Středoškolská technika 2010

Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT

STUDIUM MAXWELLOVA ZÁKONA ROZDĚLENÍ RYCHLSOTÍ MOLEKUL POMOCÍ DERIVE 6

Pavel Husa

Gymnázium Jiřího z Poděbrad
Studentská 166/II 290 01 Poděbrady

Anotace:

Tato práce se zabývá rovnicí, která popisuje Maxwellův zákon rozdělení rychlostí částic ideálního plynu. K jejímu studiu je použit matematický software Derive 6. V práci se pak ukazuje, jaké důležité informace jsou v ní obsaženy.

1. Maxwellův zákon

Je přirozené, že částice ideálního plynu v důsledku vzájemných srážek nabývají různých rychlostí. Třebaže hodnoty některých z nich mohou být i extrémně vysoké a jiných naopak extrémně nízké, neliší se většina z nich příliš od jisté hodnoty, kterou nazýváme nejpravděpodobnější rychlostí (v_p). Počet částic n, které mají hodnotu rychlosti v intervalu v a v + dv je dán Maxwellovým rozdělení ve tvaru:

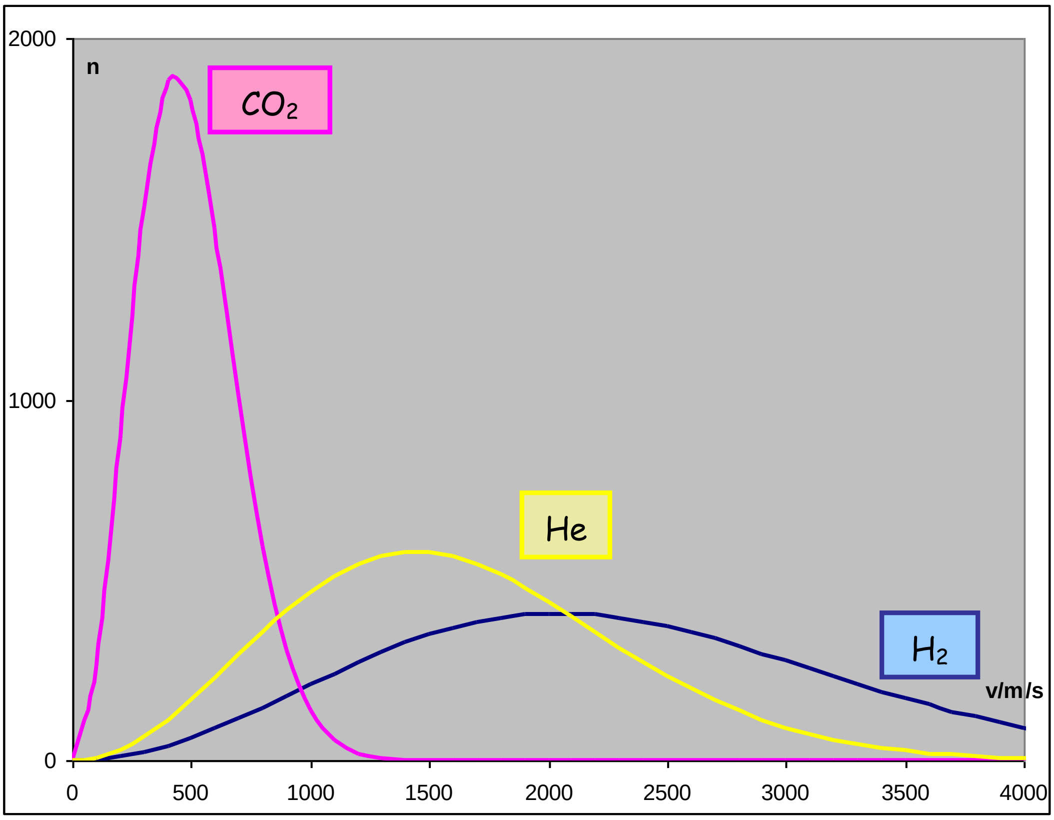
$$n(v)\cdot dv = \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{\frac{3}{2}}}{(\pi\cdot k\cdot T)^{\frac{3}{2}}}\cdot v^2 e^{-\frac{m\cdot v^2}{2\cdot k\cdot T}} dv$$

N ... počet částic ideálního plynu
m ... hmotnost jedné částice
k ... Boltzmannova konstanta
T ... absolutní teplota
v ... rychlost

Nejprve si zobrazíme graf funkce n = f(v) pro vodík, helium a oxid uhličitý. Do tabulkového procesoru jsme dosadili jsme tyto hodnoty:

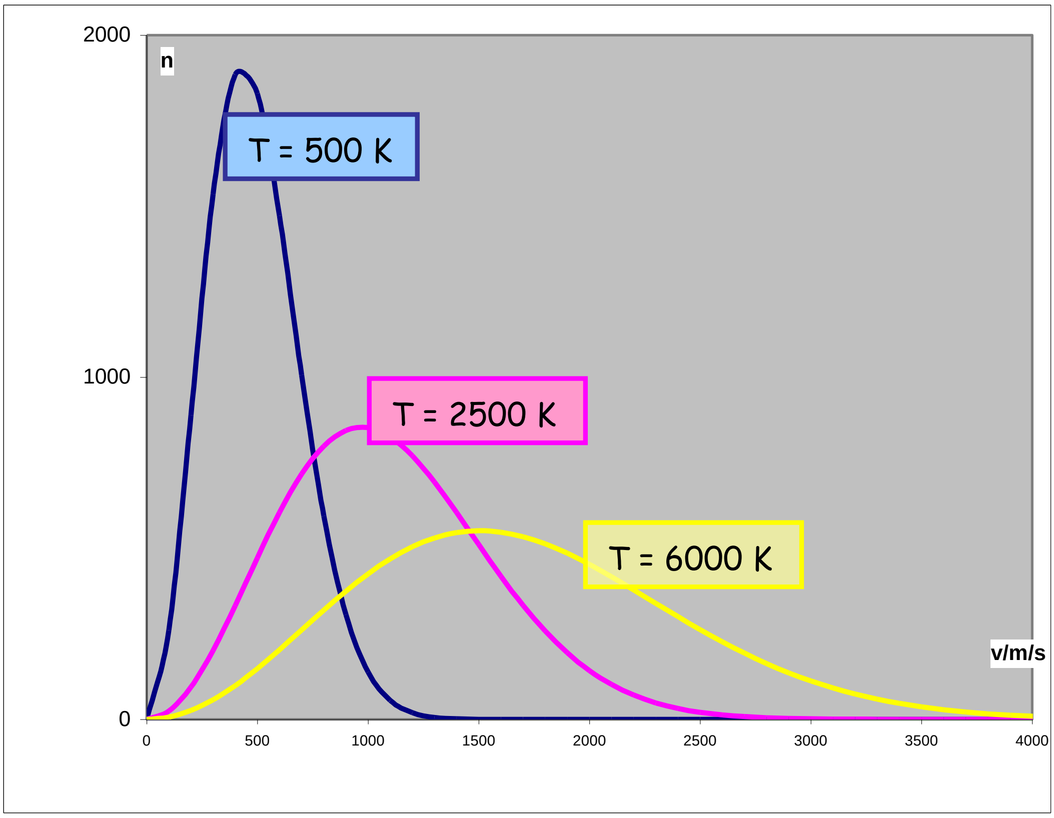
$N = 10^6$
$k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ J/K (Boltzmannova konstanta)
$T = 500$ K
$m_1 = 2 \,.\, 1{,}66.10^{-26}$ kg pro vodík
$m_2 = 4 \,.\, 1{,}66.10^{-26}$ kg pro helium
$m_3 = 44 \,.\, 1{,}66.10^{-26}$ kg pro oxid uhličitý

Je patrné, že graf č. 1 splňuje naše očekávání: prochází počátkem (nulovou rychlost nemůže mít žádná částic), má výrazné maximum (nejpravděpodobnější rychlost) a se vzrůstající hodnotou rychlosti v se funkční hodnoty postupně blíží nule (i velmi rychlých částic je v souboru málo). Tvar křivky je ovlivněn dvěma parametry: hmotností částice a teplotou. Protože energie jedné částice je přímo úměrná pouze absolutní teplotě, je zřejmé, že méně hmotné částice se musí pohybovat rychleji a více hmotné pomaleji. Mění-li se hmotnost částice, tak se v souladu s tím posouvá maximum křivky. Můžeme učinit závěr, že hmotnější částice se svými rychlostmi od sebe tolik neliší jako částice méně hmotné.



Graf č. 1 Maxwellův zákon pro různé plyny

Na grafu č. 2 sestrojeném pro jeden milion molekul vodíku je na druhou stranu vidět, jak tvar křivky ovlivňuje teplota. V souladu s očekávání se při vzrůstu teploty maximum křivky posouvá směrem doprava a celá křivka je plošší. Částice studeného plynu se opět svými rychlostmi příliš neliší. Částice teplého plynu mají oproti tomu rychlosti velmi různorodé.



Graf č. 2 Maxwellův zákon pro různé teploty (CO_2)

2. Analýza Maxwellova zákona rozdělení částic ideálního plynu

O správnosti Maxwellova zákona se můžeme nejlépe přesvědčit tak, že určíme plochu omezenou grafem a osou x. Musí se totiž rovnat počtu částic plynu, neboli jednomu milionu. Výpočet provedeme určitým integrálem. Za teplotu dosadíme 500 K. A na náš dotaz...

$$\#1: \quad \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^2\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{m\cdot v^2}{2\cdot k\cdot t}\right) dv$$

... Derive 6 správně odpoví:

#2: $1\cdot 10^{6}$

Lze očekávat, že výsledek nesmí záviset na teplotě, což potvrzuje další výpočet tentokráte pro teplotu 1000 K.

