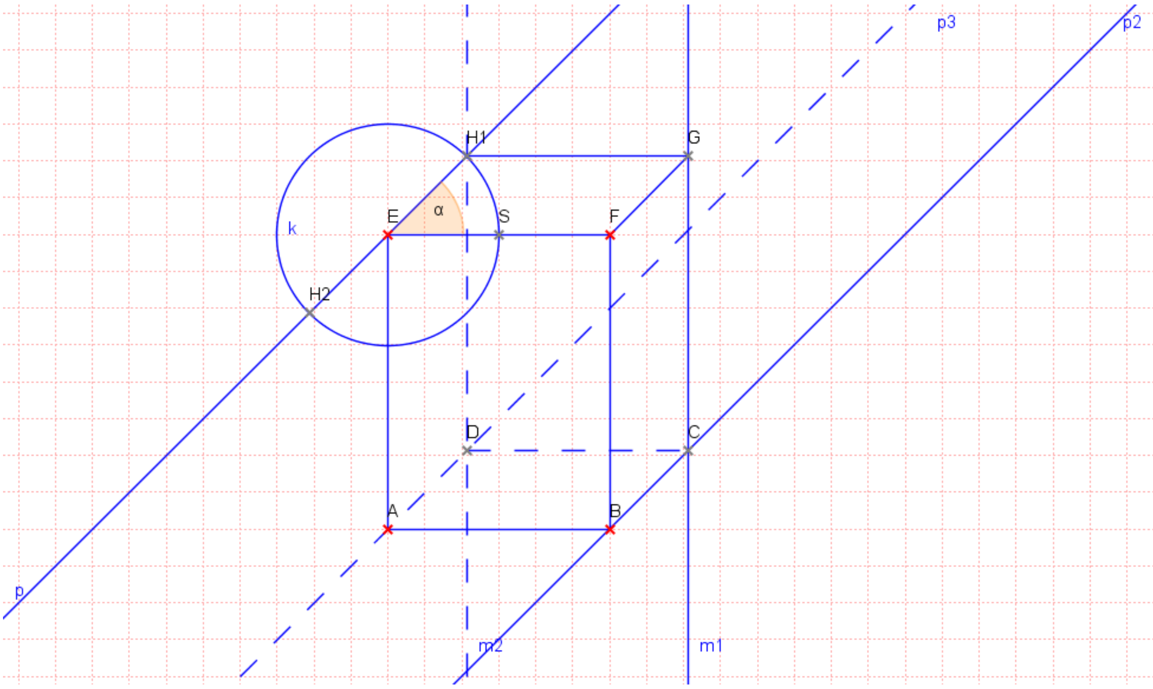
Sestrojíme kolmice **m1** a **m2** k úsečce **H1G** v bodech **H1** a **G1**.

Způsob 2:

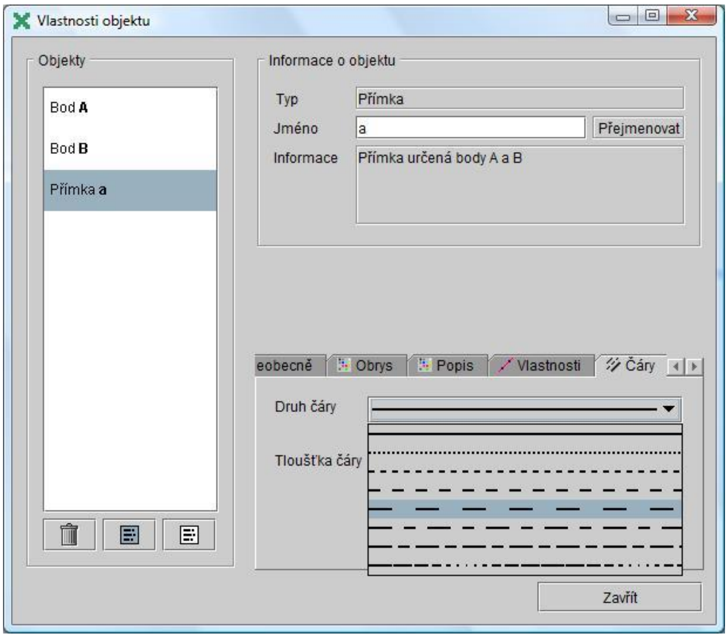
Jiným řešením je sestrojení rovnoběžek ***m1*** *a* ***m2*** *k úsečce* ***AE****. Nebo dva zbývající body kvádru dokreslíme opět pomocí volby „Bod rovnoběžníku.“*

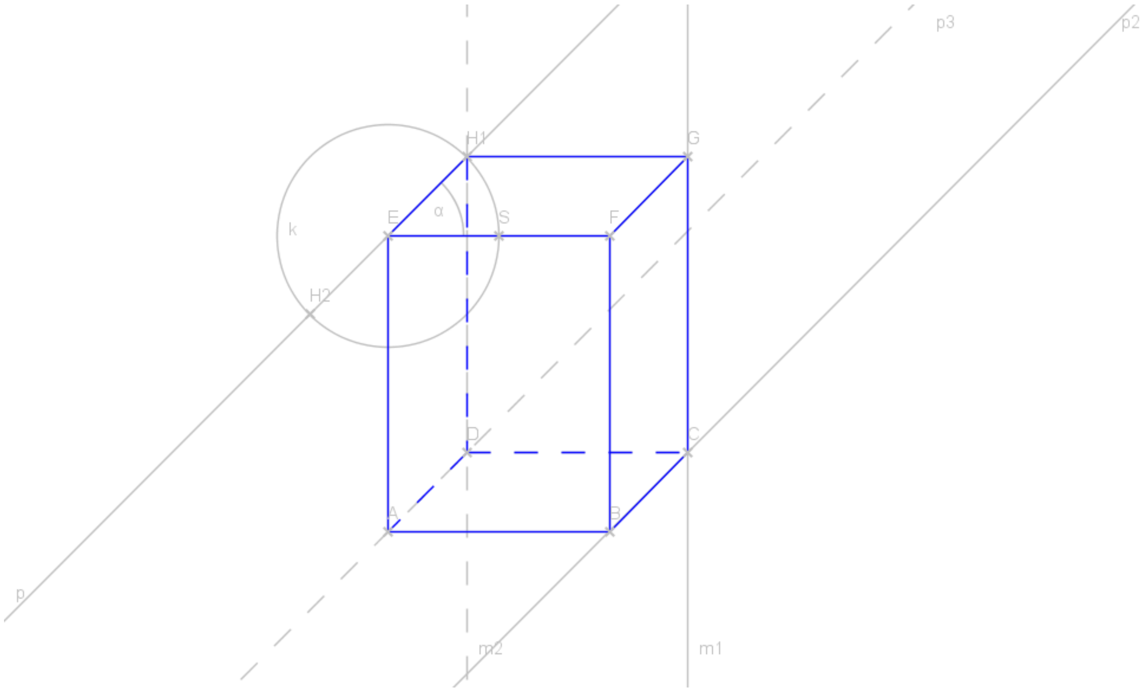


Přes body **A** a **B** vedeme rovnoběžky **p2** a **p3** s přímkou **p**. Tím vzniky body **C** a **D** a celý kvádr.



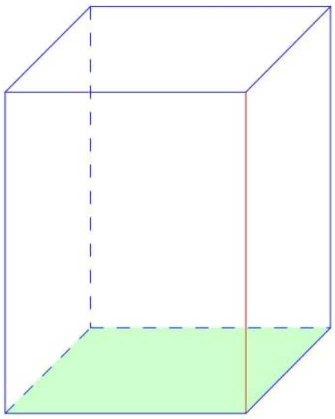
Pomocné čáry skryjeme volbou „Skrýt“ a vzniklý kvádr dokreslíme úsečkami. Části kvádru v zákrytu narýsujeme čárkovaně – přes Vlastnosti objektu, zde nalezneme požadovanou úsečku a u ní volbu „Druh čáry.“

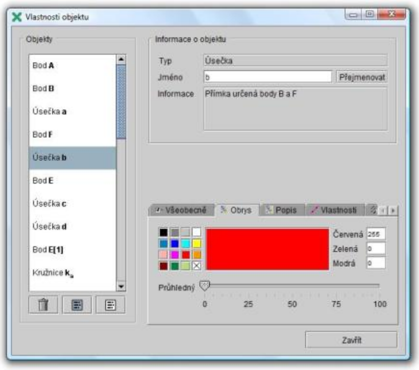




Pomocí polygonu ještě můžeme pro názornost zvýraznit postavu kvádru, to je však třeba udělat

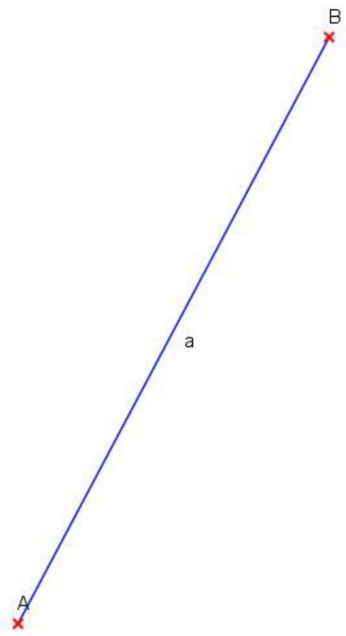
ještě než skryjeme body spodní podstavy, nebo je musíme znovu zviditelnit. Pokud polygon nakreslíme, spodní podstava je tím pádem tvořena dvěma úsečkami na sobě a ty jsou proto tlustší. Proto z estetického hlediska

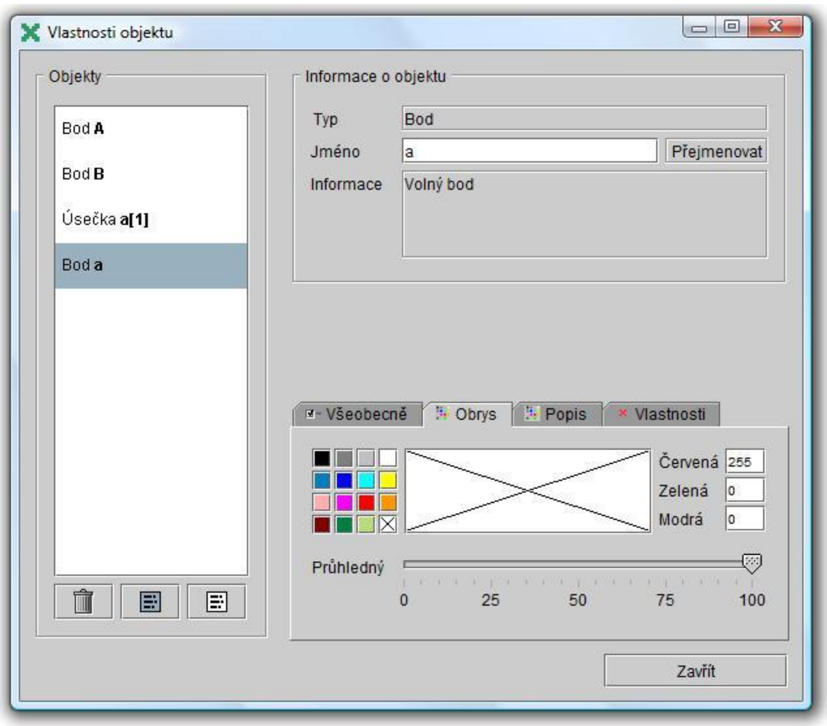




poslední čtyři úsečky polygonu skryjeme a pod nimi zůstanou úsečky původní. Nakonec samozřejmě můžeme pohrát s barvami.

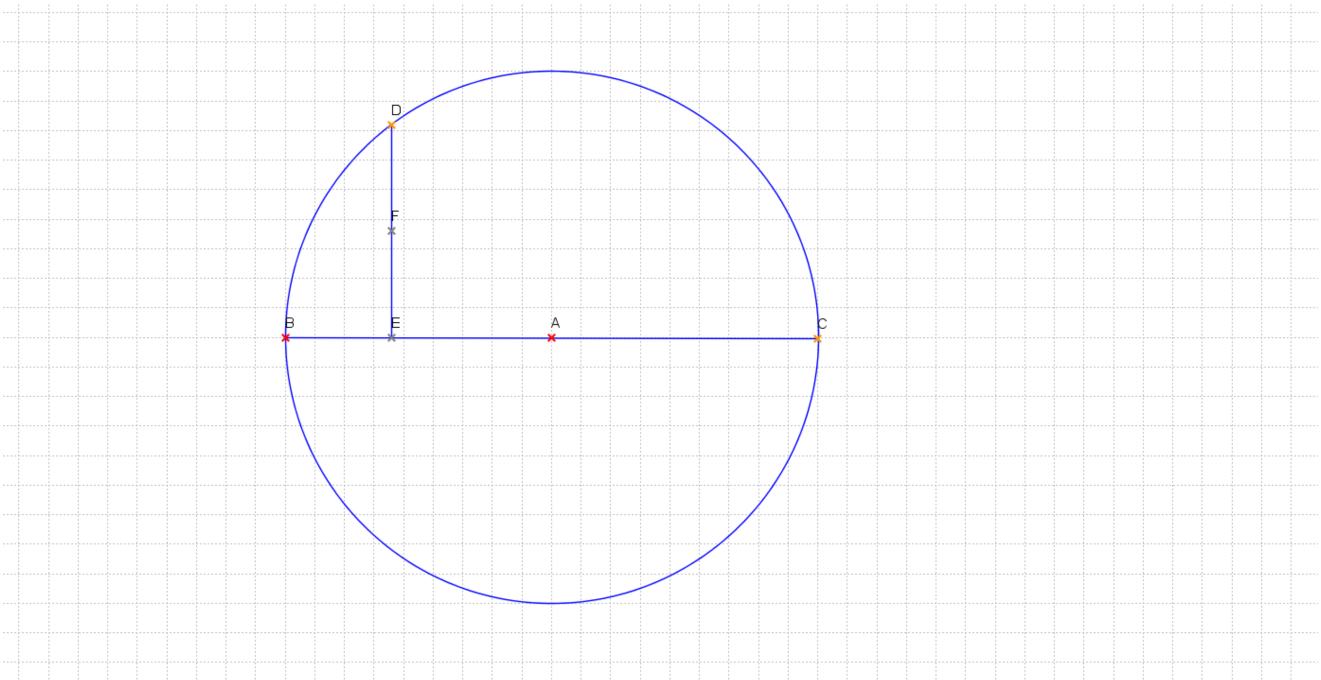
Pokud ještě chceme zobrazit popisky čar a popisek se nezobrazí tak, jak bychom si představovali (hodně blízko čáry, přímo na čáře – viz obrázek), musíme vytvořit bod, ten pojmenovat tak jako čáru a s ním můžeme volně pohybovat. U tohoto bodu v jeho vlastnostech skryjeme pouze jeho obrys. (viz. Konstrukce plošných útvarů)





- **<u>Sestrojení válce</u>**

Při tomto sestrojení válce budou jeho elipsovité základny pouze přibližné, protože se skládají z jednotlivých úseček.

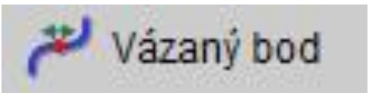


Jak tedy sestrojit podstavu válce - elipsu?

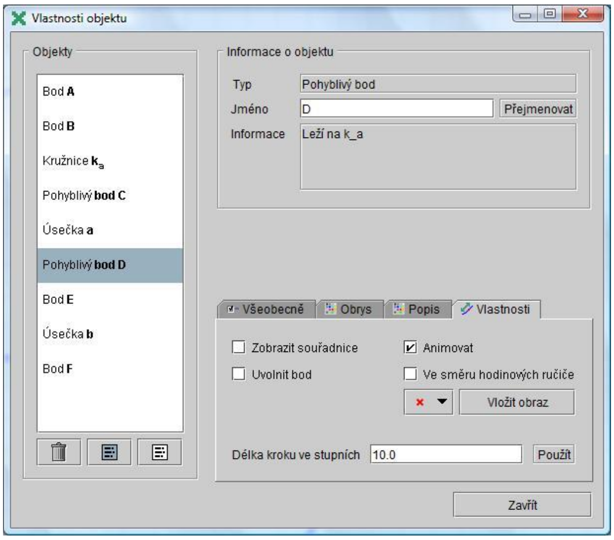
Elipsa se dá sestrojit dvěma způsoby. První způsob je značně zdlouhavější, ale umožní nám skrytou část elipsy udělat čárkovaně. Druhý způsob je rychlejší, elipsa je přesná, ale nedá se s ní nijak manipulovat. O tomto způsobu se zmíním později.

Způsob 1:

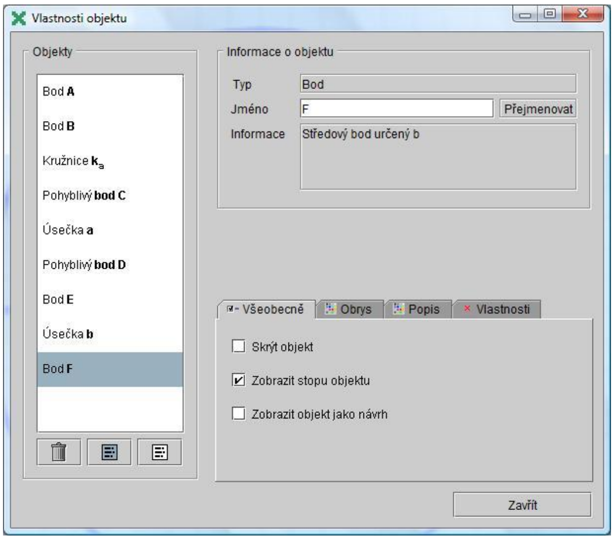
Prvním krokem ke konstruování válce je opět jako v prvním příkladu zapnutí pomocné mřížky pro lepší a rychlejší práci a orientaci. Tentokrát nemusíme zapínat volbu přichycení k mřížce, protože by v dalších krocích znemožňovala vložit bod na libovolné místo a přichycovala by ho k sobě. Nejprve sestrojíme kružnici, která má poloměr totožný s poloměrem konstruovaného válce. Poté sestrojíme její průměr. K narýsování potřebné základny válce (z našeho pohledu elipsy) poslouží funkce „Animovat.“ Toto je jedna z pokročilejších funkcí Geonextu. Elipsu tedy sestrojíme následovně: Kdekoliv na kružnici sestrojíme tzv. vázaný bod **D** (obr.1), který bude později putovat



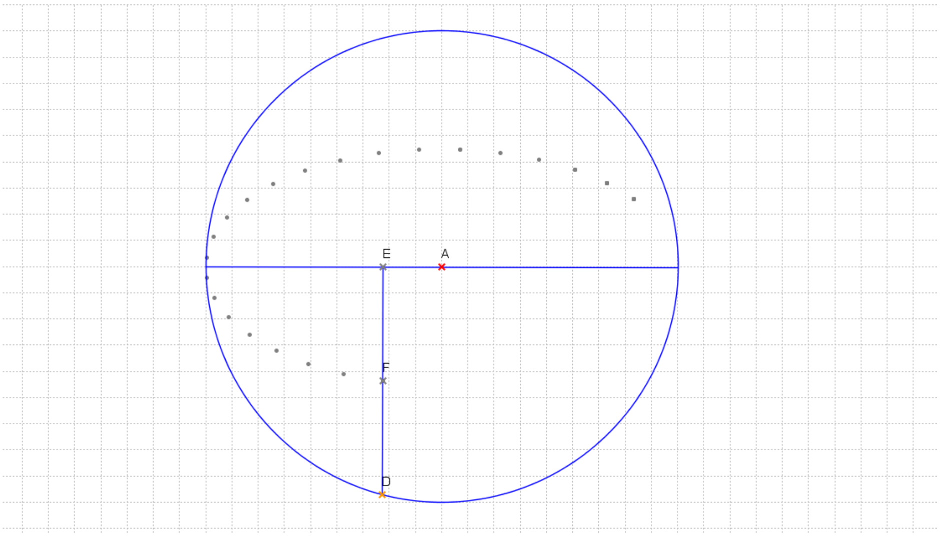
po kružnici. V jeho Vlastnostech objektu použijeme volbu „Animovat,“ zde můžeme stavit také tzv. délku kroku ve stupních, která udává délku animovaných bodů od sebe.



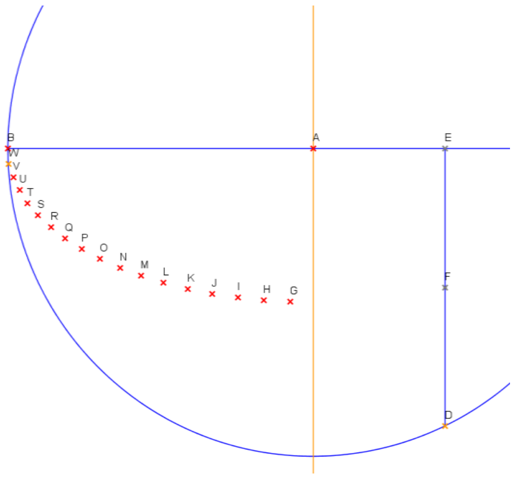
Z něj vedeme kolmou úsečku na průměr kružnice. Na této úsečce vytvoříme její střed (v našem případě bod **F**). Bod **F** musíme nastavit tak, aby zanechával stopu a to přes vlastnosti objektu, zde najdeme bod **F** a zaškrtneme funkci „Zobrazit stopu objektu“.



Teprve teď můžeme zapnout animaci pro vytvoření elipsy přes Objekty – Animace - Začít animaci.



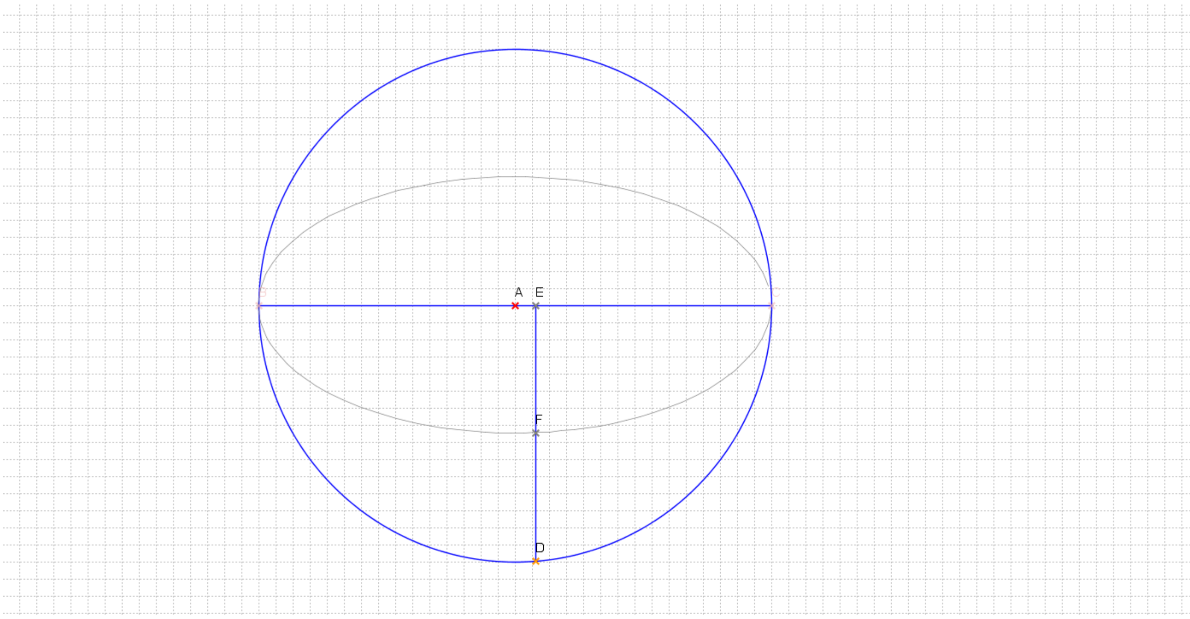
Když nám Geonext pomocí bodu **F** vykreslil šedými tečkami elipsu, animaci vypneme opět Objekty-Animace-Ukončit animaci. Teď si ovšem musíme dát pozor, abychom s kreslící plochou nepohybovali ani se nepřibližovali či vzdalovali, protože šedé body elipsy jsou pouze orientační a při pohybu zmizí. To je podle mě jedna z nevýhod tohoto programu. Řešení je takové, že na šedé „tečky“ vložíme body. To je sice zdlouhavé, ale práci si můžeme ušetřit tím, že body sestrojíme pouze na čtvrtině celé elipsy a zbylé body dokreslíme buď pomocí středové, nebo osové souměrnosti.



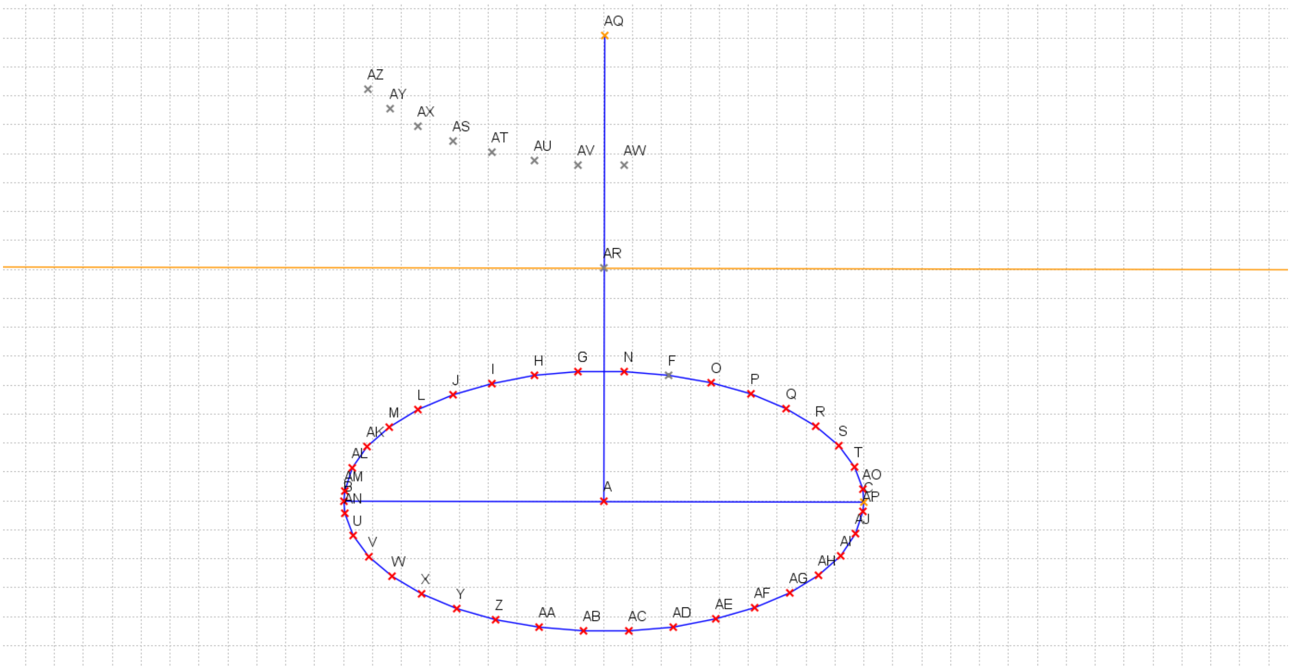
Takto vtvořené body už stačí propojit úsečkami a ve vlastnostech objektu body skrýt spolu s úsečkami, které nebudou vidět.

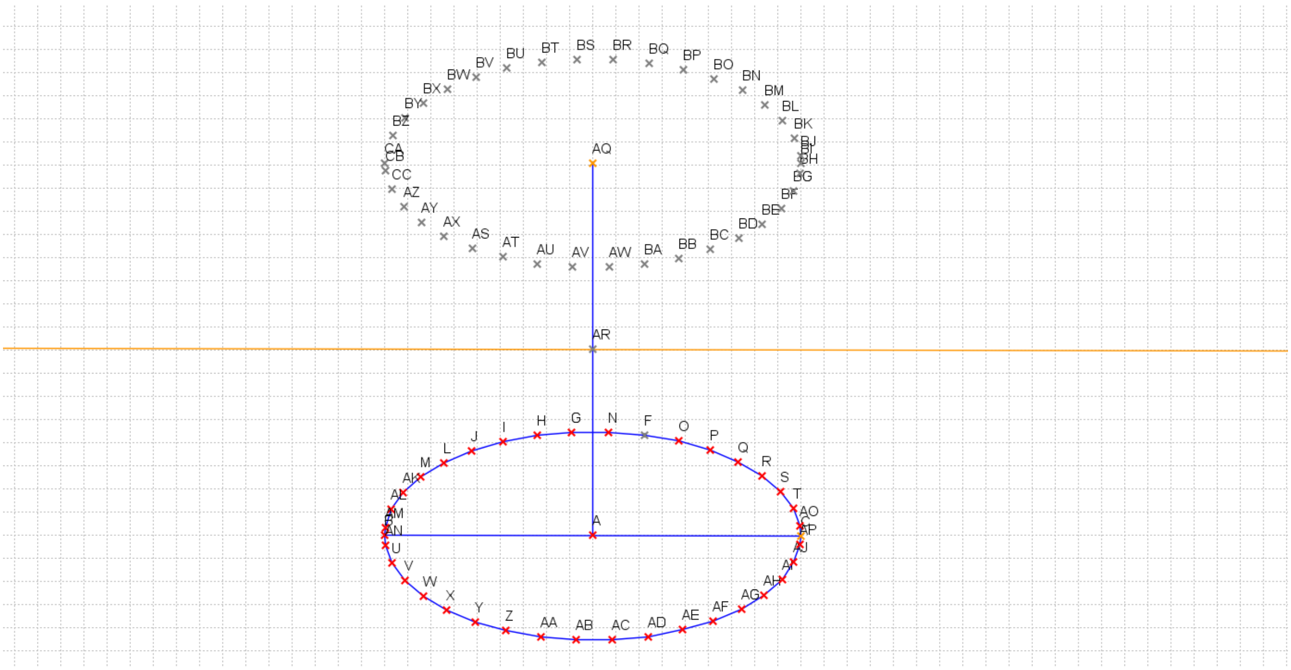
Způsob 2:

Teď přichází na řadu již zmíněný rychlejší způsob, po kterém však s elipsou nelze nijak manipulovat ani ji nějak upravovat. Postup je ze začátku stejný jako při způsobu prvním, tj.: Kružnice, její průměr, vázaný bod kdekoli na kružnici, kolmá úsečka z vázaného bodu na průměr a následný střed této úsečky. U pohyblivého bodu na kružnici si v jeho vlastnostech zvolíme opět volbu animovat. Nyní si rozbalíme nabídku grafy a v ní tzv.„Křivka stopy ???“, se kterou klikneme na body (v tomto případě ***D*** *a* ***F****). Tím automaticky vznikne potřebná elipsa.*

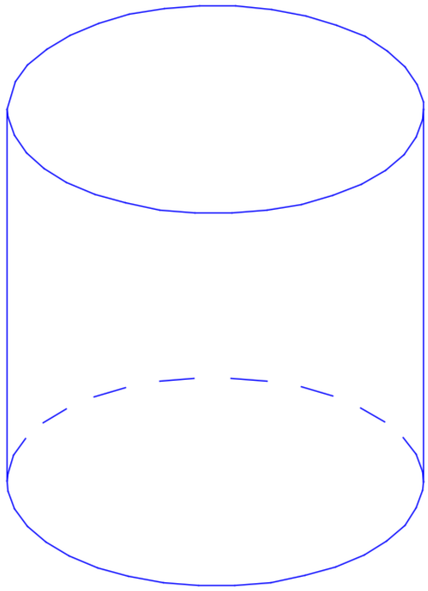


Elipsu tedy máme sestrojenou. Jestliže byla konstruována první metodou, válec sestrojíme následovně. Bodem **A** vedeme kolmici. Na ní zvolíme bod, který leží v polovině výšky budoucího válce. Tímto bodem vedeme rovnoběžku s průměrem kružnice. Přes tuto přímku můžeme udělat osovou souměrností druhou elipsu.

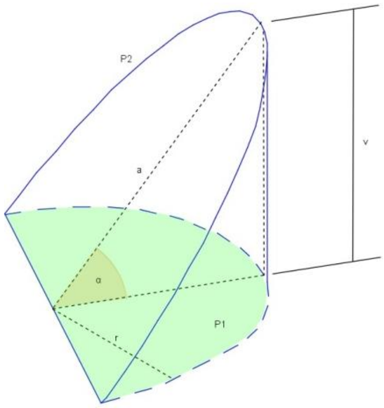




Než skryjeme všechny nepotřebné body, krajní body průměru a jejich obrazy v horní elipse propojíme úsečkami. V „neviditelné“ polovině spodní elipsy skryjeme úsečky vždy ob jednu – tím vznikne čárkovaná čára.

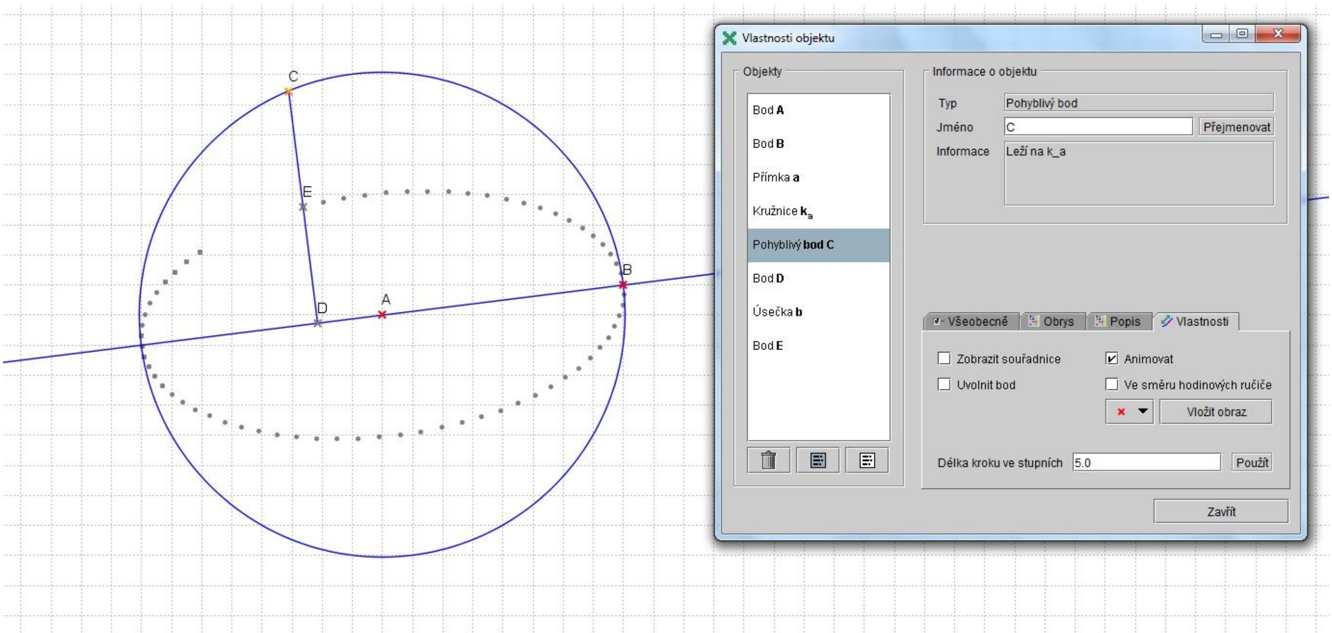


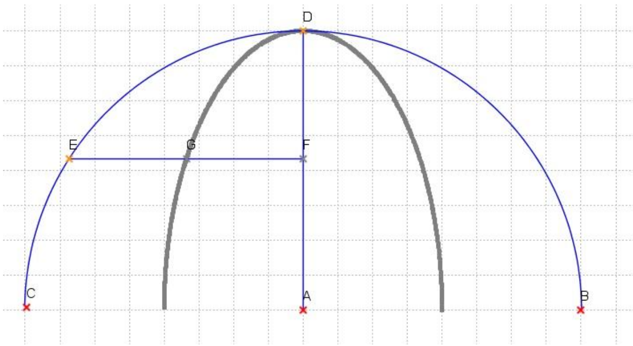
Nyní už stačí jen vypnout pomocnou mřížku a válec je hotový. Pokud byla elipsa nakreslena druhým způsobem, válec dokončíme takto: Ve středu průměru kružnice opět vztyčíme kolmici. Na této kolmici si zvolíme libovolně bod podle toho, jak chceme mít válec vysoký. Tímto bodem vedeme rovnoběžku s průměrem. Na í sestrojíme kružnici se stejným průměrem jako spodní kružnice. Nakonec v této kružnici uděláme elipsu stejným způsobem jako elipsu první. Nepotřebné čáry a kružnice skryjeme volbou Skrýt a elipsy propojíme úsečkami v krajních bodech průměrů kružnic. Takto vzniklý válec však nebude mít zadní polovinu spodní elipsy „v zákrytu“ čárkovaně.



- **<u>Sestrojení klínu s válcovou plochou</u>**

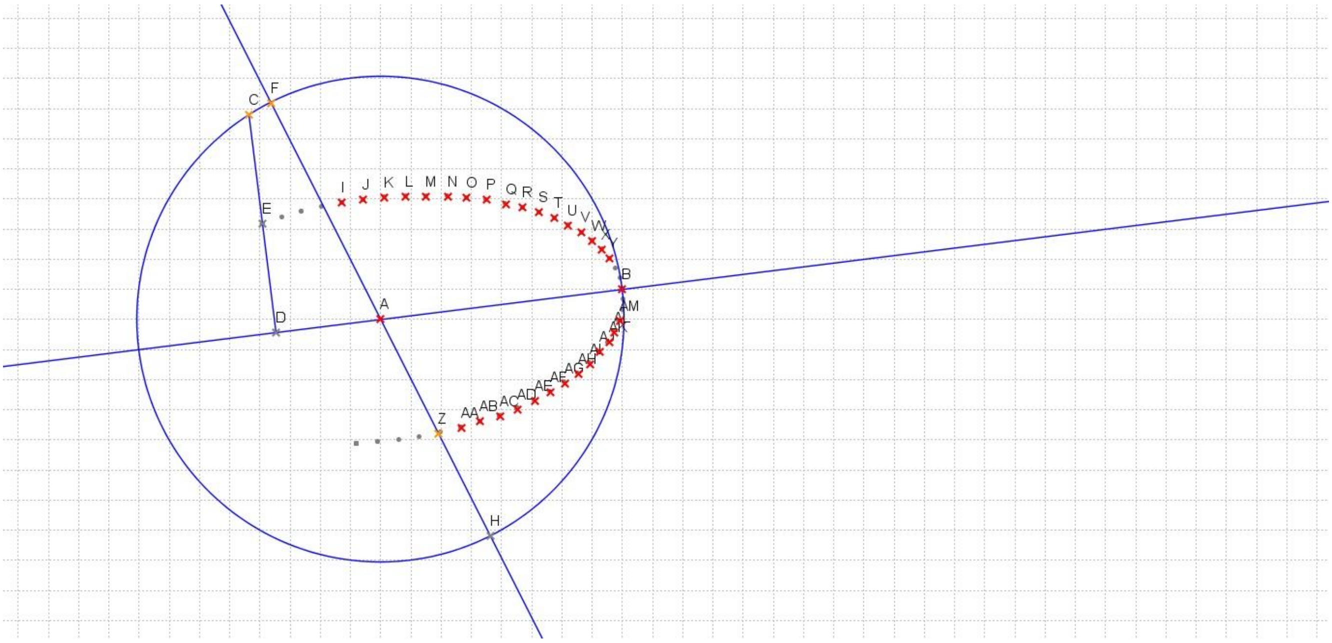
Toto těleso je vlastně úsekem kruhového válce (půdorysem je kruh). Také by se dalo zařadit do těles speciálních – jelikož se jedná o část válce seříznutého rovinu. Na této konstrukci je názorně předvedena funkce animace a také to, že Geonext není programem určeným pro rýsování prostorových těles.



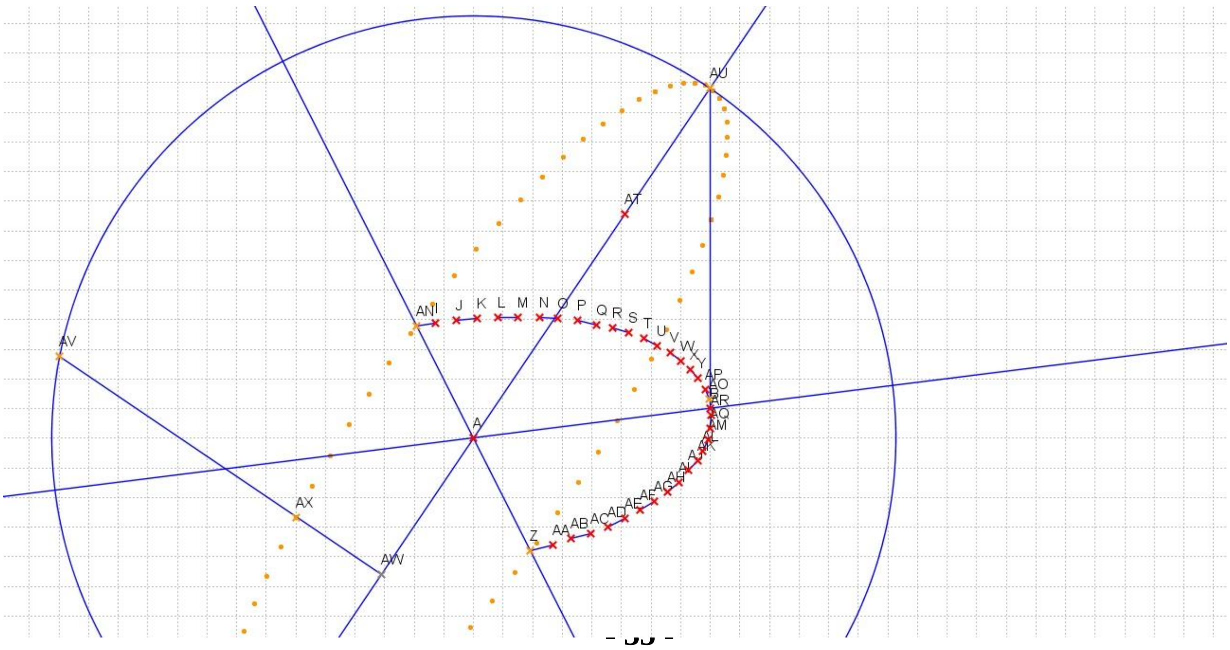


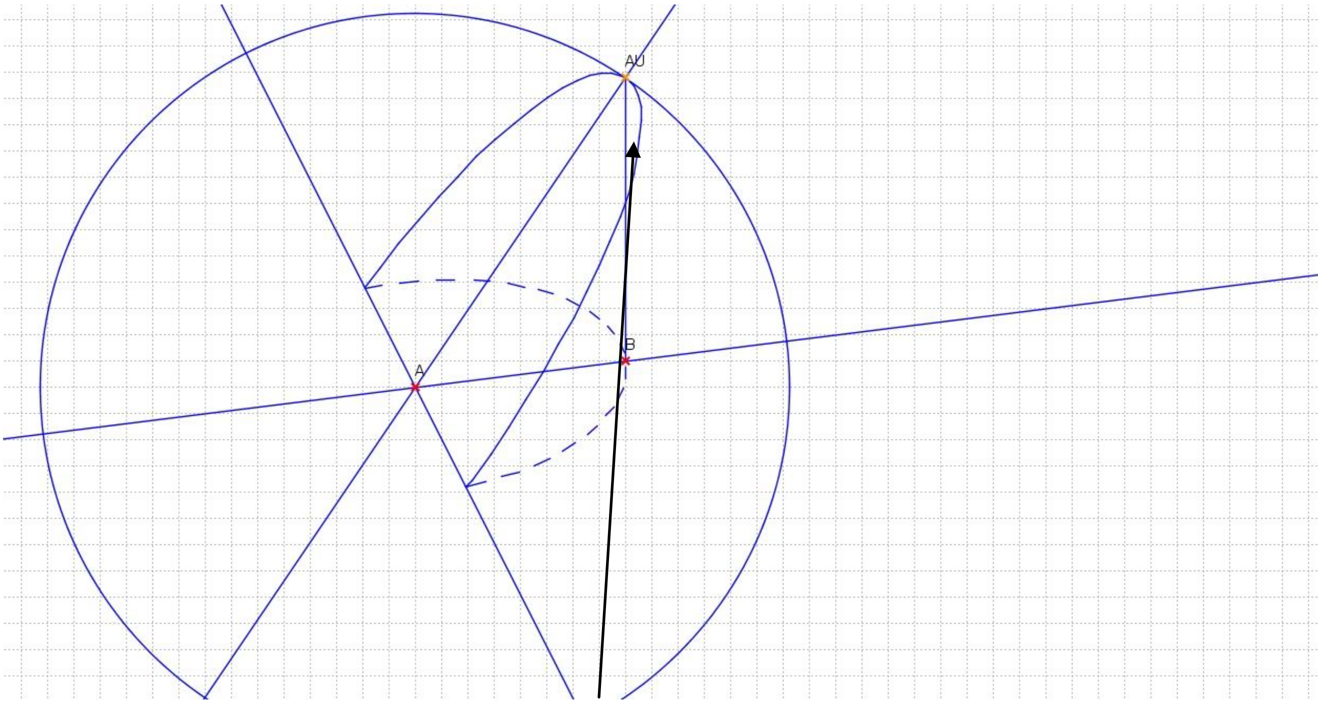
Jako v případě sestrojování válce začneme podstavou – což je polovina elipsy. Tuto elipsu tedy vytvoříme jako u válce, avšak s tím rozdílem, že její podélnou osu natočíme pod libovolným malým úhlem (kvůli výsledné perspektivě tělesa). Také by šlo sestrojit pouze poloviční konstrukci pomocí kruhového oblouku. Nyní následuje nejpracnější část konstruování – umístění bodů na vytvořené orientační „tečky“.

V dalším kroku si zvolíme průměr kružnice pod úhlem (průměr je ve skutečnosti kolmý na podélnou osu elipsy).

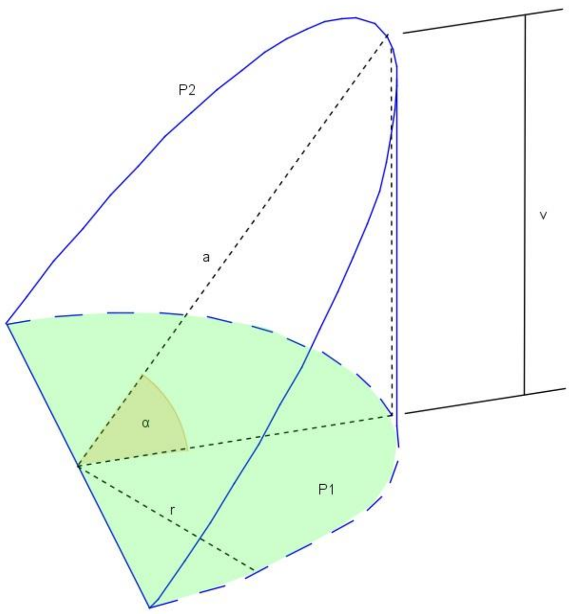


U bodu „C“ odškrtneme zpět volbu animovat. To je nutno udělat protože pokud výsledné body „půlelipsy“ propojíme úsečkami a „nahoře“ budeme animovat elipsu novou (plochu řezu), spodní „půlelipsa“ se začne animovat také a zdeformuje si díky přichyceným úsečkám k bodům. Pokud však body ještě nemáme spojeny úsečkami, Geonext dokáže dělat obě animace najednou.
Pod požadovaným úhlem (úhlem řezné roviny) se narýsuje průměr kružnice, na který poté vztyčíme kolmou úsečku (zatím jako u elipsy předchozí). Na této úsečce však nebudeme dělat její střed, ale umístíme na ní bod (AX) ve tejné vzdálenosti jako bod AN od středu A (vzdálenost se přenese například pomocí kružnic). U takto vzniklé konstrukce nastavíme u bodu AV volbu animovat a u bodu AX zobrazit stopu. Jelikož jsme bod zobrazující stopu umístili do vzdálenosti|A-AN|, animace vytvoří elipsu procházející krajními body spodní „půlelipsy.“



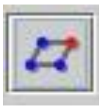


Vznikl zde však problém se zakřivením plochy řezu válce. Pro názornost však tato konstrukce stačí a tento problém lze vyřešit buď „protáhlejším“ tvarem plochy řezu, nebo ručním „upravením“ spodní podstavy. Pokud by se rýsovalo od začátku pod úhlem 45°, spojovací čára obou křivek by vycházela jako „horizont.“ Nakonec se dodělají estetické úpravy jako je skrytí nepotřebných bodů, úseček a kružnice, změna stylu čar, pomocí polygonu zvýraznit podstavu…

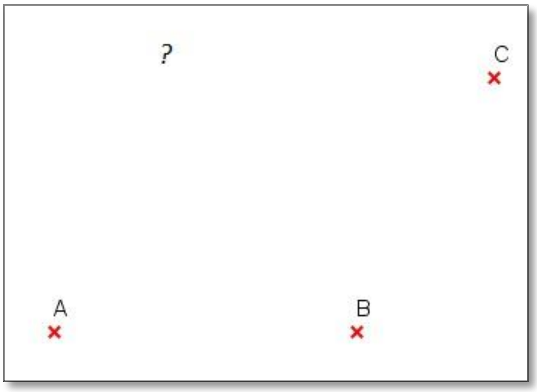


Tipy a rady usnadňující kreslení:

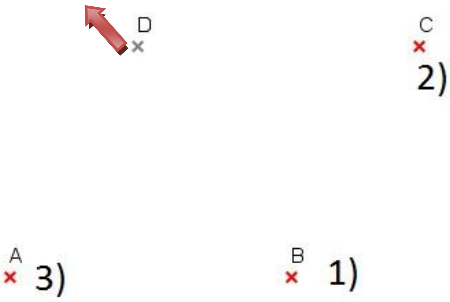
Tyto funkce programu výrazně usnadňují a urychlují celkové kreslení. Je jich samozřejmě mnoho, proto se budu zmiňovat pouze o těch základních. První je již zmiňované **„Zobrazení mřížky“** a **„Přichycení bodu k mřížce.“** Další je také zmíněná volba **„Bod rovnoběžníku,“** která nám dokreslí zbývající čtvrtý bod rovnoběžníku automaticky pomocí třech bodů.

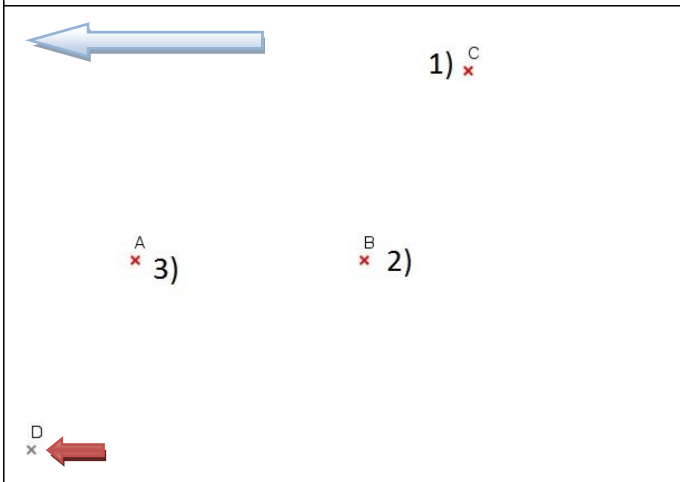
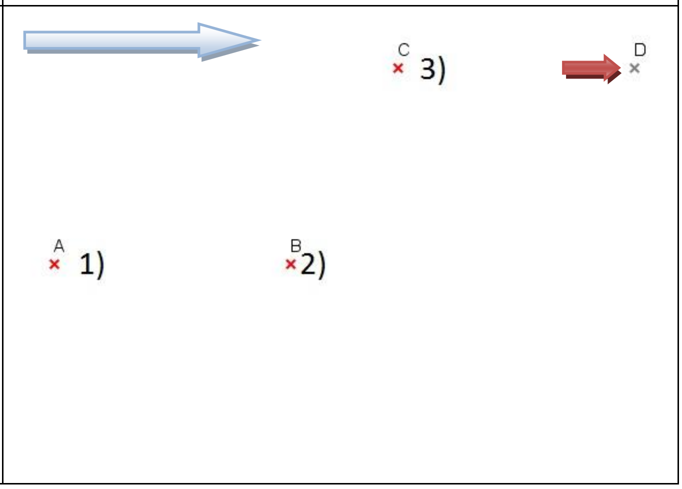


a) BOD ROVNOBĚŽNÍKU



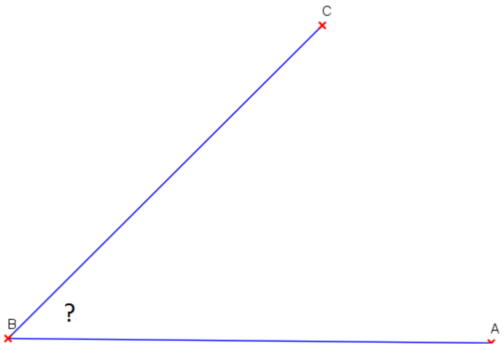
Tuto funkci programu uplatníme, chceme-li například dokreslit bod **D** budoucího kosodélníku na místě **„?“.** Záleží zde na pořadí, ve kterém na body **A, B, C** „klikáme.“ Proto, musíme v tomto případě použít pořadí z obrázku.



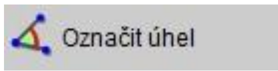
Pokud bude směr pořadí „naklikání“ bodů zprava:	Pokud bude směr pořadí „naklikání“ bodů zleva:
	

Touto metodou lze snadno a efektivně vytvářet objekty bez pomocí pomocných čar a kružnic.

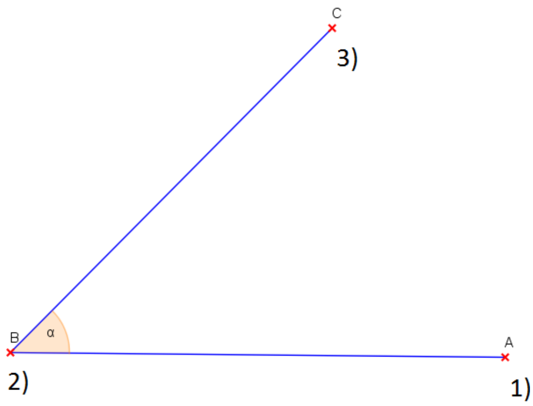
b) OZNAČENÍ A MĚŘENÍ ÚHLŮ

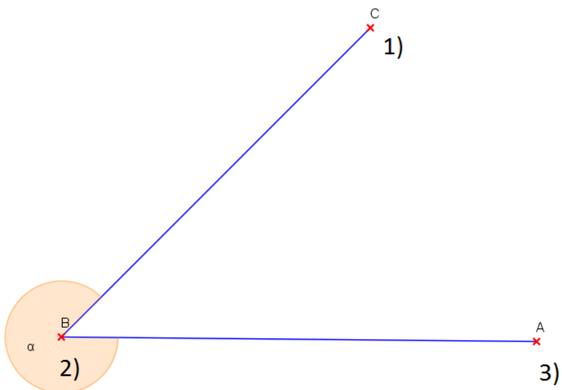


Další je vysvětlení postupu při **měření úhlů.** Pokud chceme označit vnitřní úhel **„?“** při bodě **B**, postupujeme následovně:

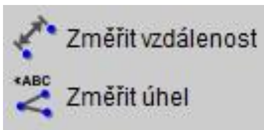


- Na body **A, B, C** „klikáme“ za použití funkce „Označit úhel.“ Také zde záleží na jejich pořadí a pro změření vnitřního úhlu α použijeme postup, který je na obrázku. Poté se automaticky zobrazí barevně úhel, který svírají úsečky, respektive body **A, B, C.**

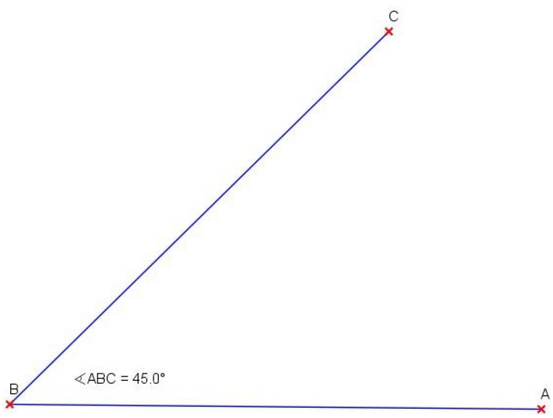




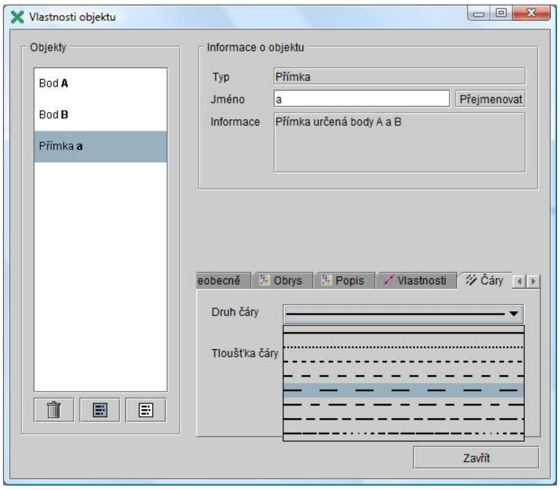
- Když předešlý postup obrátíme, Geonext označí u bodu **B** vnější úhel (tento úhel můžeme přejmenovat ve „Vlastnostech objektu“ např. na úhel β)



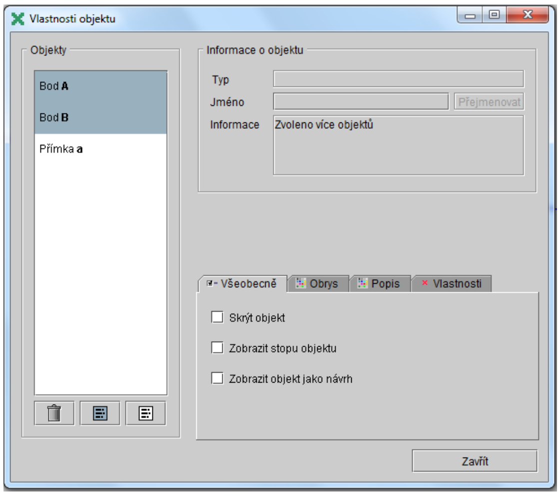
- Pro změření daného úhlu je Geonext vybaven ikonou „Změřit úhel,“ která se rozbalí z nabídky „Změřit vzdálenost.“ Pořadí bodů pro změření je stejné jako pořadí pro označení úhlu.



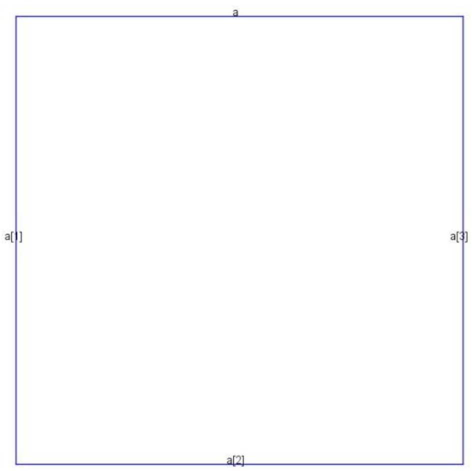
C)VLASTNOSTI OBJEKTU



Vlastnosti objektu jsou využívány téměř při jakémkoli kreslení, a to nejen při složitějších, ale i při jednoduchých konstrukcích. Tato volba umožňuje např. přejmenovat objekty, změnit jejich barvu, u čar jejich druh (čárkovaná, čerchovaná…), změnu tvaru označení bodů atd.



Pokud chceme například změnit barvu všech bodů, nemusíme označovat postupně každý bod zvlášť, ale lze označit všechny potřebné body najednou s pomocí klávesy ***„Ctrl“*** a použít požadovanou volbu pro změnu. Použití klávesové zkratky ***„Ctrl“*** + ***„A“*** označí všechny body. To samé platí samozřejmě
i pro úsečky, kružnice apod.



- Při konstrukci objektů, které mají více věcí shodných (stejné názvy hran, bodů, stran), se zde však vyskytl problém. Při přejmenování stran **„b, c, d“** na **„a, a, a“** se za název **„a“** ještě připsala čísla. Pokud ale chceme všechny strany pouze jako **„a,“** při přejmenovávání je postup například takový:

b =>**a**(mezera), **c** =>**a**(mezera mezera), **d** =>**a**(mezera mezera mezera)

U výpočtů a vlastností těles se budeme setkávat také s jednotlivými označeními:

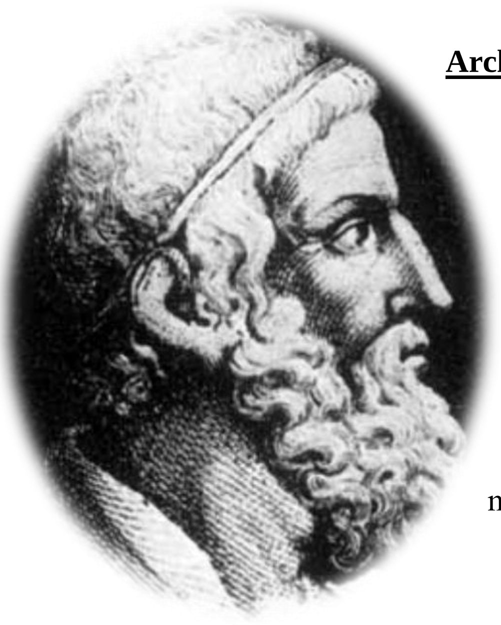
S **- povrch tělesa**
V **- objem tělesa**

v - výška tělesa
u_s - stěnová úhlopříčka
u_t - tělesová úhlopříčka

$Sp(P_1; P_2; P_3)$ - obsah podstavy tělesa
P_n - obsah kolmého (normálového řezu)
P_s - obsah středního řezu
Spl - obsah pláště tělesa
$O; O_1; O_2$ - obvody podstav
O_n - obvod kolmého řezu
O_s - obvod středního řezu
r - poloměr podstavy
ρ - poloměr podstavného kruhu (např. u kulové úseče, kulového pásu)

Povrch a objem tělesa:
Povrchem tělesa se stručně rozumí součet všech obsahů „S“ stran, (podstav) tohoto tělesa.
Objemem zase rozumíme veškerou „hmotu“, ze které se těleso skládá. U obou těchto pojmů také platí, že dvě shodná tělesa mají shodné povrchy i objemy.

- Matematická věda, zabývající se problematikou geometrie v prostoru, vzájemnou polohou rovin a přímek se nazývá **Stereometrie**, někdy také **Prostorová geometrie**.

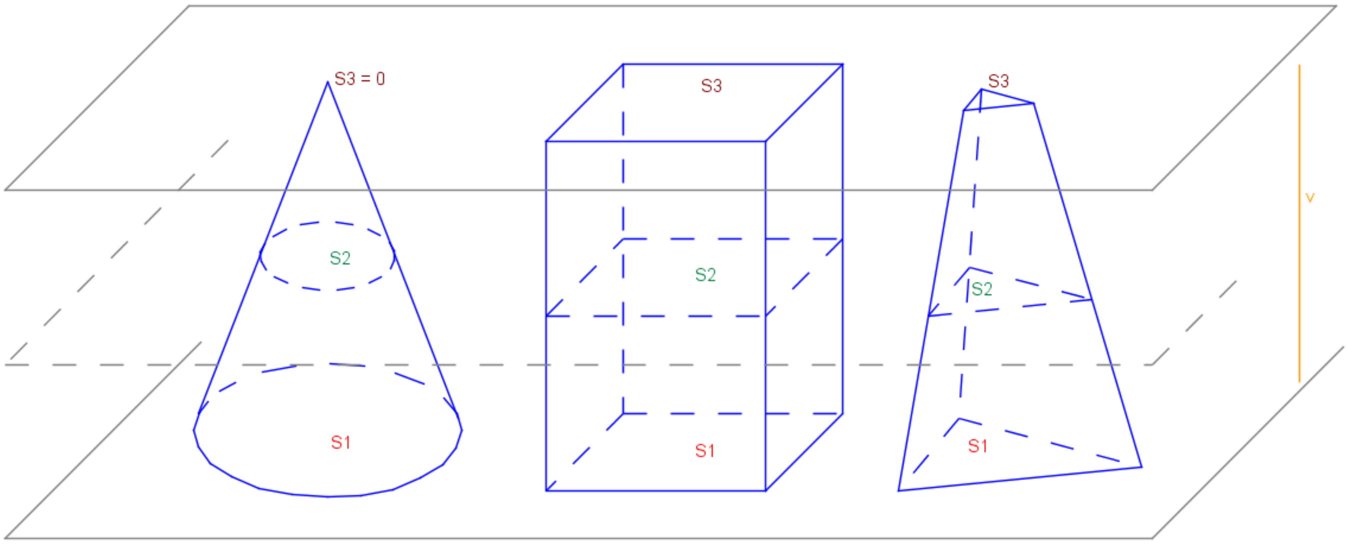


Archimedes ze Syrakúz (přibližně 287 – 212 př. n. l.)

Byl to řecký matematik, fyzik, astronom a jeden z nejvýznamnějších badatelů starověku. Jako první vypočítal obvod a obsah kruhu, povrch a objem koule, elipsoidu, hyperboloidu a paraboloidu. Archimedes také dokázal že $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 2 : 3$, kde $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$ (objem koule s poloměrem r), $V_3 = 2\pi r^3$ (objem válce opsaného této kouli), $V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3$ (objem kužele vepsaného do tohoto válce). Díky Archimedově zákonu můžeme zjistit objem tělesa (pokud je vyplněno celé svou hmotou).

2.2. Simpsonův vzorec

Je speciální vzorec pro výpočet objemů všech známých těles.



$$V = \frac{v}{6}(S_1 + 4S_2 + S_3)$$

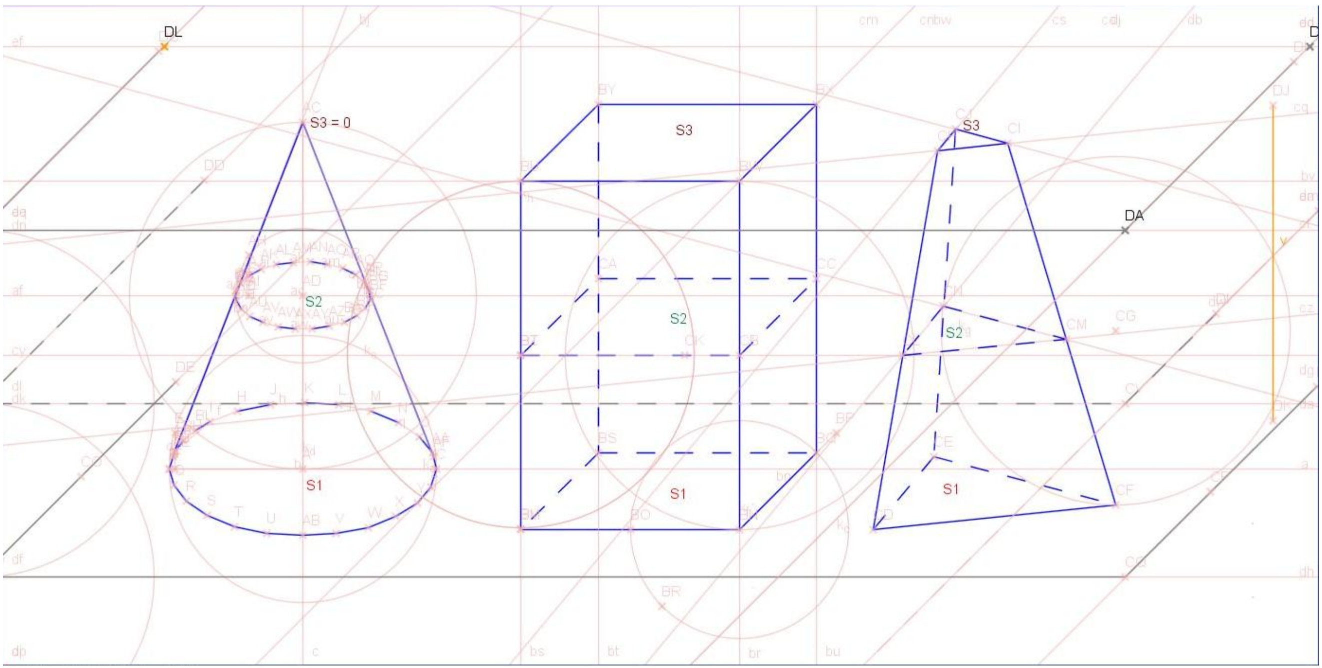
v- výška tělesa

S_3 - obsah horní podstavy

S_2 - obsah řezu rovnoběžného s podstavou ve středu výšky tělesa

S_1 - obsah spodní podstavy

Konstrukce příkladu Simpsonova vzorce: *Při větším počtu čar (i skrytých) se Geonext začíná lehce sekat.*

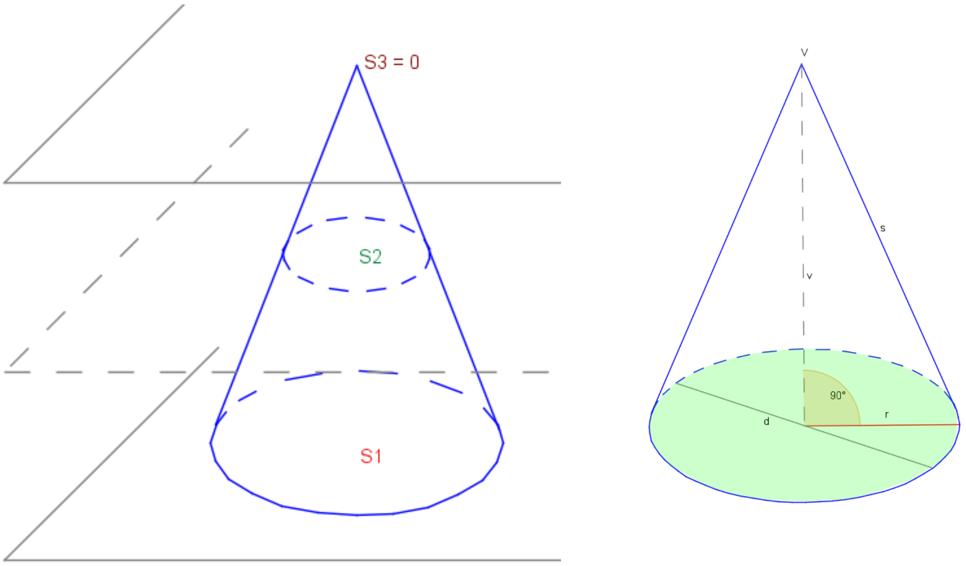


2.3. Příklad použití Simpsonova vzorce

Jako těleso pro názorný příklad jsem si vybral **rotační kužel**. Kužel je pro použití tohoto vzorce spolu s koulí a kvádrem / hranolem asi nejjednodušší z hlediska výpočtu. U zmíněné koule jde o případ, kdy obsah horní a spodní „podstavy“ je roven nule.

Známe zde: $\boldsymbol{r = 10}$

$\boldsymbol{v = 12}$



Vzorec pro klasický výpočet objemu kužele je $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 v}$. Pokud za něj dosadíme, objem vyjde 1256,64 [cm^3]. $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi 10^2 12}$

$$\underline{\boldsymbol{V = 1256,64[cm^3]}}$$

Nyní použijeme Simpsonův vzorec. U tohoto vzorce je třeba znát obsah řezu rovnoběžného s podstavou ve středu výšky tělesa. Ten se spočítá jako obsah kruhu, který má poloměr / průměr dvakrát menší než je poloměr dolní podstavy.

$$\boldsymbol{V = \frac{v}{6}(S_1 + 4S_2 + S_3)}$$

$$V = \frac{12}{6}(314{,}16 + 4(78{,}54) + 0)$$

$$\underline{\boldsymbol{V = 1256,64[cm^3]}}$$

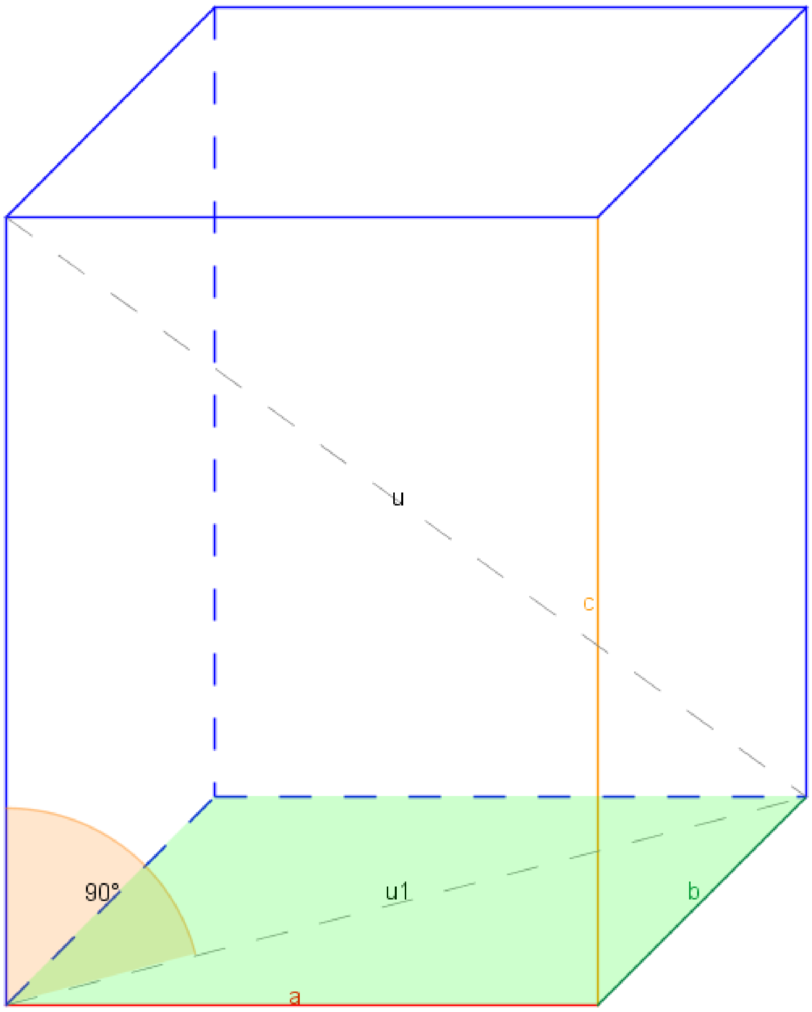
Z toho vyplývá, že Simpsonův vzorec opravdu funguje.

Thomas Simpson (1710 - 1761)

Thomas Simpson se narodil v Leicestershire v Anglii jako syn tkadlece samouka. V mládí od něj bylo očekáváno, že bude vykonávat stejnou práci jako jeho otec. Avšak s výskytem zatmění Slunce roku 1724 se Thomas Simpson začal zajímat o matematiku a astrologii. Rozšiřoval své matematické vzdělání a roku 1743 byl jmenován profesorem matematiky na Královské vojenské akademii ve Woolwich, kde vyučoval až do své smrti. Jako matematik se věnoval problémům geometrie a trigonometrie, ale také i teorii pravděpodobnosti. V roce 1743 byl zvolen zahraničním členem Královské švédské akademie věd.

2.4. Kvádr

(Rovnoběžnostěn s kolmými hranami a obdélníkovými stěnami)

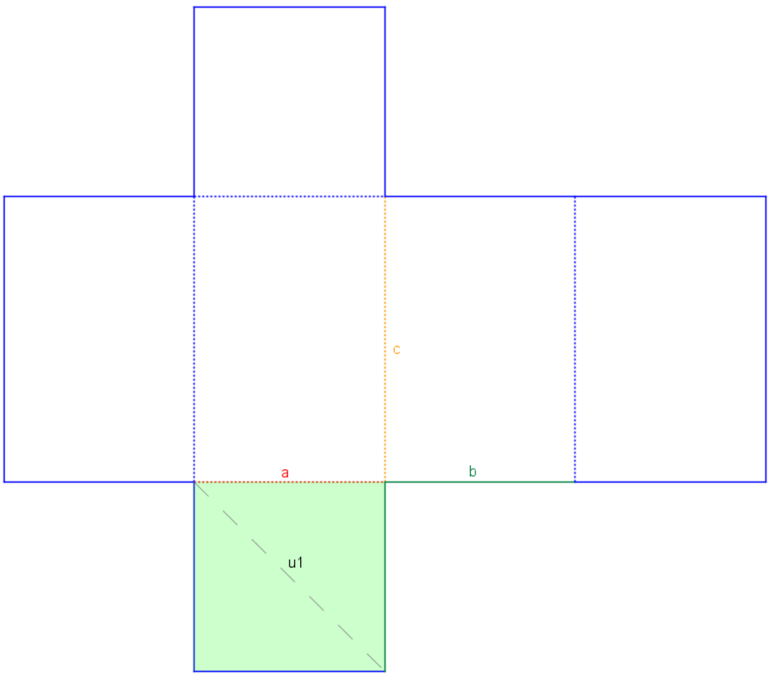


Objem: $V = abc$

Povrch: $S = 2(ab + ac + bc)$

Tělesová úhlopříčka: $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

plášť kvádru

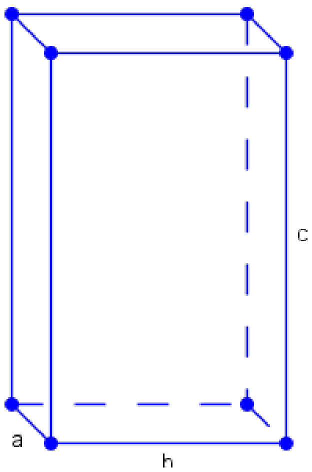


Kvádr	
Objem:	$V = abc$
Povrch:	$S = 2(ab + ac + bc)$
Tvar stěny:	obdélník (+ čtverec)
Počet stěn:	6
Počet hran:	12
Počet vrcholů:	8
Vnitřní úhel při vrcholu:	90°

Kvádr je prostorové (trojrozměrné těleso). Stěny mu tvoří 6 obdélníků, nebo 4 obdélníky a 2 čtverce – podstavy, v tomto případě se jedná o pravidelný čtyřboký hranol. Vztahy hran kvádru mezi sebou jsou: rovnoběžnost nebo kolmost na sebe. Totéž platí i o jeho stěnách.Objem se zde vypočítá vynásobením jeho délky a, šířky b a výšky c. Povrch jako součet obsahů obdélníků, které jeho povrch tvoří. Kvádr je podobně jako krychle **osově souměrný** (v prostoru podle os x, y, z), **středově souměrný** (podle místa, kde se protínají středové úhlopříčky) **a rovinně souměrný** (roviny jsou rovnoběžné se stěnami kvádru).

Kosočtverečná soustava:

Výška, šířka a délka kvádru jsou různě dlouhé. Kosočtverečná se jí říká proto, že minerály mají tvar průřezu blížící se ke kosočtverci.Do této soustavy se řadí: olivín, síra, aragonit…



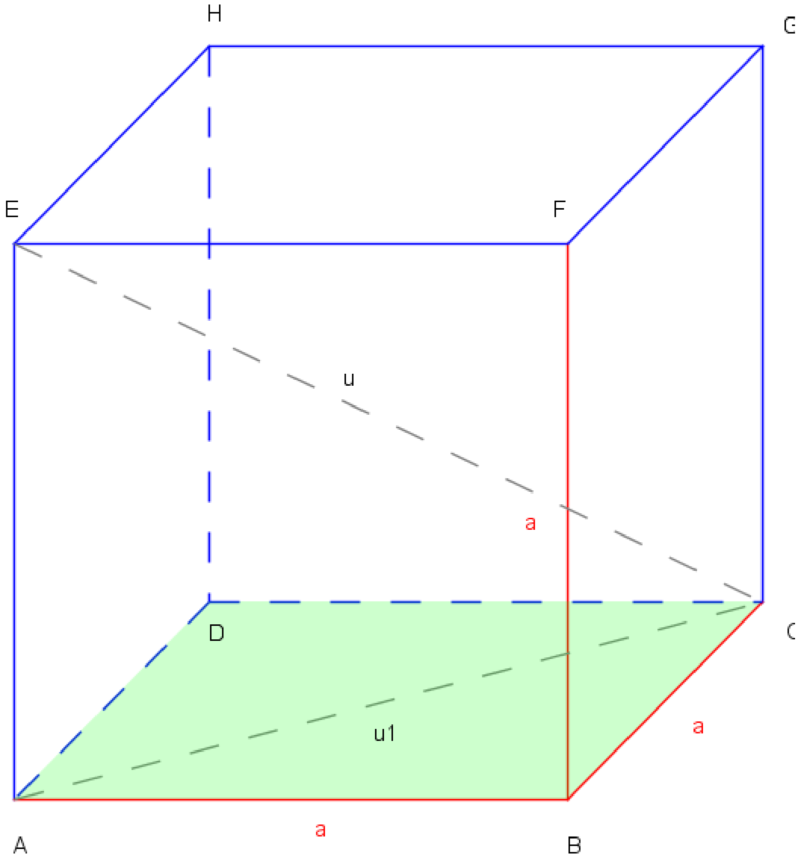
$a \neq b \neq c$

Antimonit

Olivín

2.5. Krychle

(Kostka, pravidelný šestistěn, hexaedr)

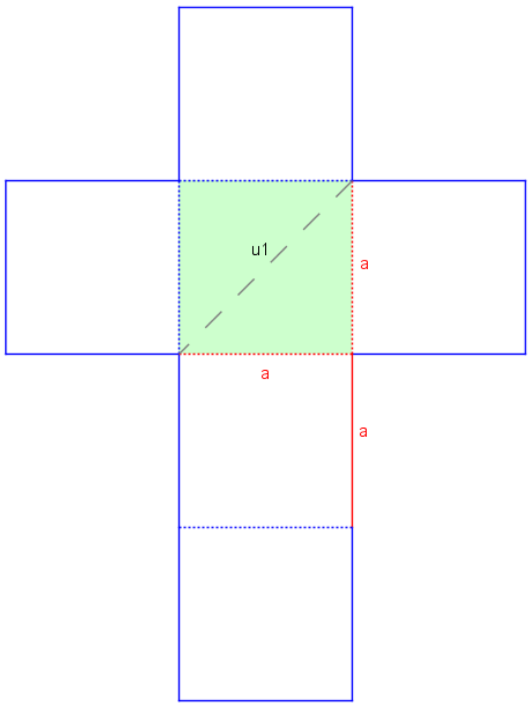


Objem: $V = a^3$

Povrch: $S = 6a^2$

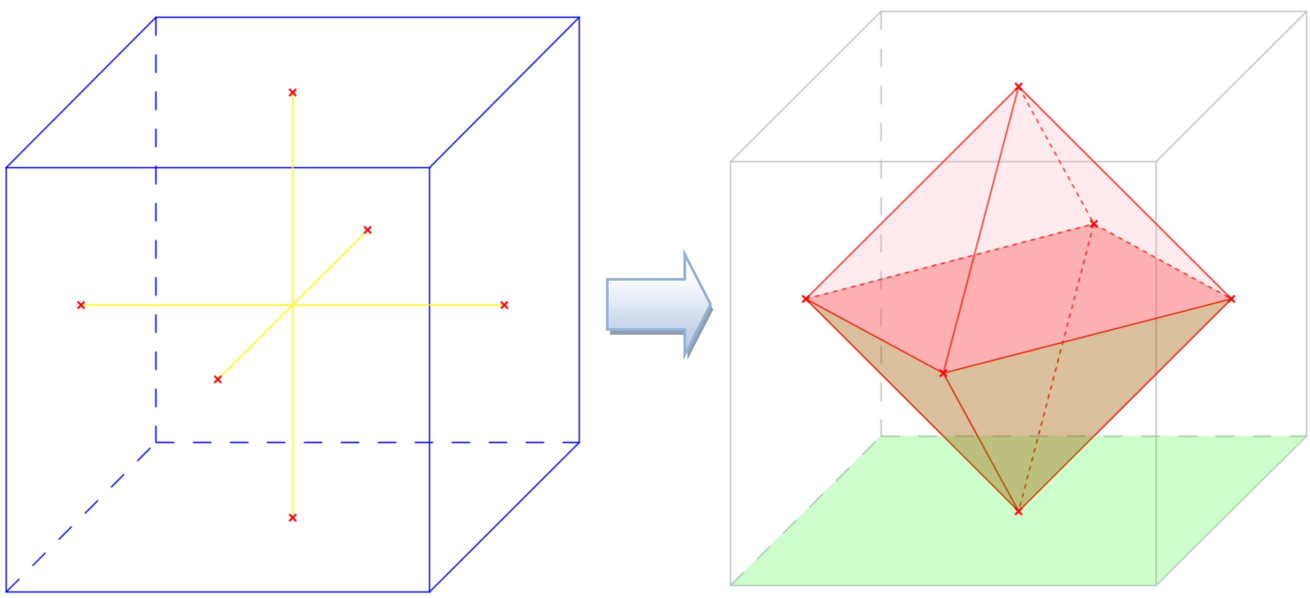
Stěnová úhlopříčka: $u_1 = a\sqrt{2}$

Tělesová úhlopříčka: $u = a\sqrt{3}$



plášť krychle

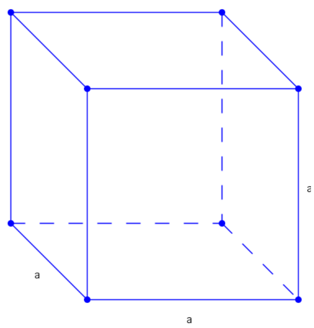
Krychle vytváří tzv. **Duální mnohostěn**, který vznikne tak, že ze stěn krychle vytvoříme vrcholy. Sousední vrcholy poté propojíme úsečkami – budoucími hranami mnohostěnu.
U krychle vznikne mnohostěn s osmi stěnami – osmistěn.



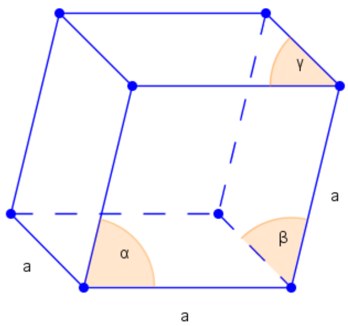
Když se řekne slovo „těleso,“ většina lidí si ihned představí krychli. **Krychle** je tedy prostorové těleso. Dalo by se říci, že je to speciální duh kvádru, který má délku všech hran stejnou – tím pádem i velikosti stran.Mezi stěnami a hranami krychle platí stejné vztahy jako u kvádru: U sousedních stěn platí kolmost na sebe a u protilehlé rovnoběžnost. Hrany spojující se v rozích jsou na sebe kolmé (v osách x, y, z), s ostatními jsou pak rovnoběžné. Krychle je **souměrná osově** podle 13ti os, **souměrná středově** podle jejího středu a také je podle 9ti rovin **rovinně souměrná.**

Krychle	
Objem:	$V = a^3$
Povrch:	$S = 6a^2$
Tvar stěny:	čtverec
Počet stěn:	6
Počet hran:	12
Počet vrcholů:	8
Vnitřní úhel při vrcholu:	90°

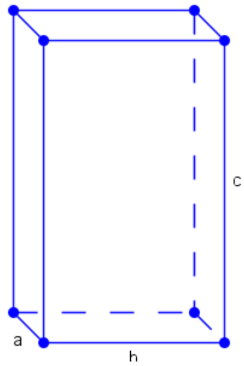
Krychlová soustava (kubická – *z anglického „cube“ – kostka, krychle*):
V přírodě se nachází několik druhů tzv. Krystalografických soustav (jeden ze základních druhů symetrie v krystalové mřížce) a jednou z nich je právě soustava Krychlová. Tuto soustavu tvoří samozřejmě krychle, které mají až 9 rovin souměrnosti, což je nejvíce. Mezi minerály této soustavy se řadí například: kamenná sůl, diamant, zlato, stříbro, měď…



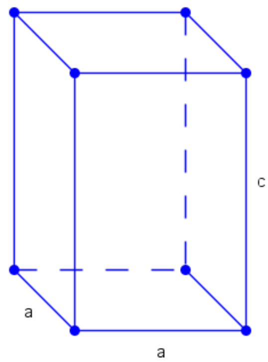
Krychlová s.



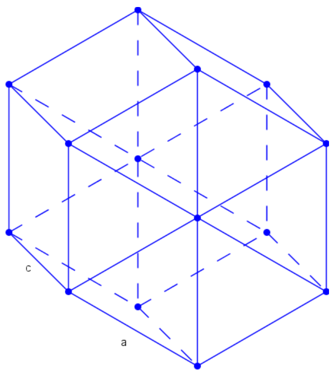
$\alpha, \beta, \gamma \neq 90°$
Klencová s.



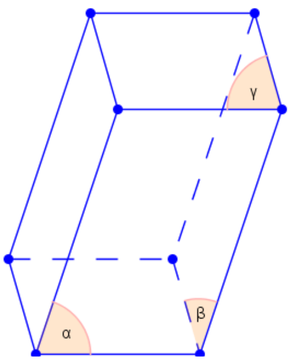
$a \neq b \neq c$
Kosočtverečná s.



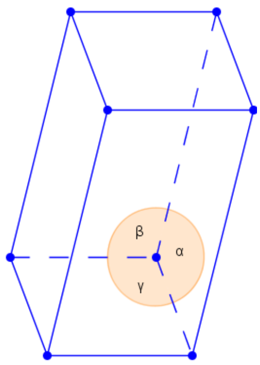
$a \neq c$
Čtverečná s.



$a \neq c$
Šesterečná s.



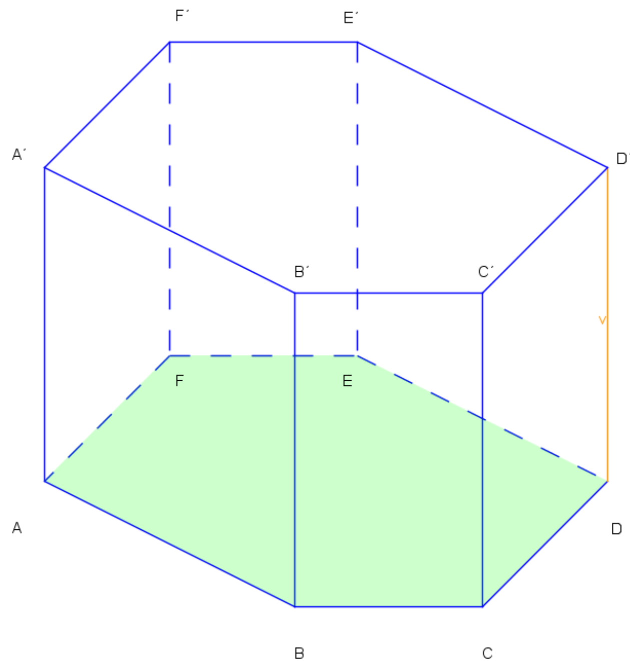
$\alpha, \beta, \gamma \neq 90°$
Trojklonná s.



$\beta \geq 90°$; $\alpha, \gamma = 90°$
Jednoklonná s.

Sůl kamenná –halit, je tvořen krychlovou soustavou

2.6. Hranol



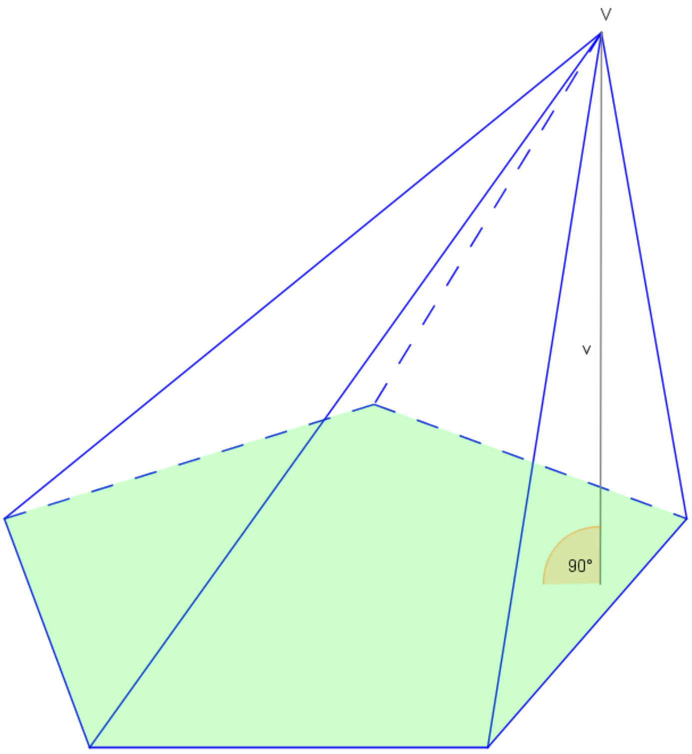
Objem: $V = Sp \cdot v$

Povrch: $S = 2Sp + Spl$

Hranol, stejně jako krychle či kvádr může být kosý, nebo kolmý – podle úhlu svírajícího boční strany s podstavou. Pokud je hranol kolmý a jeho podstava je čtverec nebo obdélník => jedná se o kvádr. Pokud jsou všechny jeho stěny čtvercového tvaru, potom se jedná o krychli.

Hranol	
Objem:	$V = Sp \cdot v$
Povrch:	$S = 2Sp + Spl$
Tvar stěny:	Obdélník (čtverec), lichoběžník
Tvar podstav:	n-úhelník
Počet stěn:	n
Počet vrcholů:	n . 2

2.7. Jehlan



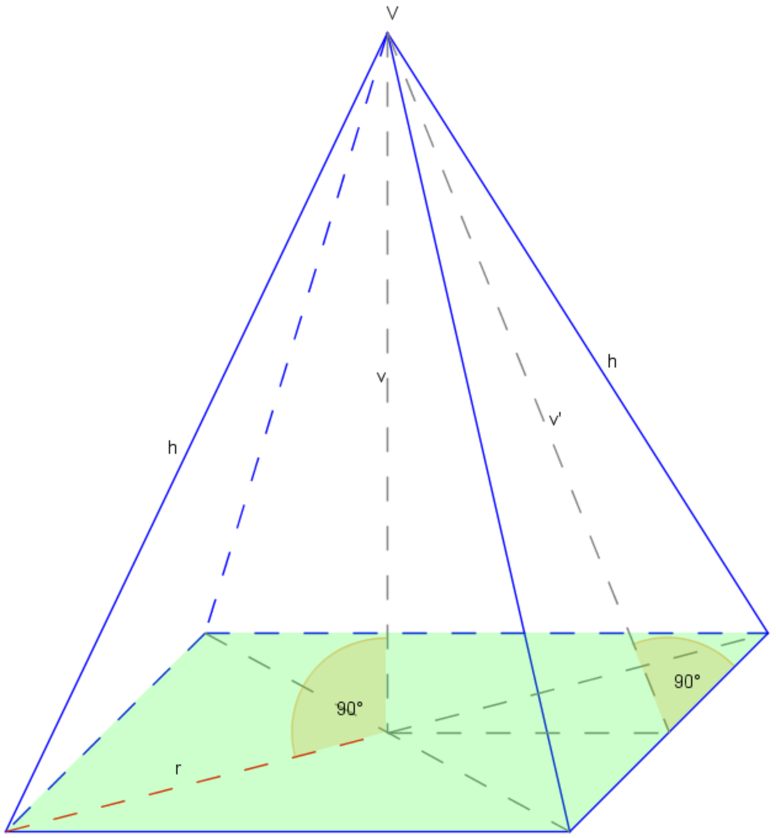
Objem: $V = \frac{1}{3} Sp \cdot v$

Povrch: $S = Sp + Spl$

Obecný jehlan může být vyosený => jeho výška se nerovná jeho ose.

Jehlan	
Objem:	$V = \frac{1}{3} Sp \cdot v$
Povrch:	$S = Sp + Spl$
Tvar stěny:	Trojúhelník
Tvar podstavy:	n-úhelník
Počet vrcholů:	n

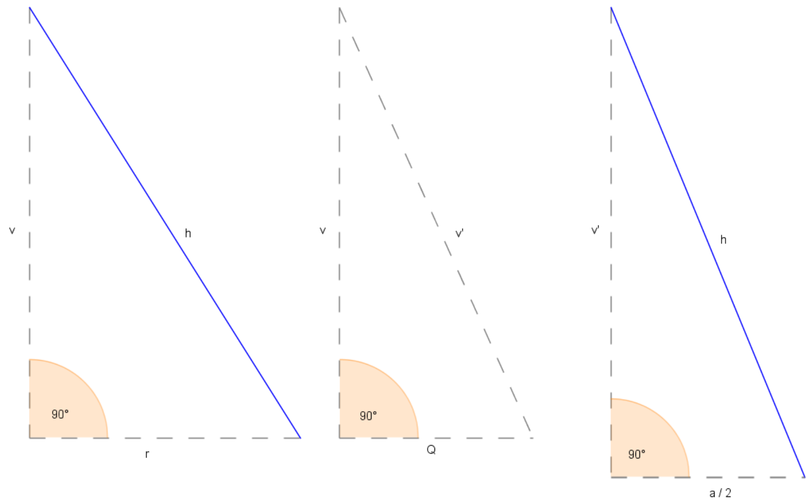
2.8. Pravidelný jehlan



Objem: $V = \frac{1}{3} Sp \cdot v$

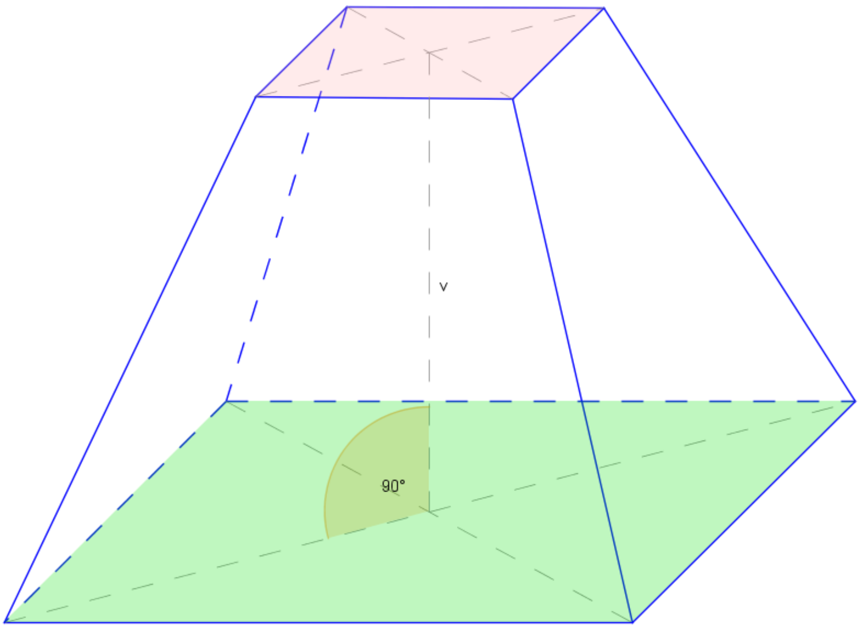
Povrch: $S = Sp + Spl$

Jeho objem se rovná $^1/_3$ objemu, který by měl hranol se stejnou velikostí podstavy a stejnou výškou jehlanu.



Tyto pravoúhlé trojúhelníky jsou dobré pro výpočet vlastností jehlanu. Přes Pythagorovu větu (nebo Sinovou a Kosinovou větu).

2.9. Komolý jehlan



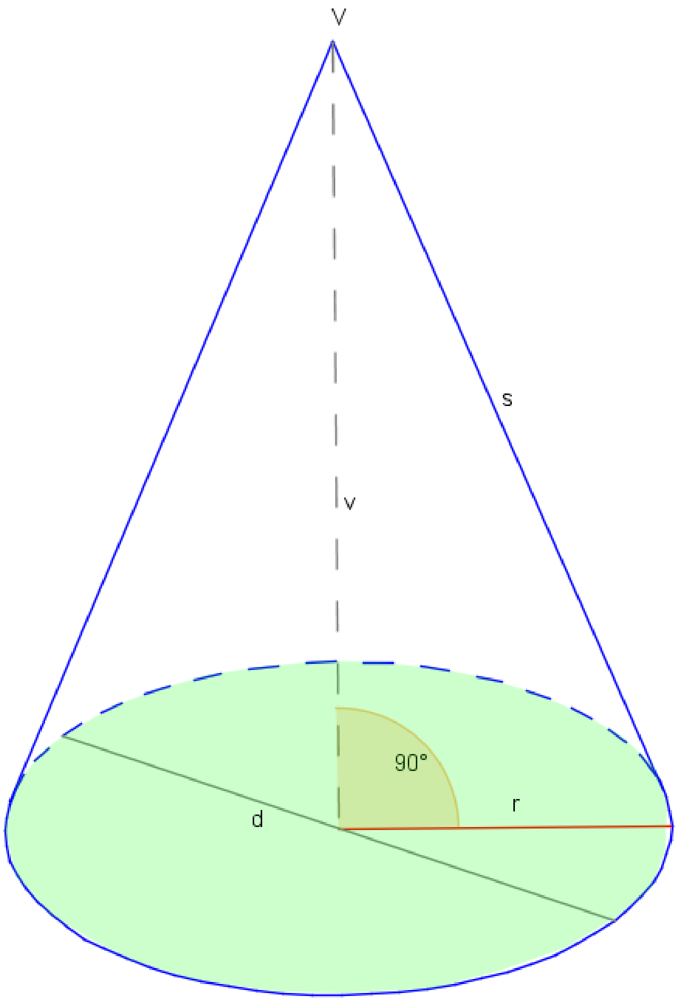
Objem: $V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

Povrch: $S = S_1 + S_2 + Spl$

Je to jehlan s „uříznutou špičkou,“ díky čemuž má dvě podstavy.

Komolý jehlan	
Objem:	$V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$
Povrch:	$S = S_1 + S_2 + Spl$
Tvar stěny:	Pravidelný lichoběžník, lichoběžník
Tvar podstav:	n-úhelník
Počet vrcholů:	n . 2

2.10. Rotační kužel



Objem: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

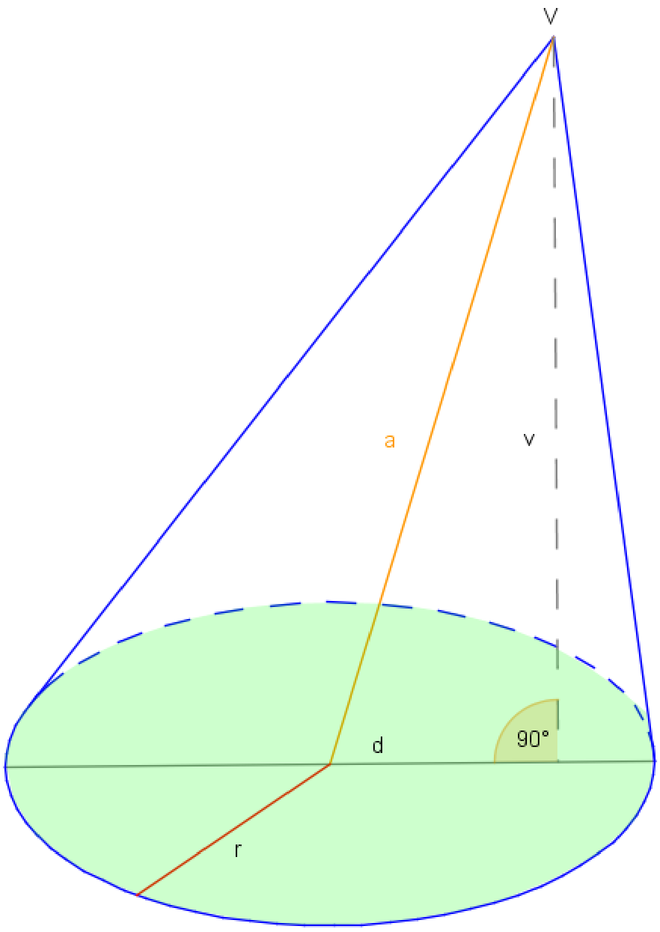
$V = \frac{1}{12}\pi d^2 v$

Povrch: $S = \pi r^2 + \pi r s$

$S = \pi r(r + s)$

Vzniká rotací pravoúhlého trojúhelníka okolo odvěsny.Objem je roven jedné třetině objemu válce, který má stejnou postavu a stejnou výšku.

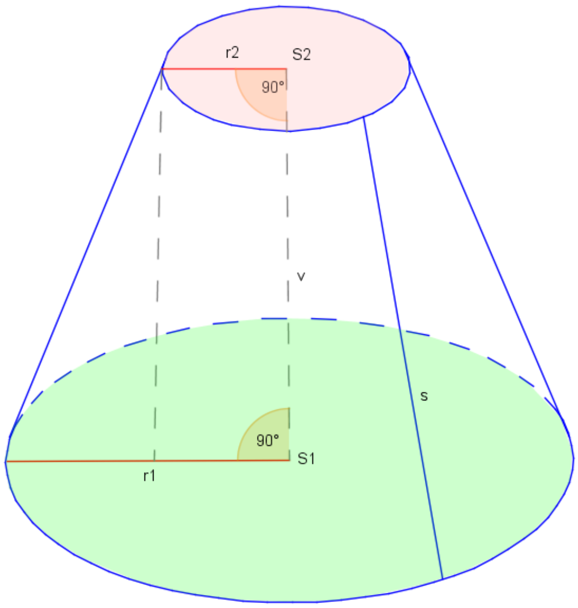
2.11. Kužel



Obecný kužel může být vyosený => Kosý, jeho výška se nerovná ose kužele.

Rotační kužel	
Objem:	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,\ V = \frac{1}{12}\pi d^2 v$
Povrch:	$S = \pi r^2 + \pi r s,\ S = \pi r(r + s)$
Tvar stěny:	„stočená“ kruhová výseč
Tvar podstavy:	kruh
Počet vrcholů:	1

2.12. Komolý kužel



Objem: $V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

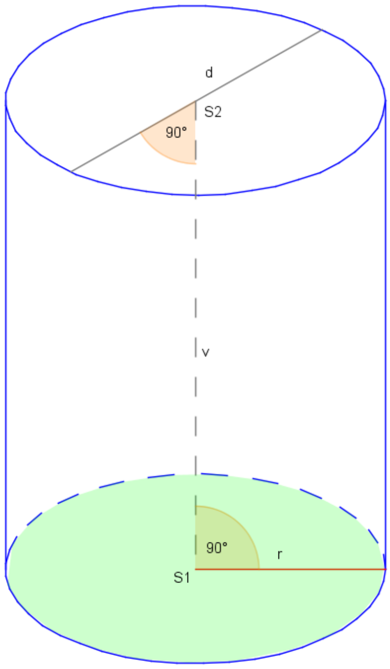
Povrch: $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + Spl$

$Spl = \pi(r_1 + r_2)s$

Je to vlastně válec s „uříznutou špičkou," díky čemuž má dvě podstavy ($s_{1;}s_2$).

Komolý kužel	
Objem:	$V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$
Povrch:	$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + Spl$
Tvar stěny:	„stočená" kruhová výseč bez špičky
Tvar podstav:	kruh
Počet vrcholů:	-

2.13. Válec



Objem: $V = \pi r^2 v$

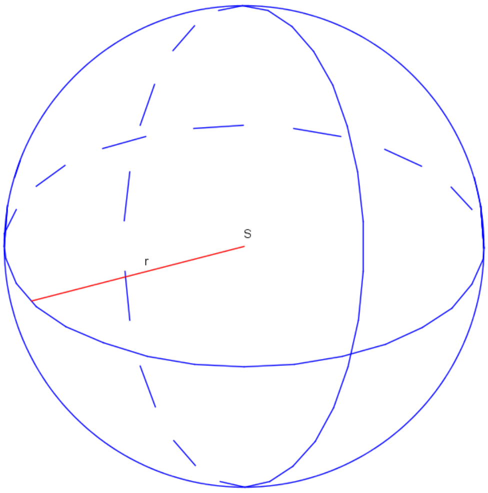
$$V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v$$

Povrch: $S = 2\pi r(r + v)$

Vznikne tak, když se obdélník/čtverec orotuje okolo své strany. Může být rovnostranný, tj. když se jeho výška **v** rovná průměru podstavy **d**.

Válec	
Objem:	$V = \pi r^2 v,\ V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v$
Povrch:	$S = 2\pi r(r + v)$
Tvar stěny:	Obdélník, čtverec
Tvar podstav:	kruh
Počet vrcholů:	-

2.14. Koule



Objem: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

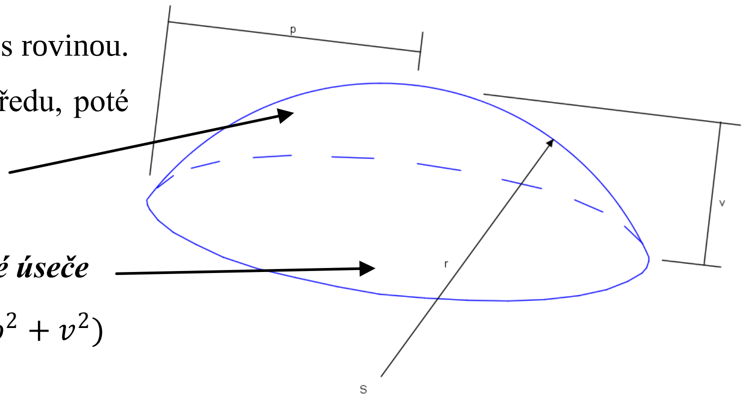
Povrch: $S = 4\pi r^2$

Koule patří mezi tělesa prostorová. Je tvořena body, které jsou od jejího středu všechny ve stejné, nebo menší vzdálenosti poloměru r. Koule je také těleso s nejmenším povrchem při daném objemu. Je symetrická podle jakékoliv přímky procházející jejím středem (průměr d).

Kulová úseč vznikne průnikem koule s rovinou. (Pokud rovina protne kouli přesně v jejím středu, poté se jedná o dvě polokoule.)

Kulová úseč se ještě dělí na: ***Kulový vrchlík***

Podstavu kulové úseče

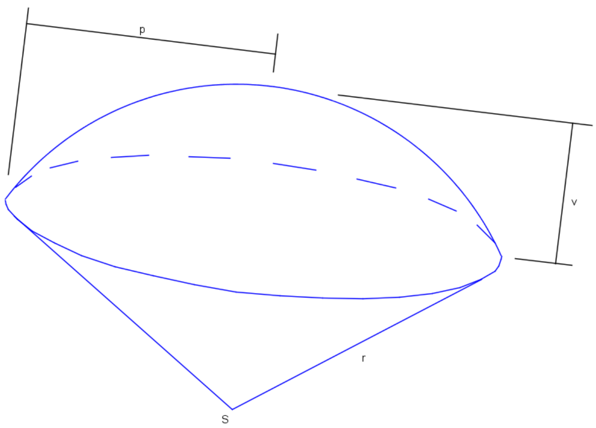


Objem kulové úseče: $V = \frac{1}{6}\pi v(3\rho^2 + v^2)$

Povrch kulové úseče: $S = \pi(2rv + \rho^2)$

Povrch kulového vrchlíku: $Q = 2\pi rv$

Poloměr podstavy kul. úseče: $\rho = \sqrt{v(2r - v)}$ $(\rho - poloměr\ podstavy\ kul.úseče)$



Kulová výsečvzniká průnikem prostorového úhlu (lze si ho představit jako špičatý kornout) s koulí, který má svůj vrchol ve středu koule. Zde opět platí to, že když je výška výseče stejná jako poloměr původní koule, jedná se o polokouli.

Objem kulové výseče: $V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$

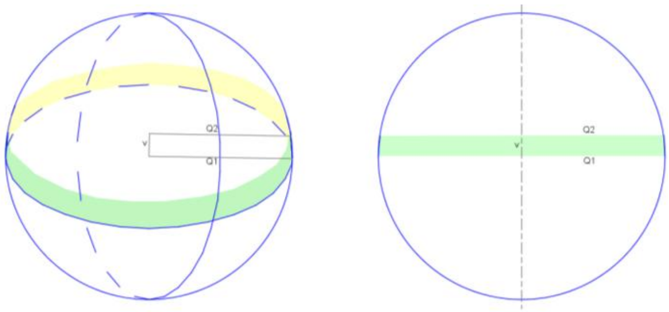
Povrch kulové výseče: $S = \pi r(2v + \rho)$

Poloměr podstavy kul. úseče: $\rho = \sqrt{v(2r - v)}$

$(\rho - poloměr\ podstavy\ kul.úseče)$

Kulová vrstva vznikne tak, když dvě navzájem rovnoběžné roviny protnou kouli (každá v jiném místě) jejich průnikem je právě kulová vrstva.

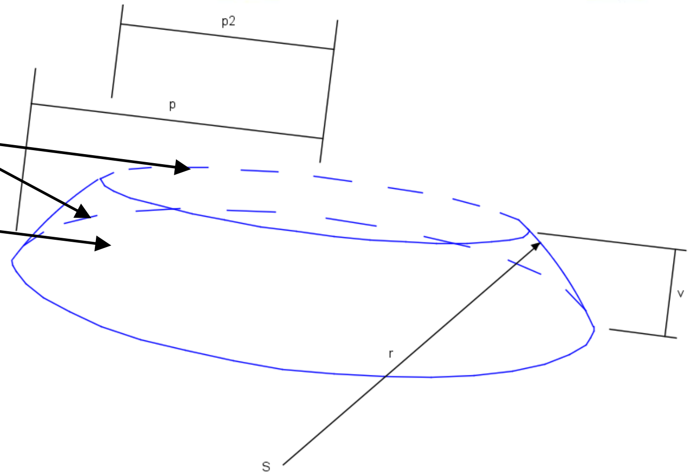
($\rho_1; \rho_2 - poloměry\ kruhových\ podstav$)



Kulovou vrstvu můžeme dělit na:

Obsahy kruhových podstav

Kulový pás



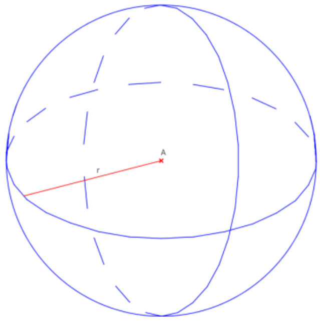
Objem kulové vrstvy: $V = \frac{1}{6}\pi v(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$

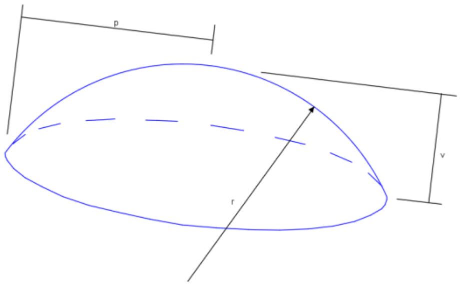
Povrch kulové výseče: $S = \pi(2rv + \rho_1^2 + \rho_2^2)$

Obsah kulového pásu: $Q = 2\pi rv$

Koule

Objem:	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Povrch:	$S = 4\pi r^2$



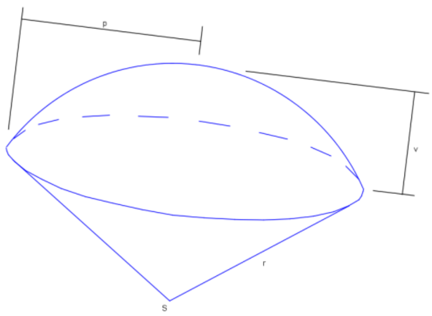


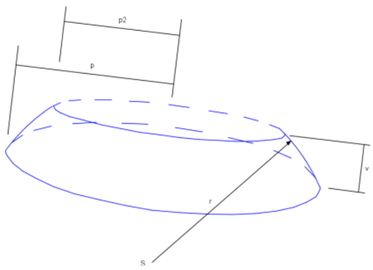
Kulová úseč

Objem:	$V = \frac{1}{6}\pi v(3\rho^2 + v^2)$
Povrch:	$S = \pi(2rv + \rho^2)$
Povrch kulového vrchlíku:	$Q = 2\pi rv$
Poloměr podstavy kul. úseče:	$\rho = \sqrt{v(2r - v)}$

Kulová výseč

Objem:	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$
Povrch:	$S = \pi r(2v + \rho)$
Poloměr podstavy kul. výseče:	$\rho = \sqrt{v(2r - v)}$





Kulová vrstva

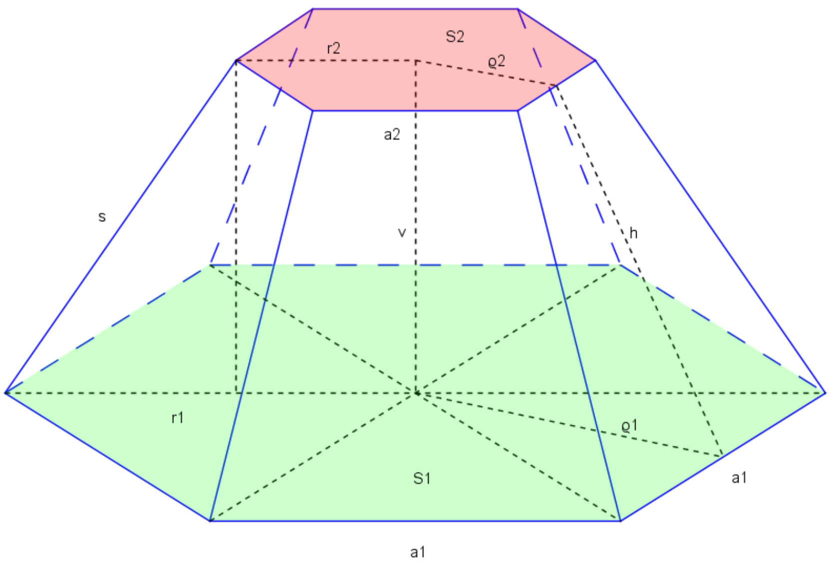
Objem:	$V = \frac{1}{6}\pi v(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$
Povrch:	$S = \pi(2rv + \rho_1^2 + \rho_2^2)$
Obsah kulového pásu:	$Q = 2\pi rv$

3.Speciální tělesa

Speciálními tělesy zde uvádím tělesa, která jsou seříznuta rovinou, jsou kosá, nebo jsou méně obvyklá. Některá tato tělesa se můžou jevit jako tělesa složená, ale pokud přímo pro ně existují vzorce, je mnohem jednodušší pracovat s těmito vzorci, než si tělesa rozkládat na mnoho menších těles.

3.1. Pravidelný komolý jehlan

Komolý jehlan je sice řazen do těles základních, ale je seříznut rovinou rovnoběžnou s jeho podstavou a dal by se tedy zařadit i do těles speciálních.



Objem: $V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

Povrch: $S = S_1 + S_2 + Spl$

$Spl = h\,.\,obvod\ st\check{r}edn\acute{\imath}ho\ \check{r}ezu$

Pomocné vzorce

Obvody podstav: $O_1 = a_1 . n$

$O_2 = a_2 . n$

Výška pobočné stěny: $h = \sqrt{(\varrho_1 - \varrho_2)^2 + v^2}$

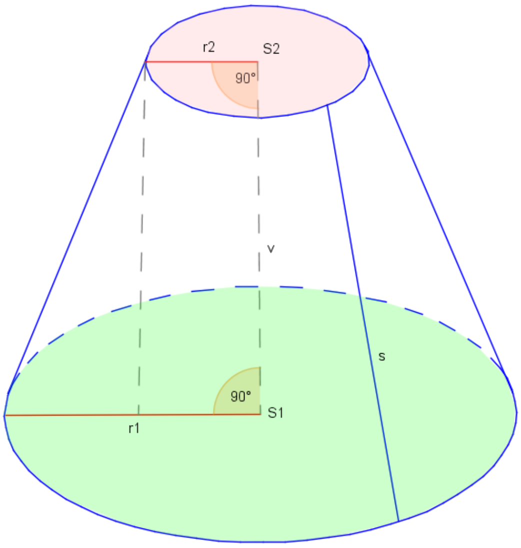
Pobočná hrana: $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2}$

Obvod středního řezu: $O_s = \frac{O_1 + O_2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} . n$

Obsah středního řezu: $S_s = \left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2}\right)^2$

3.2. Komolý rotační kužel

Komolý kužel je taktéž jako komolý hranol řazen do těles základních.



Objem: $V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

Povrch: $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + Spl$

$Spl = \pi(r_1 + r_2)s$

Pomocné vzorce

Strana kužele: $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2}$

Výška kužele: $v = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2}$

Obvod středního řezu: $O_s = \pi(r_1 + r_2)$

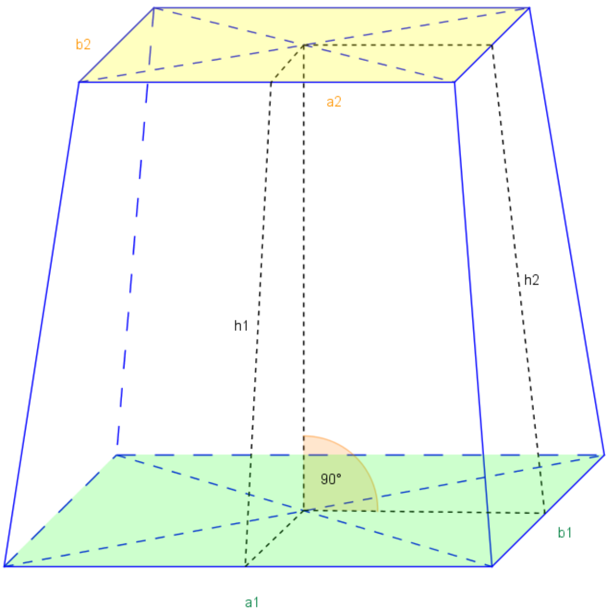
Obsah středního řezu: $S_s = \pi\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2$

3.3. Jehlanec s obdélníkovými podstavami

Jehlanec s obdélníkovými podstavami, neboli *obelisk* je útvar, u kterého nejsou podstavy podobné obdélníky. Protilehlé stěny jsou stejné.

Objem: $V = \frac{1}{6} v \, [a_1 b_1 + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + a_2 b_2]$

Povrch: $S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 + a_2) h_1 + (b_1 + b_2) h_2$

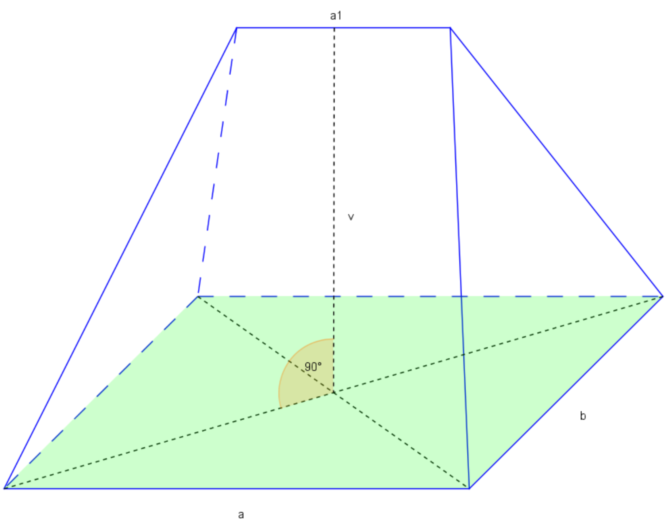


Pomocné vzorce

Výška stěny h_1: $h_1 = \sqrt{\left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2 + v^2}$

Výška stěny h_2: $h_2 = \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + v^2}$

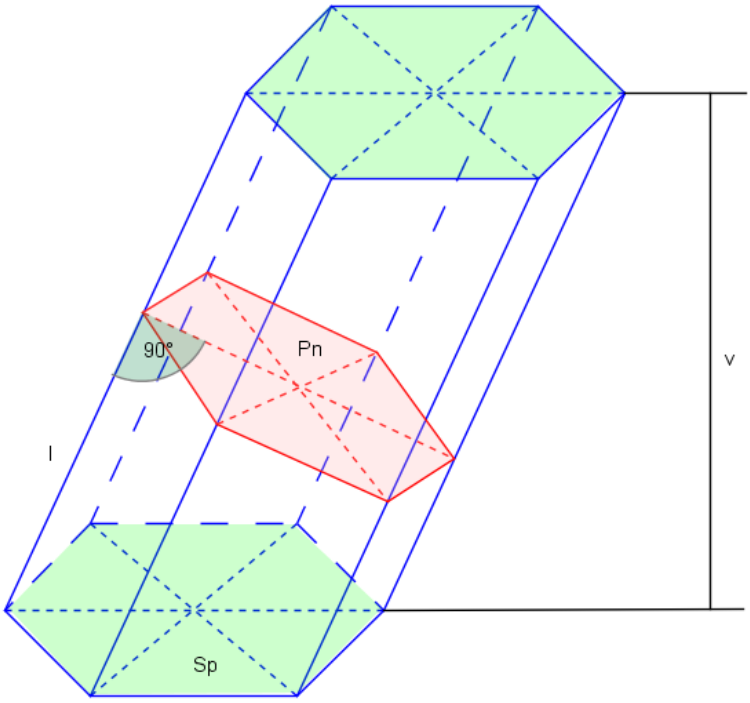
3.4. Obecný klín



Objem: $V = \frac{1}{6} bv(2a + a_1)$

Povrch: Obsah čela klínu + součet obsahů pobočných stěn

3.5. Kosý hranol



Objem: $V = P.v$
$V = S_{pn}.l$

Povrch: $S = 2S_p + S_{pl}$
$S_{pl} = O_n.l$

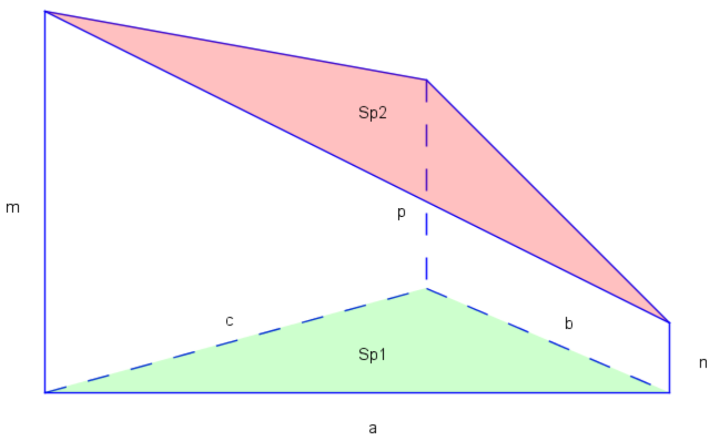
O_n - obvod kolmého (normálového) řezu P_n

3.6. Koso seříznutý kolmý trojboký hranol

Objem: $V = P_1 \frac{m+n+p}{3}$

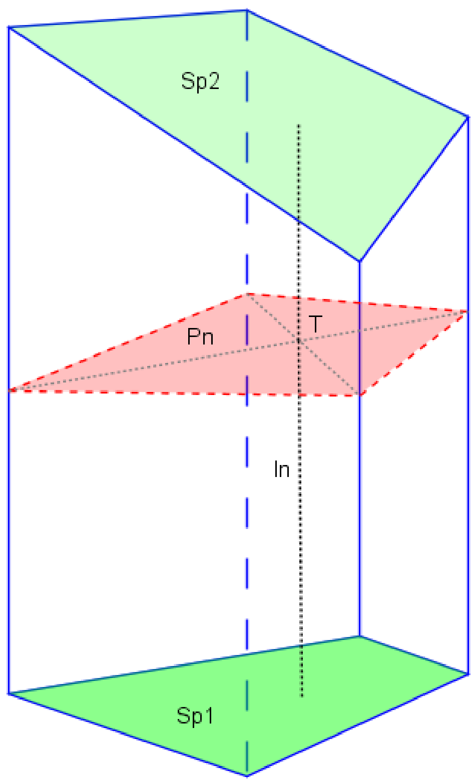
$\frac{m+n+p}{3}$ – *aritmetický průměr délek bočních hran*

Povrch: $S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$
$S_{pl} = \frac{1}{2}[(m+n)a + (n+p)b + (m+p)c]$



3.7. Na obou stranách koso seříznutý n-boký hranol

Původní n-boký hranol, seříznutý dvěma rovinami.



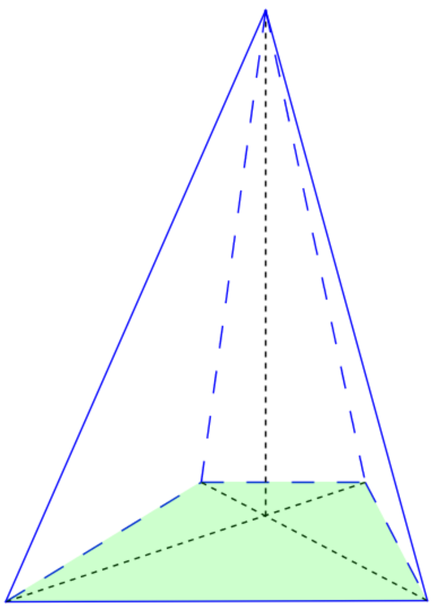
Objem: $V = {\color{red}S_{Pn}}.l_n$

l_n - spojnice těžišť krajních řezů (ploch) i těžiště kolméhořezu

Povrch: $S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$

$S = S_{p1} + {\color{red}O_n}.l_n$

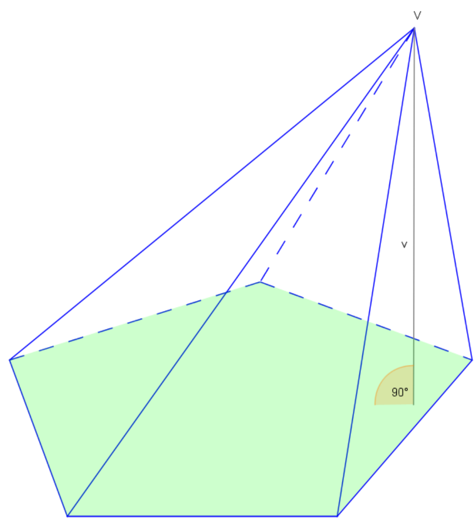
3.8. Nepravidelný jehlan kolmý a kosý



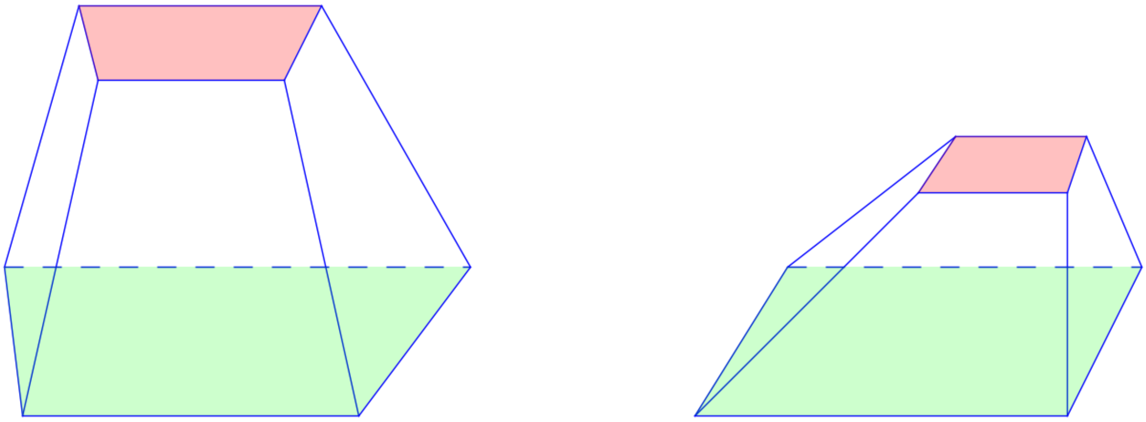
Objem: $V = \frac{1}{3} S_p.v$

Povrch: $S = S_p + S_{pl}$

S_{pl} = součtu obsahů bočních stěn, které nejsou stejné



3.9. Nepravidelný komolý jehlan kolmý a komolý jehlan kosý



Objem: $V = \frac{v}{3}\left(P_1 + P_2 + \sqrt{P_1 P_2}\right)$

Povrch: Součet obsahů podstav + obsah pláště

S_{pl} = *součtu obsahů bočních lichoběžníkových stěn, které nejsou stejné*

3.10. Kosý válec

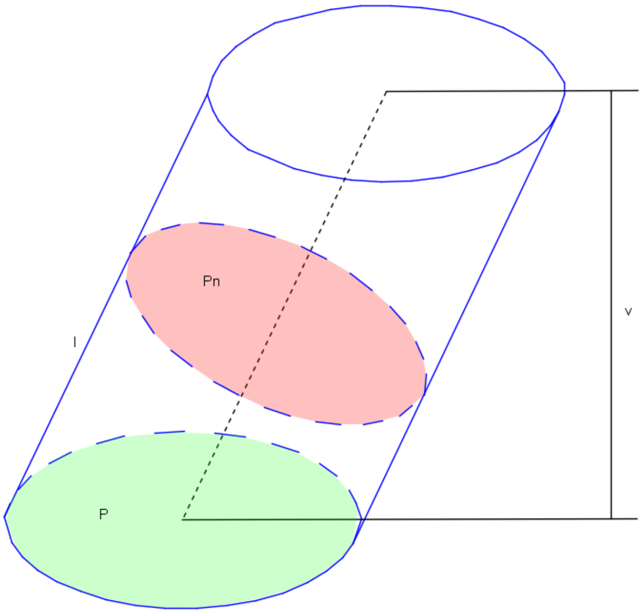
Objem: $V = S_p . v$

$V = \pi r^2 v = \frac{\pi d^2}{4} v$

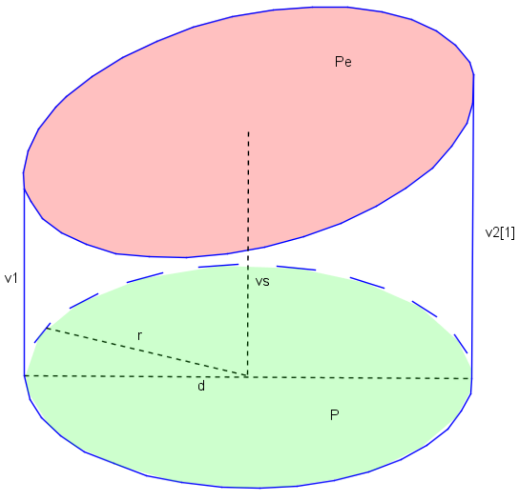
Povrch: $S = 2S_p + S_{pl}$

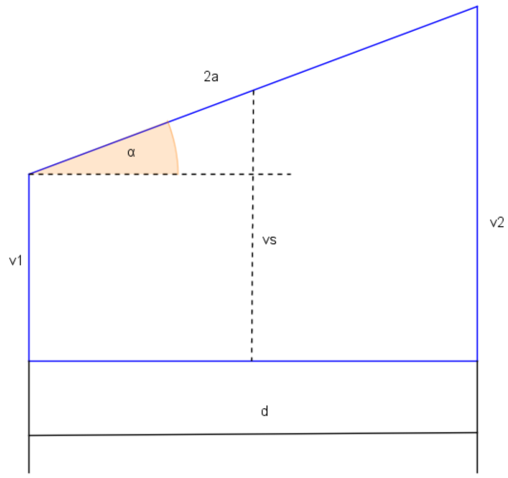
$S_p = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

$S_{pl} = O_n . l$



3.11. Koso seříznutý válec





Objem: $V = S_p . v_s$

$V = \pi r^2 v_s = \frac{\pi d^2}{4} v_s$

Povrch: K obsahům obou podstav musíme přičíst obsah pláště

$S_p = \frac{\pi d^2}{4}$

$S_{pe} = \frac{S_p}{\cos \alpha} = \pi ab = \frac{1}{2}\pi ad = \frac{1}{4}\boldsymbol{\pi d\sqrt{d^2 + (v_2 - v_1)^2}}$

$S_{pl} = \pi r(v_1 + v_2) = \pi d v_s$

$\boldsymbol{S = S_p + S_{pe} + S_{pl}}$

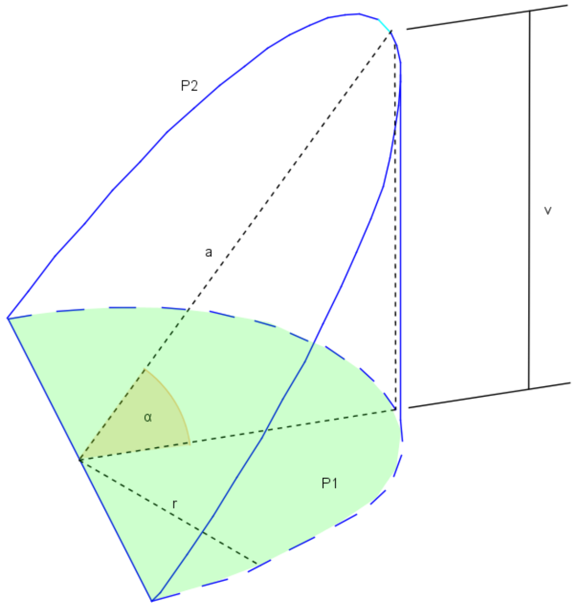
Pomocné vzorce

Střední výška: $v_s = \frac{v_1+v_2}{2}$

Hlavní osa elipsy: $2a = \sqrt{d^2 + (v_2 - v_1)^2}$

Vedlejší osa elipsy: $2b = d$

3.1. Klín s válcovou plochou – úsek válce



Objem: $V = \frac{2}{3}r^2v$

Povrch: $\boldsymbol{S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}}$

$S_{p1} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{8}\pi d^2$

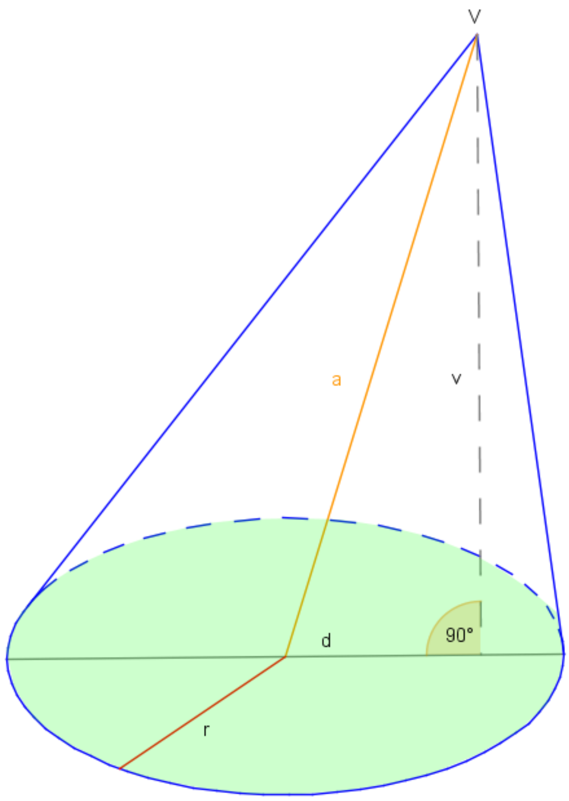
$S_{p2} = \frac{1}{2}\pi ar = \frac{1}{2}\pi r\sqrt{r^2 + v^2} = \frac{S_{p1}}{\cos\alpha}$

$S_{pl} = 2rv$

Pomocné vzorce

Hlavní poloosa: $a = \sqrt{r^2 + v^2}$
Vedlejší poloosa: $b = r$

3.2. Kosý kužel



Objem: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

Objem je roven jedné třetině objemu válce, který má stejnou postavu a stejnou výšku.

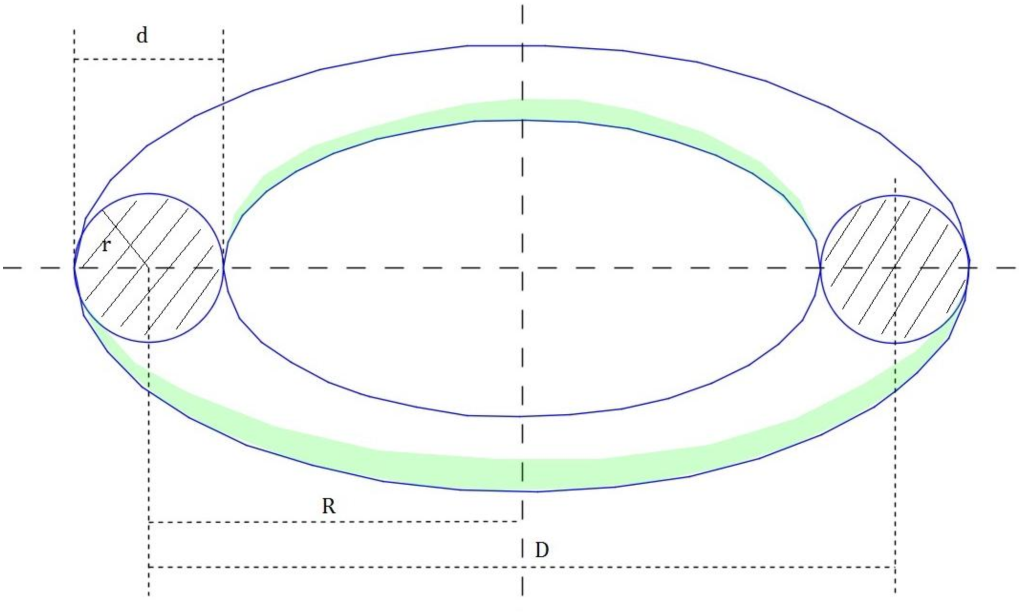
3.3. Anuloid (prstenec s kruhovým průřezem)

Objem: $V = 2\pi^2 R r^2 \doteq 19{,}7392\, R r^2$

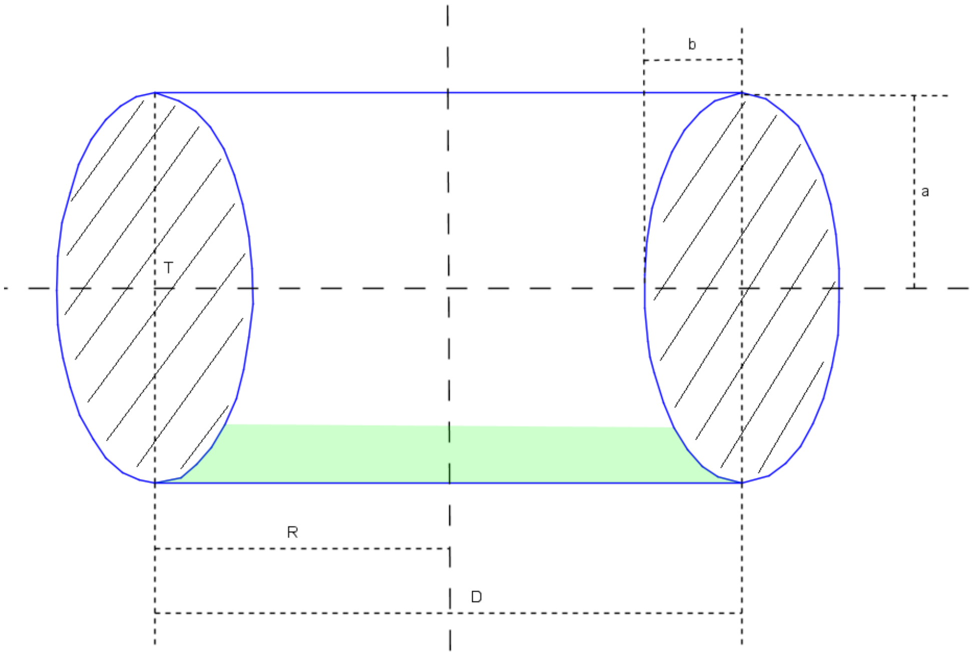
$V = \frac{1}{4}\pi^2 D d^2 \doteq 2{,}4674\, D d^2$

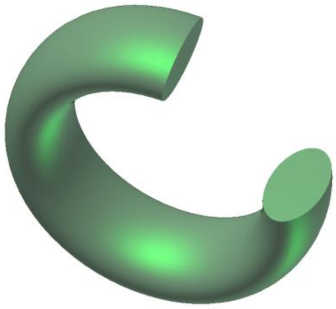
Povrch: $S = 4\pi^2 R r \doteq 39{,}4784\, R r$

$S = \pi^2 D d \doteq 9{,}8696\, D d$



3.4. Prstenec s eliptickým průřezem





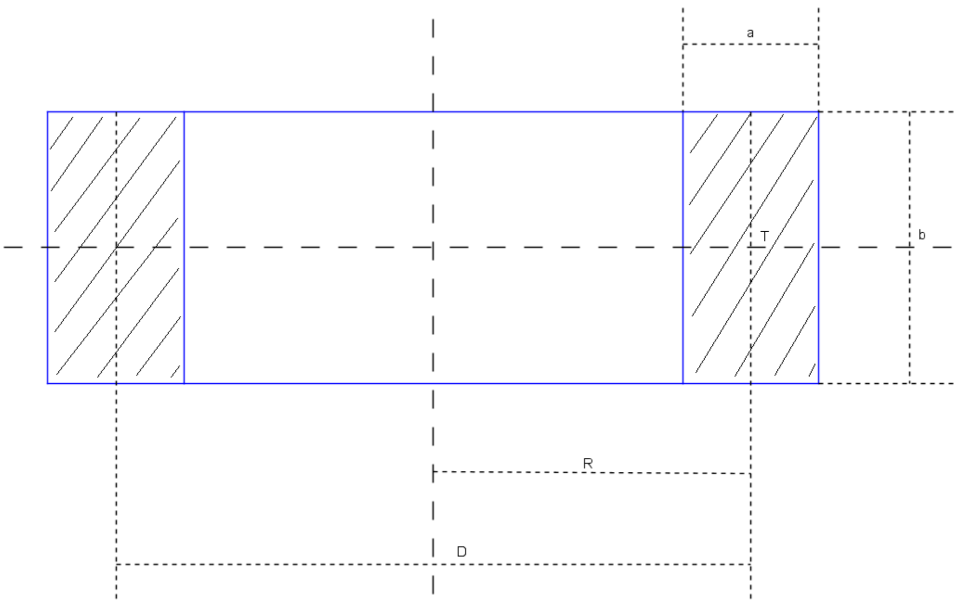
Objem: $V = 2\pi^2 abR$

Povrch: $S \doteq 2\pi^2(a+b)R$

3.5. Prstenec s obdélníkovým průřezem

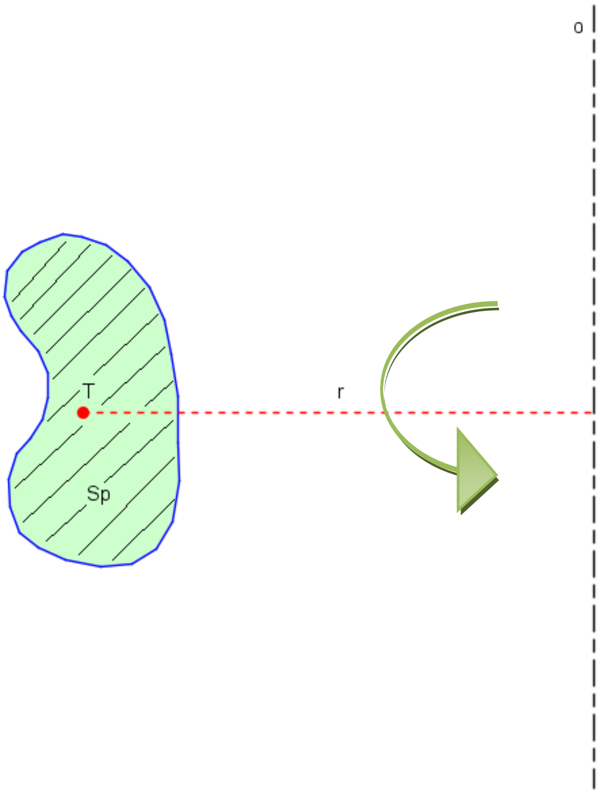
Objem: $V = 2\pi abR$

Povrch: $S = 4\pi(a+b)R$



3.6. Guldinovo pravidlo pro povrch rotačních těles

Guldinovo pravidlo je pravidlo pro výpočet povrchů rotačních těles.$\boldsymbol{S = 2\pi\varrho l}$



ϱ=r; l = dráha těžiště obvodu tvořící plochy

Pokud se pohybuje plocha (S_p), která tvoří výsledný tvar tělesa tak, že její rovina je pořád kolmá k výsledné prostorové křivce, kterou při pohybu plochy opisuje těžiště plochy, rovná se plášť vzniklého rotačního tělesa **součinu obvodu** původní tvořící plochy a **dráhy těžiště obvodu** této plochy.Zní to složitě, ale na příkladu je to velmi jednoduché.

Příklad:

$\boldsymbol{D = 100\ cm}$

$\boldsymbol{a = 3\ cm}$

$\boldsymbol{b = 4\ cm}$

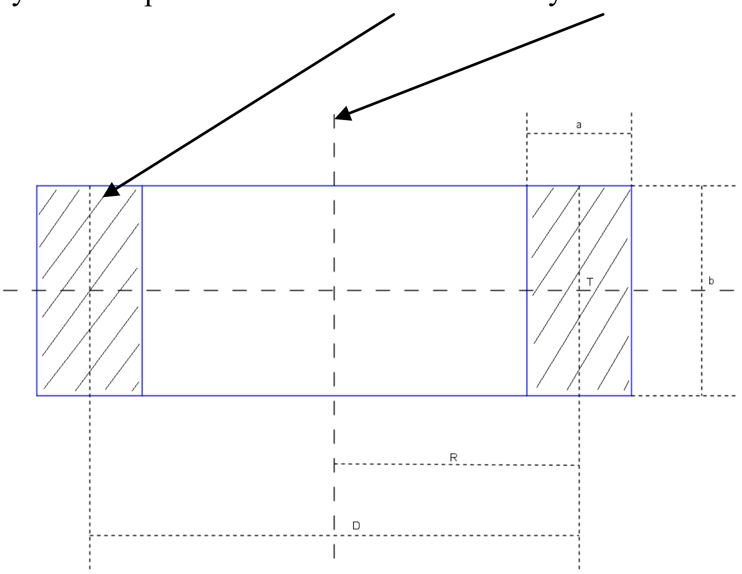
Jako plochu S_p zde máme obdélník 3 x 4 cm. Obdélník je to z toho důvodu, že je to jednoduchý útvar a má své těžiště ve středu strany „a.“ Nejprve spočítáme povrch přímo ze vzorce pro prstenec s obdélníkovým průřezem, který vznikne právě rotací obdélníka okolo osy.

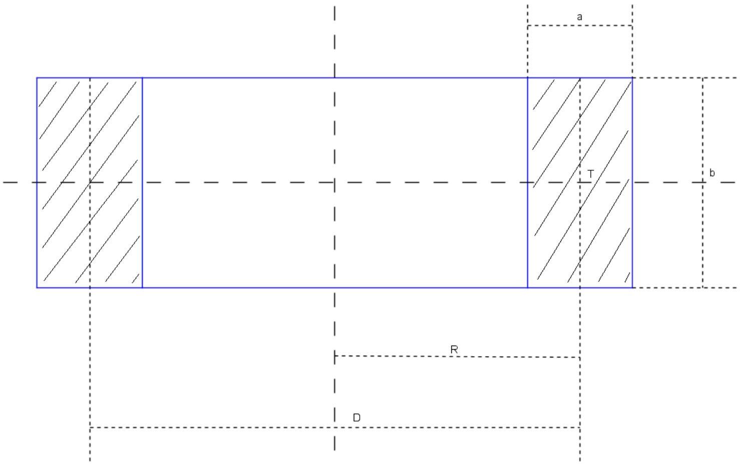
Vzorec pro povrch je tedy:

$S = 4\pi(a + b)R$

$S = 4\pi(3 + 4)50$

$\underline{\boldsymbol{S = 4398,23\ cm^2}}$





Nyní zkusíme povrch téhož tělesa vypočítat podle Guldinova pravidla. Obvodem tvořící plochy je zde obvod obdélníka, který se podle vzorce $o = 2(a + b)$rovná **14 cm.**

Obvod tvořící plochy už tedy máme spočítaný a zbývá dopočítatdráhu těžiště obvodu této plochy. Těžiště obvodu je u obdélníka zároveň těžiště plochy. Tato dráha je vlastně obvodem kružnice jejíž průměr je „D" (100 cm). Obvod kružnice se spočte ze vzorce $o = \pi D$

$$o = \mathbf{314{,}1593\ cm}$$

Nakonec se provede součin obou spočítaných hodnot

$$S_{pl} = 14\,.\,314{,}16$$

$$\underline{\boldsymbol{S_{pl} = 4398{,}23\ cm^2}}$$

***S_{pl}** název povrch pláště u takovýchto „hranatých" těles není přesný, používám ho tu proto, že u těles s průřezem elipsy, kružnice nebo podobného tvaru se o povrch pláště jedná.*

Guldinovo pravidlo pro objem rotačního tělesa funguje. (Nemusí se jednat pouze o prstence, ale například i o válec – o rotační tělesa.) Pokud se tvořící plocha pootočí o méně než 360°, obsah pláště se spočte takto:

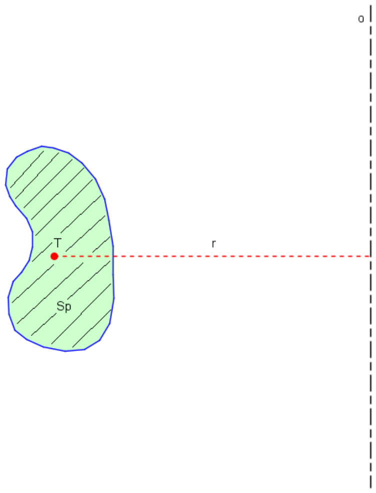
$$S_{pl} = 2\pi \varrho l \frac{\alpha°}{360°}$$

Nesmíme však zapomenout na to, že orotováním méně než 360° vzniknou dvě podstavy (na každé straně jedna), proto musíme jejich povrchy k výslednému povrchu přičíst.

$$\boldsymbol{S = S_{pl} + 2P}$$

3.7. Guldinovo pravidlo pro objem rotačních těles

Vztah pro objem rotačního tělesa je podobný jako vztah pro povrch rotačního tělesa. Odlišné je pouze to, že zde násobíme **obsah plochy** (S_p) tvořící celkové těleso a dráhu (2πr), kterou při rotaci opisuje těžiště plochy „T".



$$\boldsymbol{V = 2\pi r S_p}$$

Pokud je zde úhel při otočení tvořící plochy menší než 360°, u objemu si nemusíme všímat dvou vzniklých ploch (průřezů na obou koncích) a vzorec pro takovéto těleso vypadá takto:

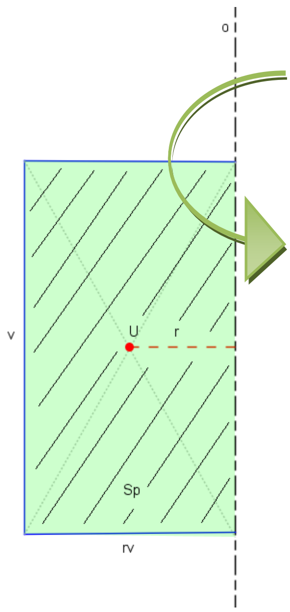
$$V = 2\pi r S_p \frac{\alpha°}{360°}$$

Příklad:

$\boldsymbol{v = 12\ cm}$

$\boldsymbol{r_v = 6\ cm\ (poloměr\ podstavy\ válce)}$

Na příklad objemu jsem si vybral (pro názornost že tělesa nemusí být pouze prstencová) rotační válec. Nejprve opět spočteme objem pomocí klasického vzorce pro výpočet objemu válce.



$$V = \pi r^2 v$$

$$V = \pi 6^2 12$$

$$\underline{\boldsymbol{V = 1357,2\ cm^3}}$$

Pro použití Guldinova pravidla pro objem musíme zjistit obsah obdélníka, který svojí rotací podle osy „o" tvoří rotační válec (v tomto případě rovnostranný). Vzorec pro obsah tohoto obdélníka je:

$$S = a \cdot b$$

$$S = 6 \cdot 12$$

$$\boldsymbol{S_p = 72\ cm^2}$$

Dále je třeba znát dráhu, kterou při rotaci opisuje těžiště tvořící plochy (obdélníka) „T“. Tato dráha je obvodemkružnice o poloměru r (3 cm).

$$S = 2\pi r$$

$$\boldsymbol{S = 18,85\ cm}$$

Nyní podle vzorce $V = 2\pi r S_p$ stačí obsah obdélníka vynásobit s dráhou, kterou při rotaci opisuje těžiště tvořící plochy „T“.

$$V = 72\,.\,18{,}85$$

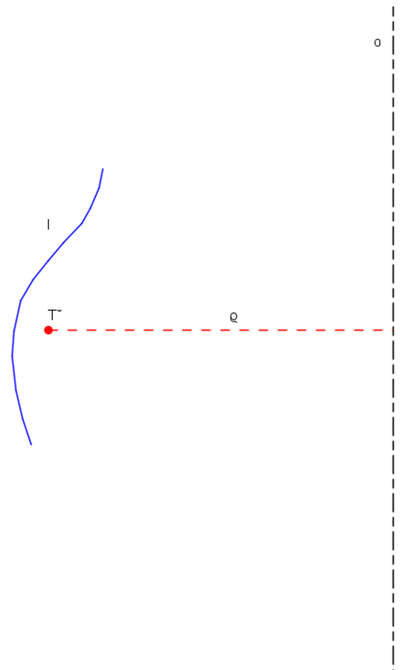
$$\underline{\boldsymbol{V = 1357,2\ cm^3}}$$

Z toho vyplývá, že i Guldinovo pravidlo pro objem rotačních těles funguje a že funguje i na běžných rotačních tělesech. Můžeme například spočítat povrch a objem tvaru sudu atd.

Paul Guldin (1577 - 1643)

Paul Guldin byl švýcarský matematik, astronom a později profesor matematiky žijící na přelomu 16. a 17. století. Známý je hlavně právě kvůli zmíěné Guldvinově větě. Byl však obviněn z plagiátorství, protože tato věta (v poněkud fádní formě) byla již vyslovena z úst řeckého matematika Pappa (přibližně 300 n. l.). Tato pomluva však byla později vyvrácena.

3.8. Guldinovo pravidlo pro výpočet obsahu rotační plochy



Obsah rotační plochy, která vznikne otočením rovinné křivky (i úsečky) okolo osy o, ležící v rovině křivky se spočítá jako součin délky l tvořící křivky (úsečky) a dráhy, kterou při rotaci opsalo těžiště T´ křivky.

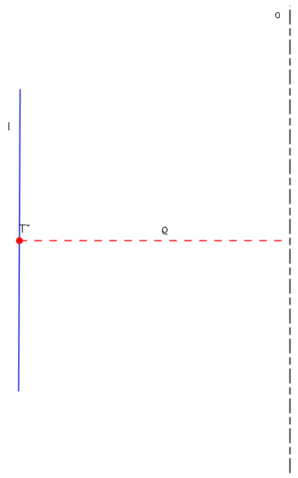
$$\boldsymbol{S = 2\pi\varrho l}$$

Pokud se pootočí těžiště křivky o úhel $\alpha < 360°$, platí:

$$\boldsymbol{S = 2\pi\varrho l\,.\frac{\alpha°}{360°}}$$

Příklad:

Nejjednodušším příkladem je, pokud rotační plocha vznikne rotací úsečky, která má své těžiště přesně v půlce své délky. Délka úsečky je 10 cm a vzdálenost těžiště od osy je 7 cm.



$$\boldsymbol{S = 2\pi\varrho l}$$

$$\boldsymbol{S = 2\pi 10.7}$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 439{,}82\ cm^2}}$$

4.Složená tělesa

Složená tělesa nepatří mezi tělesa základní, ale jsou ze základních těles tvořena. Buď je to sjednocení dvou či více těles, nebo naopak jejich rozdíl, nebo je také možný případ současného průniku těles a rozdílu od jiného tělesa. Pro výpočty plošných stěn těles slouží vzorečky pro plošné obrazce. Potřebné zde můžou být také věty:

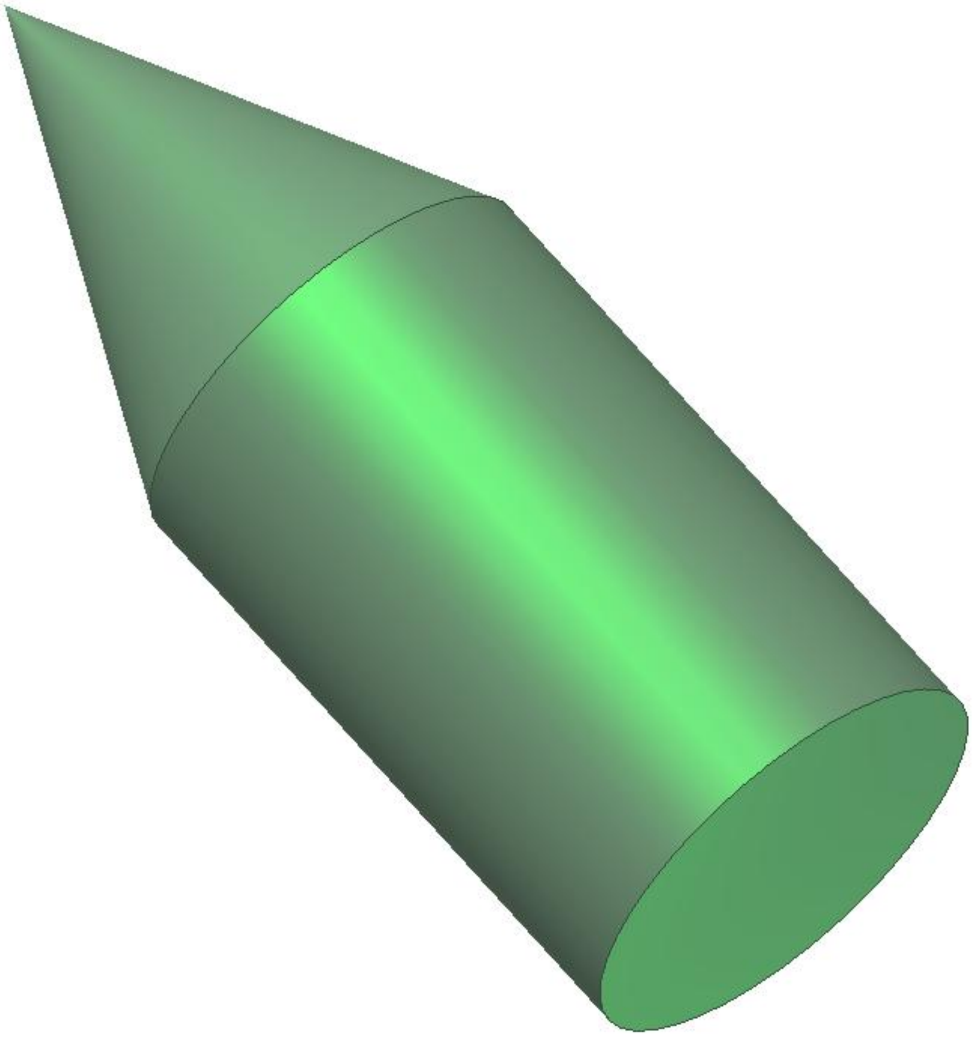
Sinová věta: $\frac{a}{sin\ \alpha} = \frac{b}{sin\ \beta} = \frac{c}{sin\ \gamma} = 2r$

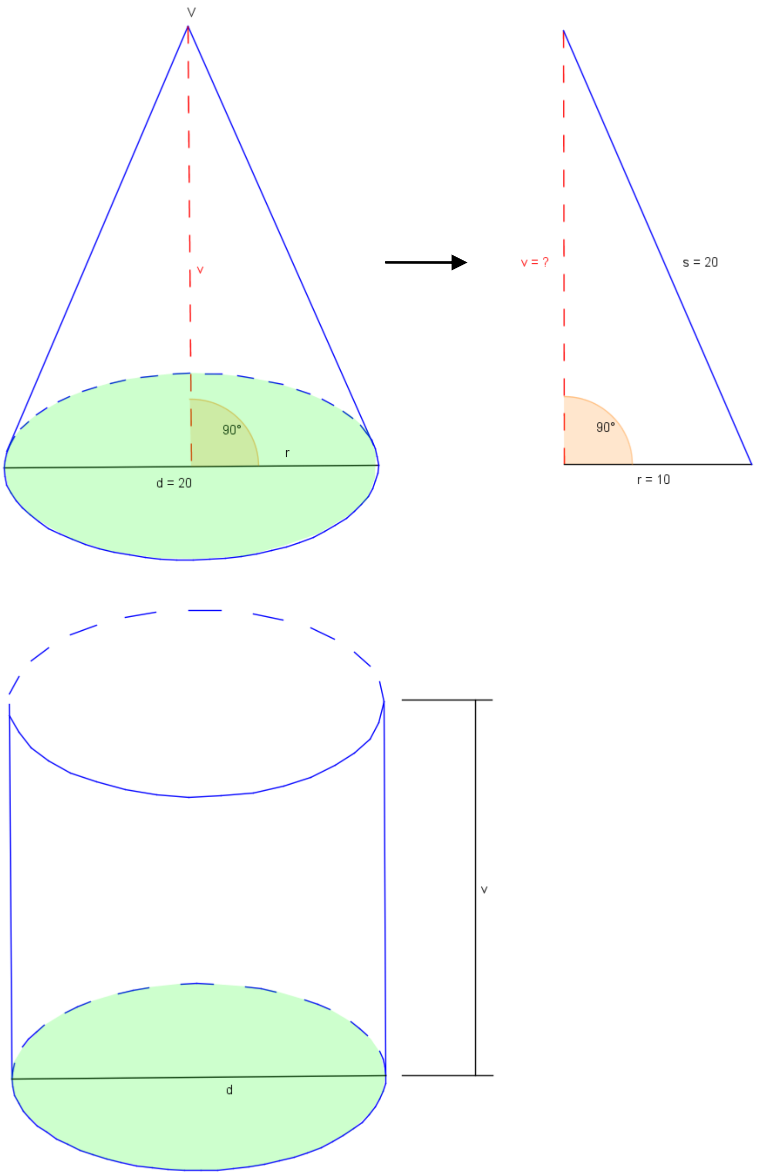
Kosinová věta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha$ (*cyklická záměna)*

Když počítáme s více objekty – jak plošnými, tak 3D, je dobré si nějakým způsobem označit „co je co." Při výpočtu objemu je třeba si uvědomovat, že pokud máme například sjednocení dvou těles, nelze pouze sečíst oba objemy, ale musí se odečíst objem „společné části" obou těles. Něco podobného platí i u výpočtů povrchu těles, kde zase musíme odečítat styčné plochy a všechny plochy, které do celkového povrchu tělesa nepatří.

- V Geonextu lze tato tělesa konstruovat stejně jako tělesa základní. Jediným problémem tohoto programu jsem viděl to, že při velkém množství použitých a skrytých čar se Geonext zasekával (především u válce a jemu podobných těles, protože podstavy – elipsy, tvořené krátkými úsečkami obsahují mnoho skrytých prvků, které program zřejmě výrazně zpomalují).Také z tohoto důvodu a z důvodu názornosti jsem celková tělesa vytvořil v programu Autodesk Inventor 2009.

4.1. Těleso č.1





a) Pro **výpočet objemu (V)** si těleso rozložíme na rotační válec a rotační kužel. Spočtou se objemy obou těles a následně se sečtou.V tomto případě známe:

u kužele: **d = 20 => r = 10**

s = 20

u válce: **d = 20 => r = 10**

v = 35

- Nejprve je potřeba zjistit výšku kužele, která se spočte pomocí Pythagorovy věty:

$v^2 = s^2 - r^2$ => $v = 17{,}32$

Nyní můžeme výšku i poloměr podstavy kužele dosadit do vzorce pro výpočet objemu:

$$V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

$$\underline{V_k = 1813{,}75}\ [cm^3]$$

- Výpočet objemu válce a poté

součet obou objemů $(V_k + V_v)$.

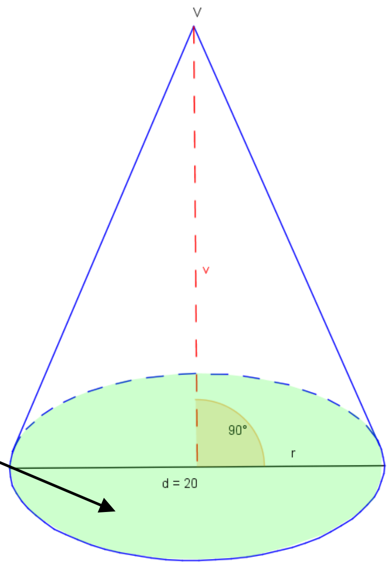
$$V_v = \pi r^2 v$$

$$\underline{V_v = 10995{,}57}\ [cm^3]$$

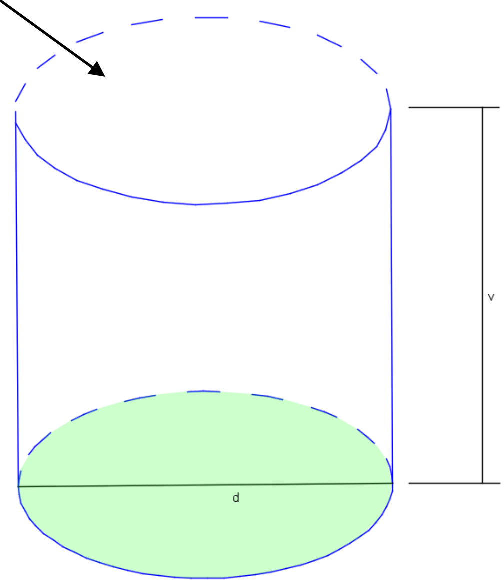
Celkový objem $(V_k + V_v)$ je tedy **<u>12809,32</u>** $[cm^3]$.

b) Výpočet povrchu (S):

Obě tělesa mají každá svůj povrch. Tyto povrchy jsou však včetně svých podstav, a pokud bereme tento kužel s válcem jako jedno těleso, musíme obě styčné podstavy (podstavu kužele i horní podstavu válce) od celkového povrchu odečíst.



(Povrch celkového tělesa si můžeme představit jako tu plochu, kterou bychom například mohli natřít barvou.)



- Opět si těleso rozdělíme na kužel a válec, opět spočteme povrchy obou těles.

  Povrch kužele:

  $S_k = \pi r^2 + \pi r s$

  $\underline{S_k = 942{,}48}$

- Výpočet povrchu válce:

  $S_v = 2\pi r(r + v)$

  $\underline{S_v = 2827{,}43}$

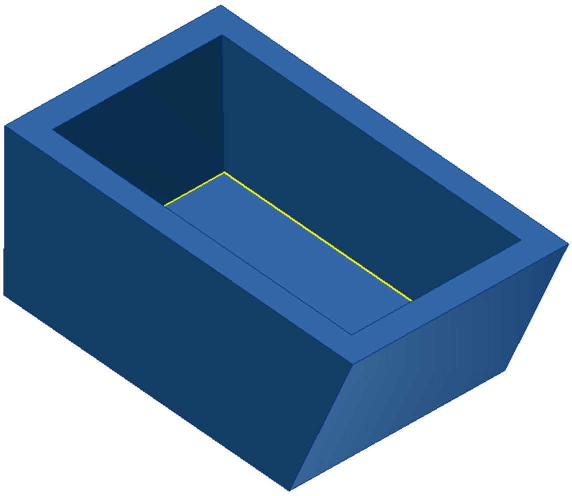
- Povrchy kužele a válce se sečtou a od výsledného povrchu se odečtou již zmiňované dvě stykové podstavy (od obou těles jedna). Další způsob je samozřejmě ten, že z obou vzorců rovnou odečteme podstavy. U některých těles to však dělá obtížně, a proto je názornější to, že podstavy odečteme až nakonec.

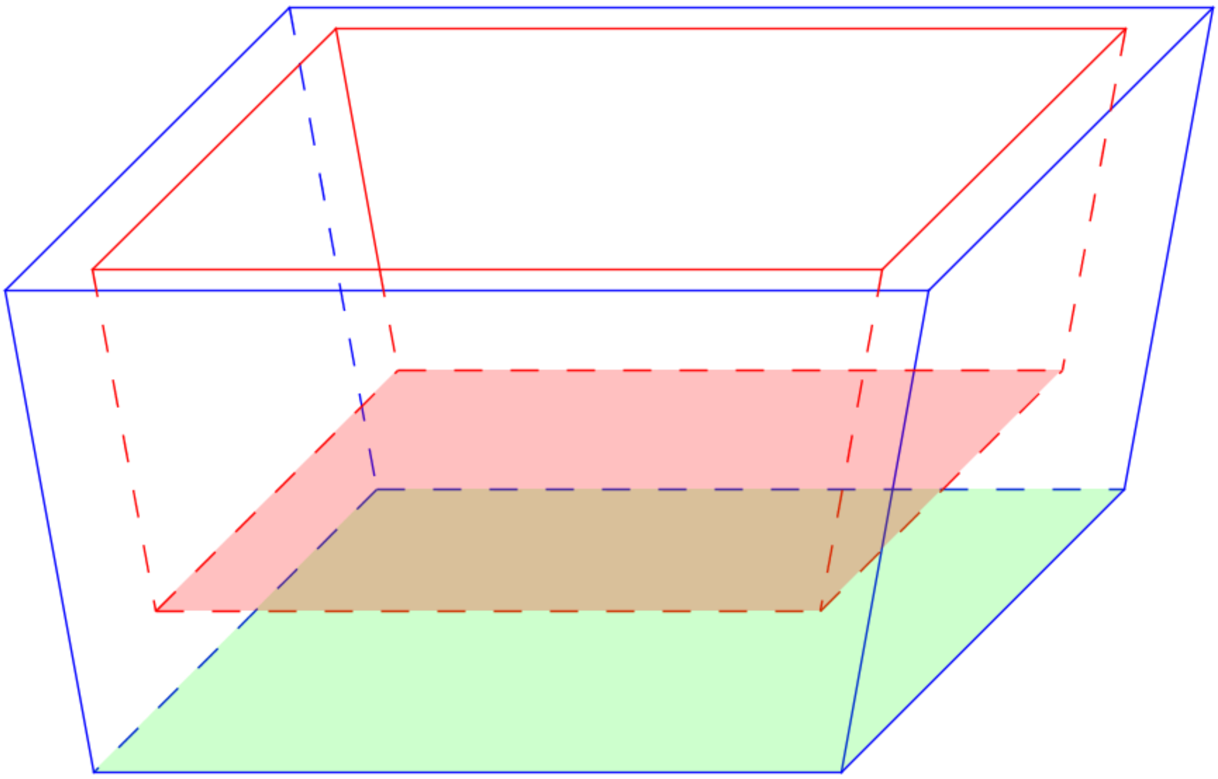
$(S_k + S_v) - 2(\pi r^2)$

S=3141,59

4.2. Těleso č.2

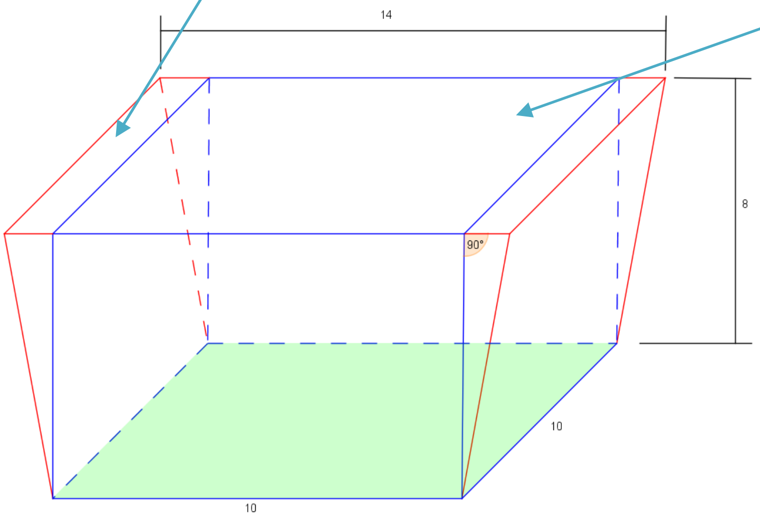
V tomto případě se jedná o vzájemný rozdíl dvou těles.Tato tělesa mají totožný tvar a rozdílnou velikost (objem, povrch). Jako příklad tohoto tělesa si lze představit necky, korbu auta… Pro výpočet povrchu a objemu spočítáme tyto veličiny na každém tělesu zvlášť. Objemy obou těles poté od sebe odečteme a tím se získá výsledný objem. O celkovém výslednémpovrchu se zmíním dále.

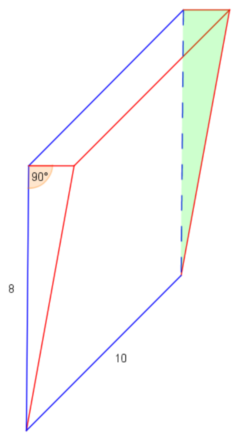


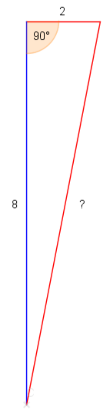


1) **Objem tělesa**

a) **Výpočet objemu „většího“ tělesa (V_v):** Prvním krokem je výpočet objemu „většího (vnějšího)“ tělesa. Jelikož toto není základní těleso, je dobré si těleso rozložit na kvádr a dva trojboké hranoly.







- Objem kvádru: $V_{k1} = abc$

  $V_{k1} = 10\ x\ 10\ x\ 8$

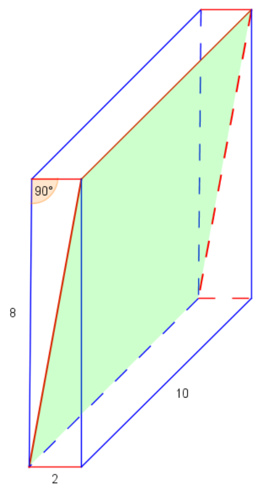
  $V_{k1} = 800\ [cm^3]$

- Nyní musíme do celkového „vnějšího“ tělesa dopočítat dvakrát, již zmíněný komolý trojboký hranol. Protože potřebujeme znát jeho **podstavu** ($V = \boldsymbol{Sp} \cdot v$), přes Pythagorovu větu si můžeme dopočítat i zbylou přeponu. Jednodušší však je oba hranoly „spojit“ a tím vznikne jeden kvádr, který má stejný objem, který mají oba hranoly dohromady.

  $V_{2hr} = abc$

  $V_{2hr} = 2\ x\ 10\ x\ 8$

  $\underline{V_{2hr} = 160\ [cm^3]}$



- Posledním krokem pro objem „většího“ tělesa je sečtení objemu kvádru a obou trojbokých hranolů (druhého kvádru).

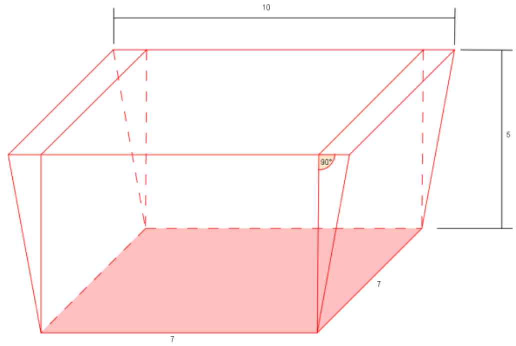
  $\boldsymbol{V_v} = V_{k1} + V_{2hr}$

  $\boldsymbol{V_v} = 800 + 160$

  $\underline{\boldsymbol{V_v = 960\ [cm^3]}}$

b) Výpočet objemu „menšího (vnitřního)“ tělesa (V_m):

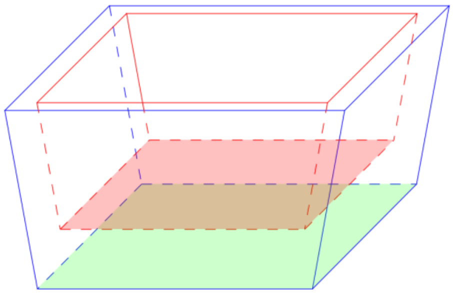
- Jelikož má vnitřní těleso stejný tvar, jeho objem se spočítá obdobně jako u tělesa vnějšího.



- Objem kvádru: $V_{k2} = 350\ [cm^3]$
- Objem obou hranolů (kvádru): $V_{2hr} = 52{,}5\ [cm^3]$
- Celkový objem vnitřního tělesa: $\boldsymbol{V_m = 402{,}5\ [cm^3]}$

c) Výpočet celkového objemu:

- Celkový objem se rovná objemu vnějšího tělesa, bez objemu tělesa menšího.



$$\boldsymbol{V} = V_v - V_m$$
$$\boldsymbol{V} = 960 - 402{,}5$$
$$\boldsymbol{V = 557{,}5\ [cm^3]}$$

2) Povrch tělesa

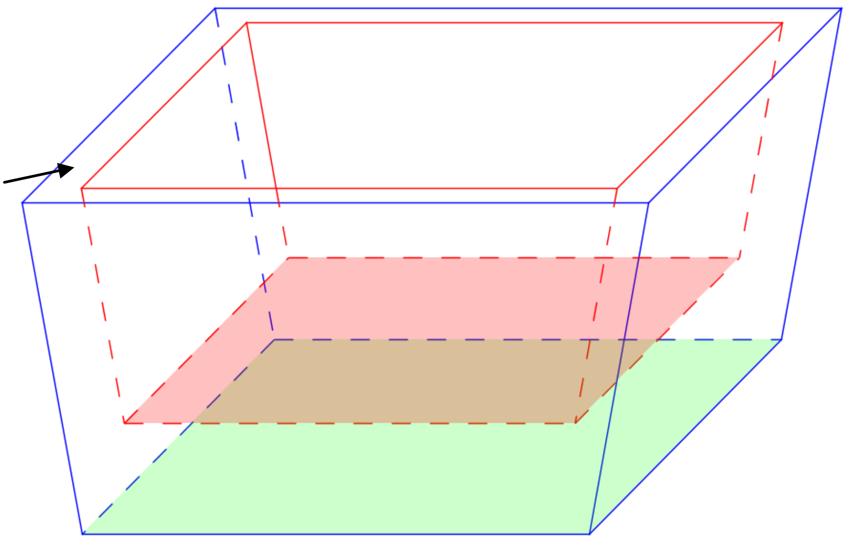
Povrch tělesa je dobré si opět představit jako tu plochu, která by se natřela, kdybychom těleso ponořili do barvy. V tomto případě jde tedy o:

4 pravidelné lichoběžníky

4 obdélníky

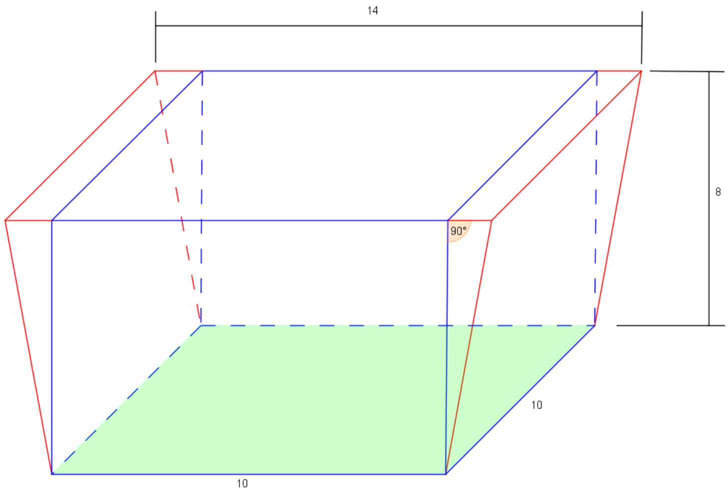
2 čtverce jako podstavy

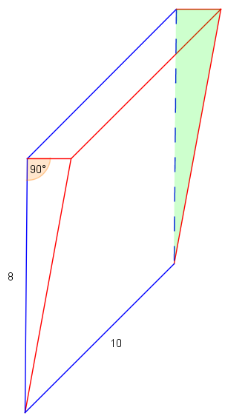
1 rozdíl obou větších podstav

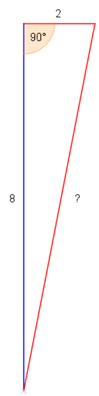


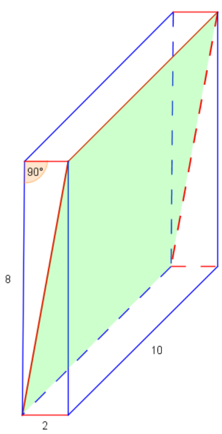
Pokud to ze zadání lze, můžeme obsahy všech těchto plošných obrazců sečíst a tím získáme celkový povrch.

Jiný způsob je ten, že si znovu rozložíme toto složené těleso na tělesa základní, avšak po výpočtech jejich povrchů nesmíme zapomenout odečíst ty strany (stěny), které se do celkového povrchu nepočítají (viz kužel a válec).



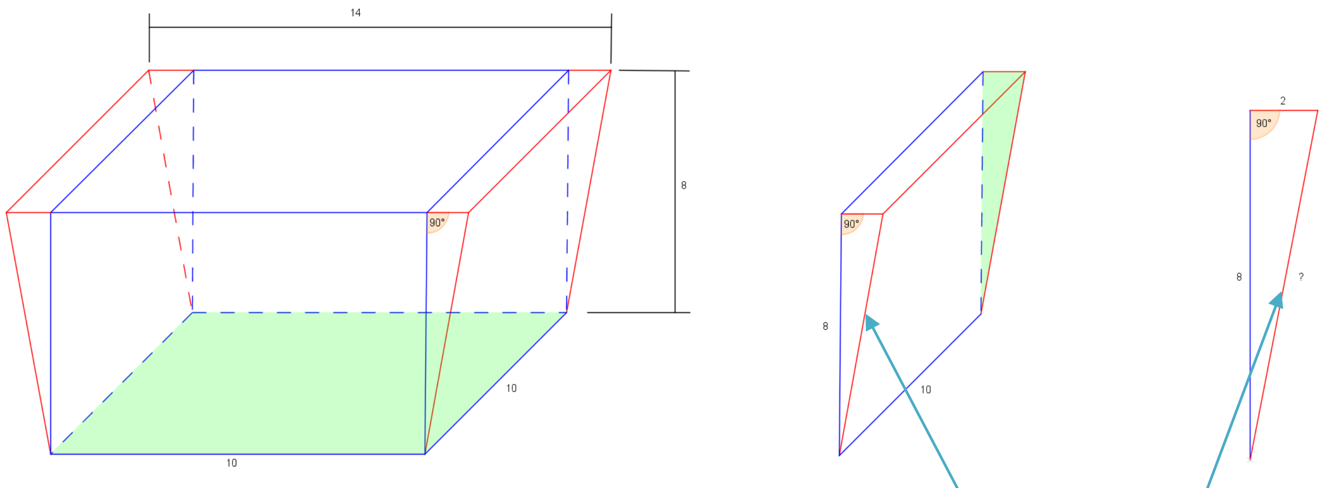






Při rozložení se tedy jedná (stejně jako u objemu) o kvádr a dva trojboké hranoly. Zde opět můžeme uplatnit Pythagorovu větu pro výpočet zbývající strany (přepony) podstavy hranolu a poté počítat s oběma hranoly zvlášť. Jednodušší je však opět „spojení“ hranolů do výsledného kvádru. Při počítání povrchu však musíme stále myslet na odečtení stěn, které netvoří celkový povrch.

Jednoduší je tedy počítat přímo se stěnami celkového tělesa a jejich obsahy následně sečíst.



a) **U „většího tělesa:“**

2 pravidelné lichoběžníky $2(S = \frac{a+c}{2} \cdot v)$ $= 192\ [\boldsymbol{cm^2}]$

1 čtverec jako podstava $(S = a^2)$ $=100\ [\boldsymbol{cm^2}]$

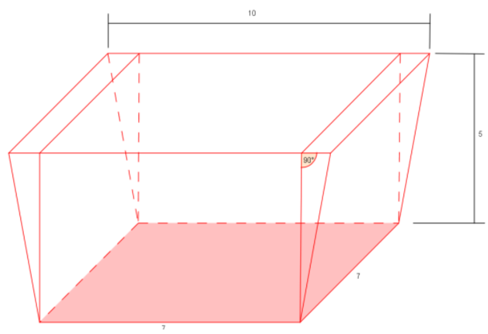
2 obdélníky $2(S = a \cdot b)$ => *musíme nejprve zjistit kratší stranu obdélníka a to přes již zmíněnou Pythagorovu větu*

$8^2 + 2^2 = 68$ => ***(a)*** = ***8,25***

$2(S = \boldsymbol{a} \cdot b)$ $= 165[\boldsymbol{cm^2}]$

Obsah: $S_1 = 457\ [\boldsymbol{cm^2}]$

b) **U „menšího tělesa:“** Opět postup stejný jako v předchozím bodě.



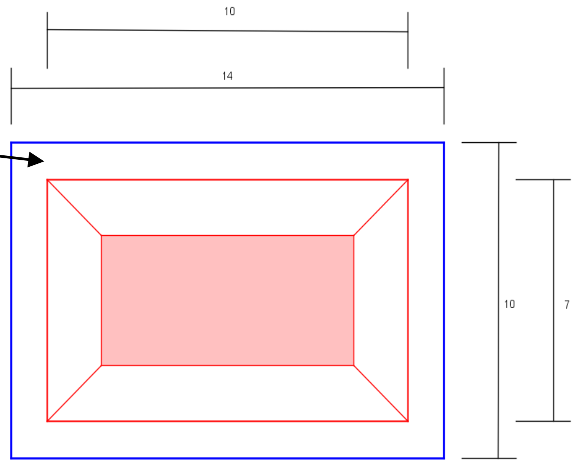
2 pravidelné lichoběžníky $2(S = \frac{a+c}{2} \cdot v)$ = 85 $[\boldsymbol{cm^2}]$

1 čtverec jako podstava $(S = a^2)$ = 49 $[\boldsymbol{cm^2}]$

2 obdélníky $2(S = a \cdot b)$ = 73 $[\boldsymbol{cm^2}]$

(opět Pythagorova věta)

Obsah: $S_2 = 207\ [\boldsymbol{cm^2}]$



c) Poslední nevypočítanou plochou zůstává plocha „tloušťky“ celého tělesa. Ta se zjistí rozdílem obsahu menšího od většího obdélníka.

$$S = S_v - S_m$$

$S = 140 - 70$

$\underline{\boldsymbol{S_3 = 70\ [cm^2]}}$

d) Nyní už stačí všechny vypočtené obsahy sečíst a tím vznikne celkový povrch tohoto tělesa.

$\underline{S_1 = 457\ [cm^2]}$

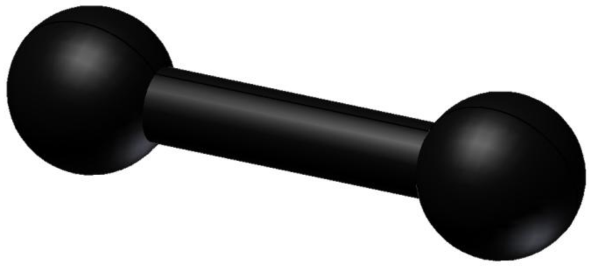
$\underline{S_2 = 207\ [cm^2]}$

$\underline{\boldsymbol{S_3 = 70\ [cm^2]}}$

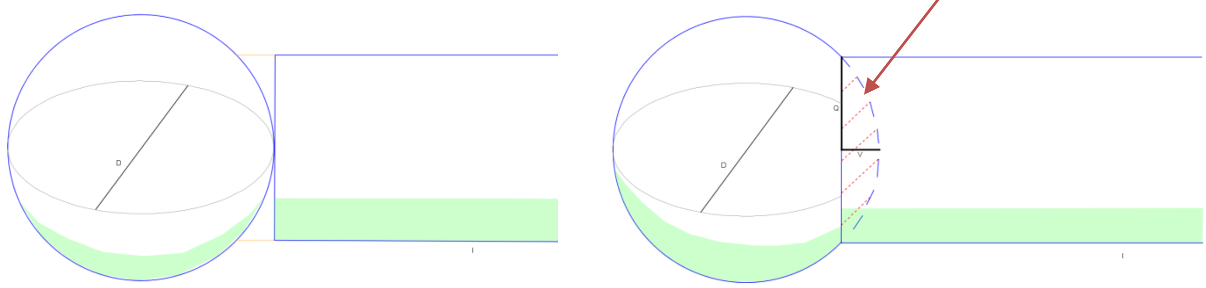
$$\boldsymbol{S = S_1 + S_2 + S_3}$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 734\ [cm^2]}}$$

4.3. Těleso č.3 - činka

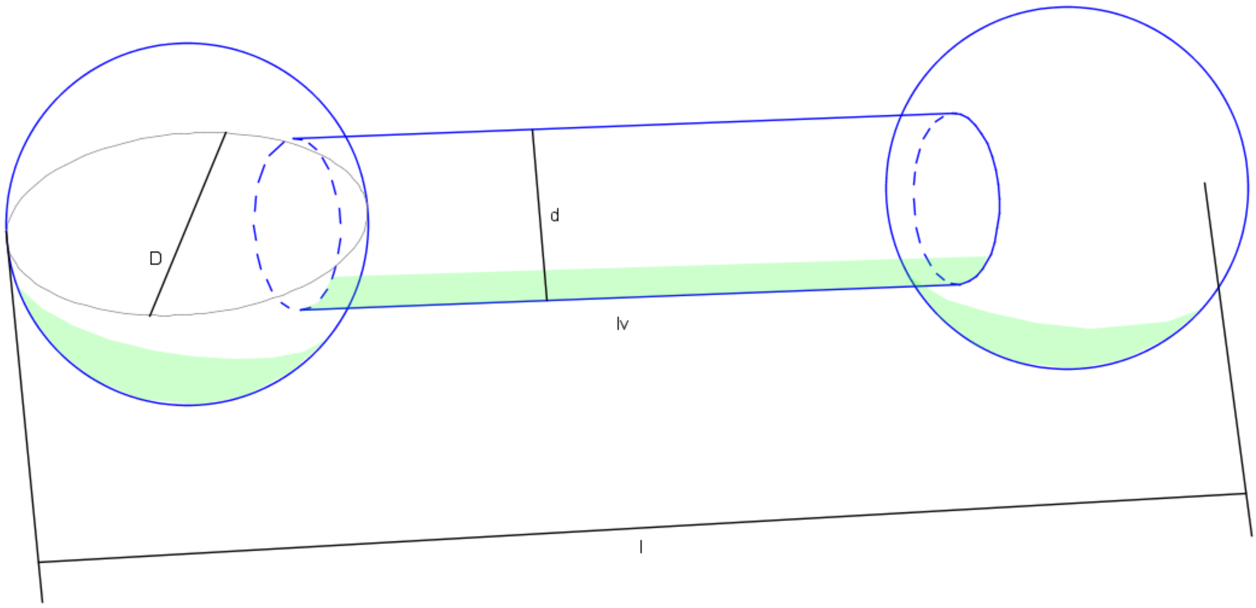


Činka - těleso, skládající se ze sjednocení tří těles – 2x koule a válce.**Objem činky,** u které má válec menší (zanedbatelnější) průměr podstavy, lze spočítat pouhým sečtením objemů všech tří těles – zanedbá se však při tom přesah části koule (objem kulové úseče) do válce.



Výsledek celkového objemu však není přesný (zvláště u činky s větším poměrem velikosti válce ku koulím), proto se od celkového objemu musí odečíst z obou stran činky objem kulové úseče.

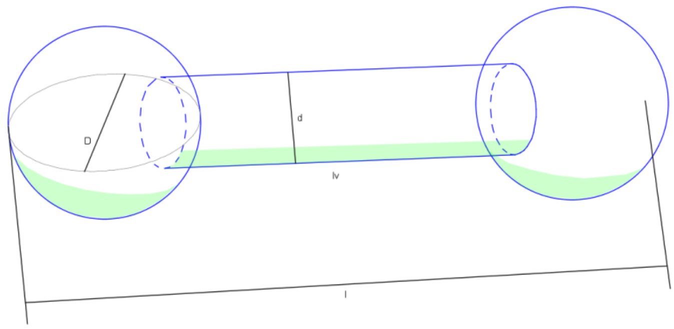
U celkového **povrchu činky**se musí odečíst povrch obou kulových úsečí, zasahujících z obou stran do válce + obsahy obou podstav válce, které se také nemohou do celkového povrchu činky počítat.



1) Objem činky:

Jak již bylo zmíněno, nejprve se vypočte objem obou koulí a válce, a poté se odečtou objemy kulových úsečí. Známe tedy **D**, což je poloměr koule, poloměr válce **d**, výšku válce $\boldsymbol{l_v}$a nakonec celkovou délku činky **l**.

D = **20**$[\boldsymbol{cm}]$ => **R** = **10**$[\boldsymbol{cm}]$
d = **12**$[\boldsymbol{cm}]$ => **r** = **6** $[\boldsymbol{cm}]$
$\boldsymbol{l_v}$ = **50**$[\boldsymbol{cm}]$ = **v**
l = **86** $[\boldsymbol{cm}]$



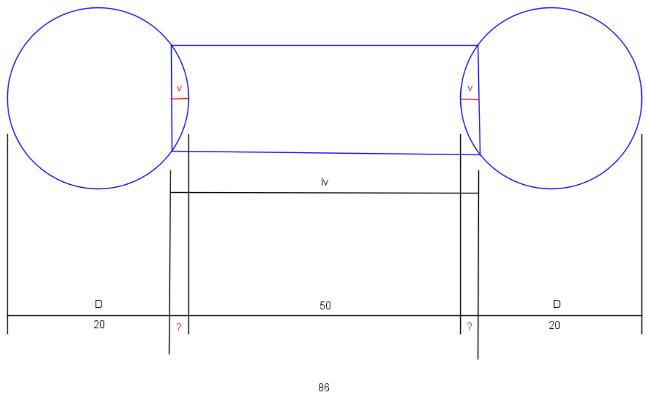
a) Výpočet objemu koule (2x): $V = 2V_k = 2(\frac{4}{3}\pi r^3)$

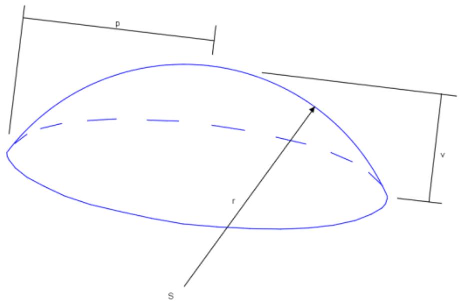
$\underline{\boldsymbol{V = 8377{,}6 \quad [cm^3]}}$

b) Výpočet objemu válce: $V = \pi r^2 v$

$\underline{\boldsymbol{V = 5654{,}9\ [cm^3]}}$

c) Nyní musíme spočítat výšku kulové úseče“v,”:





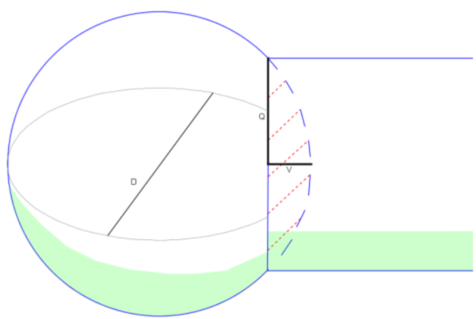
Ze zadaných rozměrů si lze spočítat neznámou v.

$v = [(20 + 50 + 20) - 86]/2$ $V = \frac{1}{6}\pi v(3\rho^2 + v^2)$

$\underline{\boldsymbol{v = 2}}$

d) Nyní se spočítá (2x) objem přebývající kulové úseče: Neznáme však **poloměr podstavy kulové úseče**, ten spočítáme podle vzorce $\rho = \sqrt{v(2r - v)}$.

$\boldsymbol{\rho = 6}$



$$V = 2V_{ku} = 2\left[\frac{1}{6}\pi v(3\rho^2 + v^2)\right]$$

$$\underline{\boldsymbol{V = 117{,}3\ [cm^3]}}$$

Objem, který nám nyní vyšel, budeme nakonec od celkového objemu dvou koulí a válce odečítat.

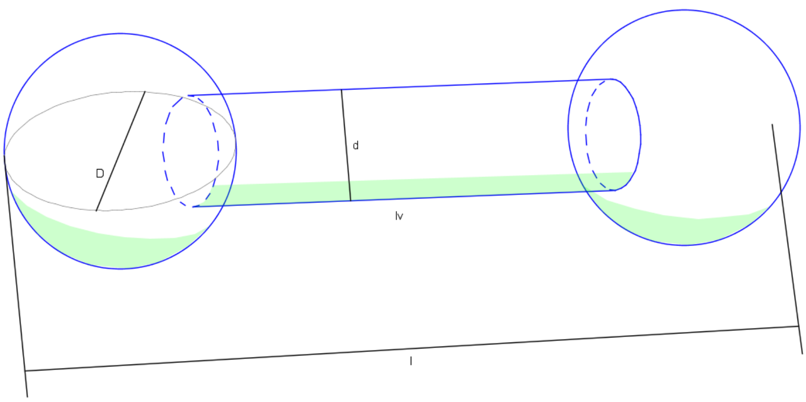
e) Objem obou koulí: **8377,6** $[\boldsymbol{cm^3}]$

Objem válce: $\boldsymbol{5654{,}9}$ $[\boldsymbol{cm^3}]$

Objem kulových úsečí: $\boldsymbol{117{,}3}\,[\boldsymbol{cm^3}]$

<u>Celkový objem: 13 915,2</u>$\underline{[\boldsymbol{cm^3}]}$

2) Povrch činky: Pro spočtení celkového povrchu činky je asi nejlepší opět vypočítat



povrchy obou koulí a povrch válce, poté povrchy sečíst a nakonec od celkového povrchu odečíst dva obsahy kruhů, (podstavy válce) a dva povrchy kulových vrchlíků (části povrchů koulí, které jsou „zapuštěny“ ve válci). Odečítáme je, protože do celkového povrchu tělesa nepatří, ale při výpočtech „celých těles (2x koule, válec),“ jsme je do výpočtu zahrnuli, proto je nyní musíme odečíst.

D = 20$[\boldsymbol{cm}]$ **=> R = 10**$[\boldsymbol{cm}]$
d = 12 $[\boldsymbol{cm}]$ **=> r = 6** $[\boldsymbol{cm}]$
$\boldsymbol{l_v}$ **= 50**$[\boldsymbol{cm}]$ **= v**
l = 86 $[\boldsymbol{cm}]$

a) Výpočet povrchu obou koulí:

$S = 2S_k = 2(4\pi r^2)$

$\underline{\boldsymbol{S = 2513{,}3[cm^2]}}$

b) Výpočet povrchu válce:

$S = 2\pi r(r + v)$

$\underline{\boldsymbol{S = 2111{,}2[cm^2]}}$

c) Nyní se spočítá, vše co do konečného povrhu nebude patřit:

- 2x obsah kruhu (podstavy válce)

  $S = 2S_{kr} = 2(\pi r^2)$

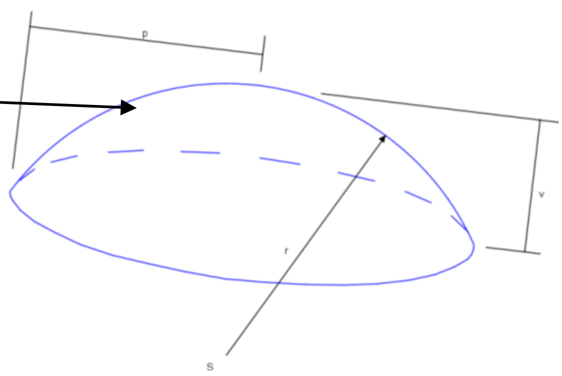
  $\underline{\boldsymbol{S = 226{,}2[cm^2]}}$

- 2x povrch kulového vrchlíku

  $S = 2Q = 2(2\pi rv)$

  (v – výšku kul. úseče už známe z výpočtu objemu)

  $\underline{\boldsymbol{Q = 251{,}3\ [cm^2]}}$



d) Sečteme „hlavní povrchy“ – povrch válce a obou koulí, a poté od nich odečteme povrchy kulových vrchlíků a obsahy kruhů.

Povrch obou koulí: $\mathbf{2513,3}[\boldsymbol{cm^2}]$

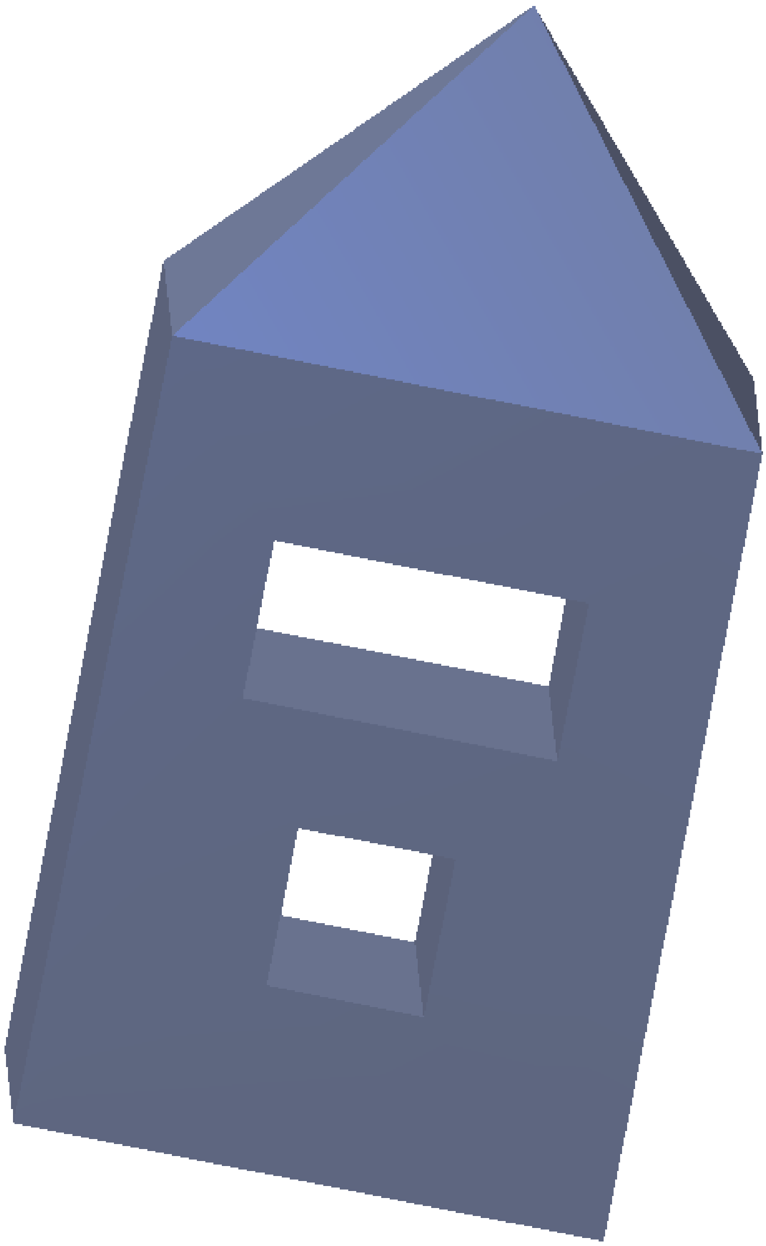
Povrch válce: $\mathbf{2111,2}[\boldsymbol{cm^2}]$

Obsahpodstav válce: $\mathbf{226,2}\ [\boldsymbol{cm^2}]$

Povrch kulových úsečí: $\mathbf{251,3}\ [\boldsymbol{cm^2}]$

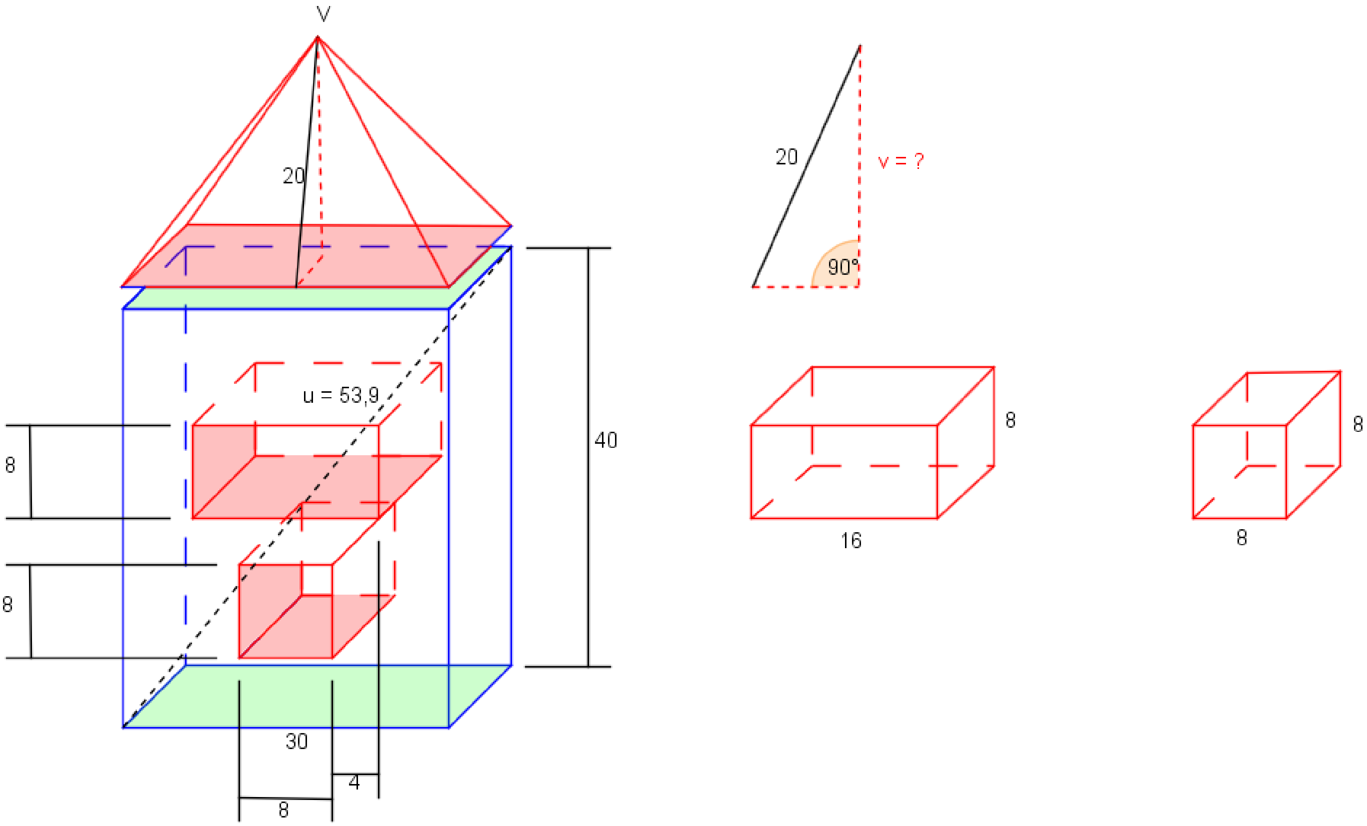
Celkový povrch činky: 4147 $[\boldsymbol{cm^2}]$

4.4. Těleso č.4



V tomto případě je postup následující:

Pro výpočet **objemu** tělesa si celkové těleso můžeme rozložit na 3 různé kvádry a jeden pravidelný jehlan. Objem největšího kvádru se sečte s objemem pravidelného jehlanu a od nich se poté odečtou objemy dvou menších kvádrů. U celkového **povrchu** tomu bude podobně, avšak nesmíme zapomenout odečíst obě dvě styčné plochy – jednotlivé podstavy jehlanu a největšího z kvádrů. Nakonec připočteme povrchy obou menších kvádrů bez těch ploch, které jsou jako „díry." (sečtou se pouze vnitřní stěny)



1) Výpočet celkového objemu:

a) Výpočet objemu největšího kvádru ($V = abc$). Neznáme však stranu „b". Známe však tělesovou úhlopříčku u = 53,9[cm]. Vzorec pro její výpočet je: $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Z tohoto vzorce tedy neznáme pouze již zmíněnou stranu „b," kterou si ze vzorce můžeme vyjádřit:

$u = \sqrt{a^2 + \boldsymbol{b^2} + c^2} \qquad /^2$

$u^2 = a^2 + \boldsymbol{b^2} + c^2$

$u^2 - a^2 - c^2 = \boldsymbol{b^2} \qquad /\sqrt{\ }$

$\boldsymbol{b} = \sqrt{u^2 - a^2 - c^2}$

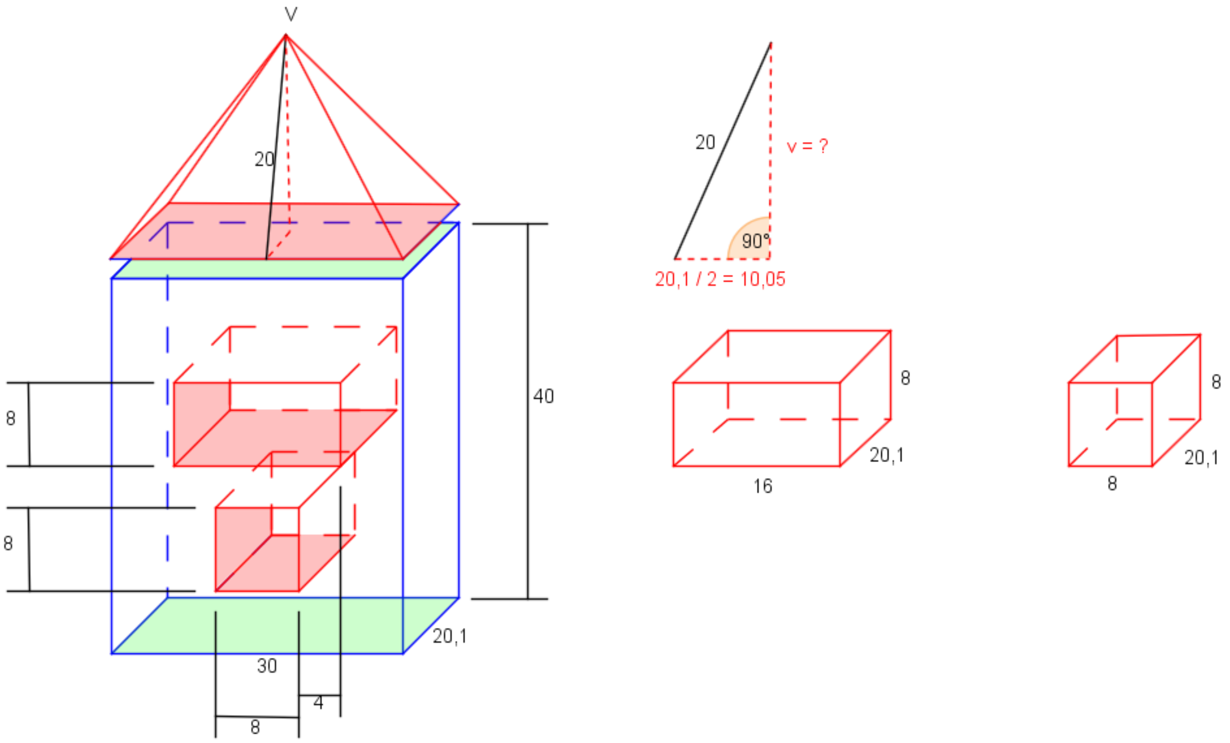
$b = \sqrt{u^2 - a^2 - c^2}$

$\underline{\boldsymbol{b = 20,1[cm]}}$

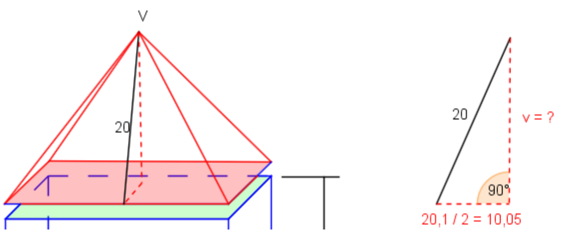
$$V = abc$$

$$\underline{\boldsymbol{V = 24\,120[cm^3]}}$$

Známe již tedy stranu „b“ u největšího kvádru, (i u obou kvádrů menších) a i stranu podstav čtyřbokého jehlanu.



b) Výpočet objemu jehlanu ($V = \frac{1}{3}Sp \cdot v$). Zde jsme pomocí strany „**b**,“ (která je stejná jako strana podstavy jehlanu) zjistili vzdálenost od středu jehlanu ke straně „**a**“ (30). Vznikne zde pravoúhlý trojúhelník, ze kterého pomocí Pythagorovy věty vyjádříme jeho stranu **v**, což je výška jehlanu (potřebná ke spočtení objemu).



$$20^2 - 10{,}05^2 = v^2$$
$$\underline{v = 17{,}3[\mathrm{cm}]}$$

Podstavu jehlanu (i kvádru) tvoří obdélník (30 x 20,1). Jeho obsah se spočte: $S = a \cdot b$

$$S = 30\ x\ 20{,}1$$
$$\underline{\boldsymbol{S = 603[cm^2]}}$$

Objem jehlanu je tedy: $V = \frac{1}{3}Sp \cdot v$

$$\underline{\boldsymbol{V = 3477{,}3[cm^3]}}$$

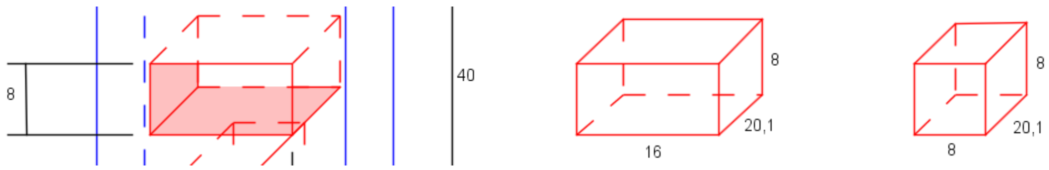
c) Kvůli přehlednosti se sečtou spočítané objemy kvádru a jehlanu a zbylé „díry“ v tělesu se dopočítají nakonec.

Objem kvádru: $\underline{\boldsymbol{V = 24\,120[cm^3]}}$

Objem jehlanu: $\underline{\boldsymbol{V = 3477{,}3[cm^3]}}$

Objem tělesa (bez děr): $\underline{\boldsymbol{V = 27\,597{,}3\ [cm^3]}}$

d) Objemy dvou pomyslných kvádrů „děr“.



Tyto dva objemy se následně odečtou od objemu celkového.

$V_1 = abc$ $V_2 = abc$

$\underline{\boldsymbol{V_1 = 2573{,}8[cm^3]}}$ $\underline{\boldsymbol{V_2 = 1286{,}4[cm^3]}}$

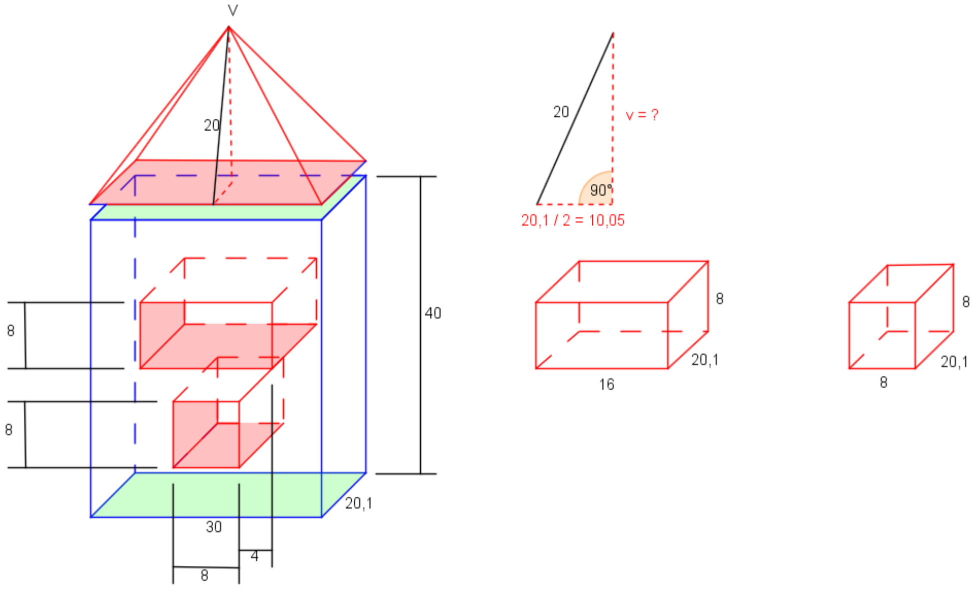
e) Nakonec se odečtou objemy V_1 , V_2 od celkového objemu kvádru a jehlanu.

$\underline{\boldsymbol{V = 27\,597{,}3\ [cm^3]}}$
$\underline{\boldsymbol{V_1 = 2573{,}8[cm^3]}}$
$\underline{\boldsymbol{V_2 = 1286{,}4[cm^3]}}$

Celkový objem tělesa:
$\underline{\boldsymbol{V = 23\,737{,}1\ [cm^3]}}$

2) Výpočet celkového povrchu:

U výpočtu povrchu tohoto tělesa musíme opět zjistit neznámé jako u výpočtu objemu. Neznámé však už máme spočítané s předchozího bodu.



Musíme si opět uvědomit to, že jak jehlan, tak kvádr mají každý svůj povrch a ve svém povrchu mají započítány i obě styčné plochy (své podstavy), které nepatří do celkového povrchu tělesa. Takže od celkového povrchu kvádru a jehlanu se odečte 2x obdélník (30 x 20,1). U otvorů tvořených dvěma pomyslnými kvádry bez dvou protilehlých stěn však musíme vždy čtyři stěny „navíc“ přičíst k celkovému povrchu.Toho docílíme tak, že buď spočítáme povrchy „celých“ kvádrů i se stěnami, které zde nejsou a poté odečteme obsahy čtyř obdélníků. Nebo se spočítají pouze stěny „uvnitř.“

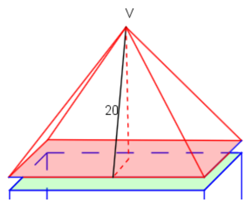
a) Povrch největšího kvádru:

$S = 2(ab + ac + bc)$ Od tohoto povrchu se odečte jedna podstava (styčný obdélník).

$\boldsymbol{S = 5214[cm^2]}$ $\underline{\boldsymbol{5214 - (30\ x\ 20,1) = 4611[cm^2]}}$

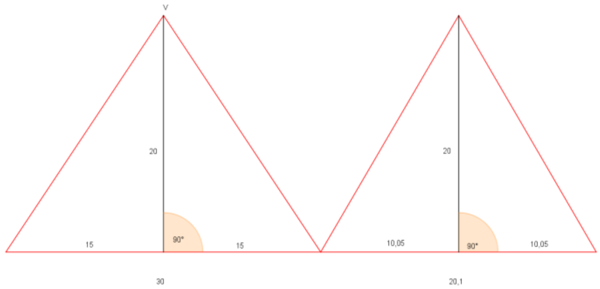
b) Obsah pláště jehlanu:

Podstava je zde zmiňovaný obdélník (30 x 20,1) jako u kvádru. Pláštěm jsou čtyři rovnoramenné trojúhelníky. Jelikož podstava je obdélník, tyto trojúhelníky nejsou shodné! Můžeme použít i vzorec přímo pro rovnoramenný trojúhelník, ale při použití vzorce pro obecný nemusíme nic dopočítávat.



$S_1 = \frac{c \cdot v_c}{2}$ $S_1 = \frac{c \cdot v_c}{2}$

$\underline{\boldsymbol{S_1 = 300[cm^2]}}$ $\underline{\boldsymbol{S_1 = 201[cm^2]}}$



Protilehlé trojúhelníky jsou totožné. Toto jsou obsahy pouze dvou ze čtyř, proto se výsledky sečtou a ještě vynásobí dvěma. Celkový obsah pláště jehlanu je tedy:

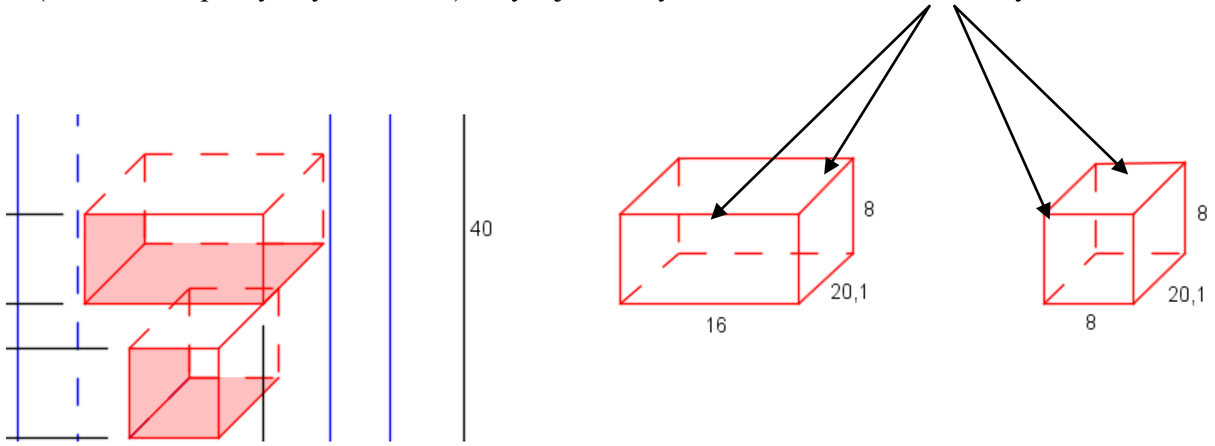
$S = 2(300 + 201)$

$\underline{\boldsymbol{S = 1002[cm^2]}}$

c) Nyní si opět pro větší názornost sečteme povrch kvádru (už bez jedné podstavy) a obsah pláště jehlanu.

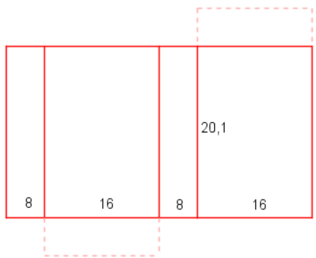
Povrch kvádru bez podstavy: $\underline{\mathbf{4611}\ [\boldsymbol{cm^2}]}$
Obsah pláště jehlanu: $\underline{\mathbf{1002}\ [\boldsymbol{cm^2}]}$
Celkový obsah (bez „děr“): $\underline{\mathbf{5613}\ [\boldsymbol{cm^2}]}$

d) Nakonec od celkového povrchu tělesa bez „děr“ odečteme dohromady 8 obsahů obdélníků (8 stěn dvou pomyslných kvádrů), zbývající stěny totiž v celkovém tělese chybí.



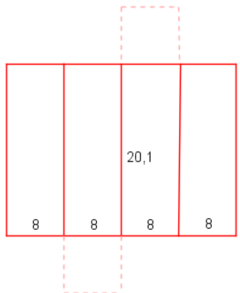
$S = 2(8\ x\ 20,1)$
$S = 2(16\ x\ 20,1)$

$\underline{S = 964,8[cm^2]}$



$S = 4(8\ x\ 20,1)$

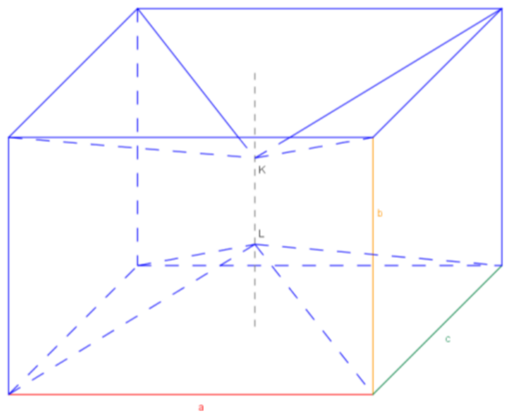
$\underline{S = 643,2[cm^2]}$

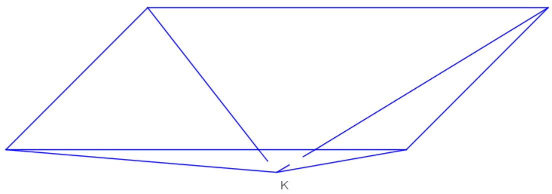


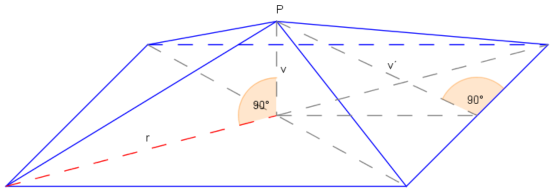
Celkový obsah 8mi stěn kvádrů: $\underline{\boldsymbol{S = 1608[cm^2]}}$

(Tuto hodnotu musíme k celkovému povrchu přičíst, protože „dírami“ vznikly další plochy na původním tělese.)

Celkový povrch tělesa:	$\underline{\mathbf{5613 + 1608 = 7221}[\boldsymbol{cm^2}]}$


K
L
b
c
a


K


P
v
v´
90°
90°
r

Závěr

Ročníková práce mi přinesla spoustu užitečných zkušeností, jak s prací v samotném Wordu, kde jsem svou práci tvořil, tak samozřejmě v programu Geonext. Velkou zkušeností je práce s tolika vzorci a ujasnění si mnoha věcí v oblasti stereometrie. Osobním přínosem vnímám to, že poprvé prezentuji svoji vlastní práci a tato zkušenost mi může pomoci do budoucna např. při vytváření diplomové práce na vysoké škole. Geonext se mi osvědčil jako nenáročný a přesto zajímavý a užitečný program. Během své práce jsem však zjistil, že má také, jako každý program, své „mouchy." Mezi tyto problémy patří hlavně časté zasekávání programu při velkém množství skrytých čar, nebo problém, kdy Geonext neotevře uložený soubor s velkým množstvím prvků. Na druhou stranu v něm lze zkonstruovat téměř cokoliv a s trochou praxe se na něj dá rychle zvyknout a většinu příkazů děláte intuitivně.

Pokusil jsem se touto prací shromáždit nejčastější vzorce a příslušné nákresy objektů na jednom místě a práci uspořádat tak, aby byla co nejpřehlednější. Má ročníková práce se sice jmenuje „Výpočty povrchu a objemu těles", ale velkou část zde tvoří plošné obrazce a jejich vzorce. To z toho důvodu, že jejich znalost je nezbytná pro určování některých vlastností těles (např. povrchu). Také zde zmiňuji některé matematiky, kteří souvisí s daným tématem, a není na škodu o nich vědět něco víc. Doufám, že se Vám moje práce líbila a že někomu přinese užitek.

Použitá literatura

Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy

Matematické sešity z předchozích ročníků

Internet:

www.wolframalpha.com

www.cs.wikipedia.org