#3: $$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^{2}\cdot EXP\left(-\frac{m\cdot v^{2}}{2\cdot k\cdot t}\right)\,dv$$

#4: $1\cdot 10^{6}$

A jestliže vypočteme neurčitý integrál...

#5: $$\int \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^{2}\cdot EXP\left(-\frac{m\cdot v^{2}}{2\cdot k\cdot t}\right)\,dv$$

... tak v něm skutečně nefiguruje teplota:

#6: $$\frac{83\cdot\sqrt{57270}\cdot v^{2}\cdot e^{-83\cdot v^{2}/690000000}}{119025000\cdot\sqrt{\pi}}$$

Dále lehce ověříme, že počet velmi pomalých molekul vodíku, jejichž rychlosti leží např. v intervalu (0, 100) m/s, je pozoruhodně malý:

#7: $$\int_0^{100} \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^{2}\cdot EXP\left(-\frac{m\cdot v^{2}}{2\cdot k\cdot t}\right)\,dv$$

#8: 88.6391306

Počty rychlejších částic opět narůstají. Např. pro intervaly (100, 200) a (200, 300) m/s jsou:

#9: $$\int_{100}^{200} \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^{2}\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{m\cdot v^{2}}{2\cdot k\cdot t}\right)\, dv$$

#10: 617.411888

#11: $$\int_{200}^{300} \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^{2}\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{m\cdot v^{2}}{2\cdot k\cdot t}\right)\, dv$$

#12: 1659.76514

velmi rychlých částic je v souboru málo. Např. rychlost mezi 7000 m/s a 8000 m/s má pouhých 30 částic, o čemž svědčí výpočet:

#13: $$\int_{7000}^{8000} \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^{2}\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{m\cdot v^{2}}{2\cdot k\cdot t}\right)\, dv$$

#14: 29.67427421

Úplně jiná situace je poblíž nejpravděpodobnější rychlosti, která podle grafu č. 1 činí pro teplotu 500 K asi 2000 m/s.

#15: $$\int_{2000}^{2100} \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^{2}\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{m\cdot v^{2}}{2\cdot k\cdot t}\right)\, dv$$

#16: $4.070246038\cdot 10^{4}$

Nejpravděpodobnější rychlost je - nepřesně řečeno - taková rychlost, kterou se pohybuje největší počet částic. V této hodnotě má funkce n = f(v) své maximum. Určíme jej pomocí první derivace:

$$\#17: \quad \frac{d}{dv}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^{2}\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{m\cdot v^{2}}{2\cdot k\cdot t}\right)\right)$$

$$\#18: \quad e^{-m\cdot u\cdot v^{2}/(2\cdot k\cdot t)}\cdot\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot N\cdot v\cdot(m\cdot u)^{3/2}}{\sqrt{\pi}\cdot(k\cdot t)^{3/2}}-\frac{\sqrt{2}\cdot N\cdot v^{3}\cdot(m\cdot u)^{5/2}}{\sqrt{\pi}\cdot(k\cdot t)^{5/2}}\right)=0$$

Když tuto derivaci položíme rovnou nule a příslušnou rovnici vyřešíme, dostaneme...

$$\#19: \quad v=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{k\cdot t}{m}\right)}$$

.... což je v souladu s učebnicemi fyziky.

Nyní můžeme určit i průměrnou rychlost částic a porovnat ji s rychlostí nejpravděpodobnější. Vyjdeme ze známého vztahu pro aritmetický průměr (N_n je počet částic, které mají rychlost v_n):

$$\bar{v}=\frac{N_1\cdot v_1+N_2\cdot v_2+\ldots+N_n\cdot v_n}{N_1+N_2+\ldots+N_n}$$

Jestliže si uvědomíme, že počet částic je roven ploše S pod grafem n = f(v), můžeme psát:

$$\bar{v}=\frac{\Delta S_1\cdot v_1+\Delta S_2\cdot v_2+\ldots+\Delta S_n\cdot v_n}{N_1+N_2+\ldots+N_n}$$

Plochu ΔS mohu vyjádřit takto:

$$\Delta S=n(v)\cdot\Delta v$$

Vztah pro průměrnou rychlost mohu vyjádřit takto:

$$\bar{v} = \frac{n(v_1)\cdot\Delta v_1\cdot v_1 + n(v_2)\cdot\Delta v_2\cdot v_2 + \ldots + n(v)_n\cdot\Delta v_n\cdot v_n}{N}$$

Jestliže se rychlosti částic spojitě mění, přejde součet v integraci:

$$\bar{v} = \frac{\int n(v)\cdot v\cdot dv}{N}$$

Chceme-li vypočítat průměrnou rychlost částic - např. opět pro vodík o teplotě 500 K-, tak řešíme určitý integrál:

$$\#20:\quad \int_0^{\infty} \frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot 500)^{1.5}}\cdot v^3\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{m\cdot v^2}{2\cdot k\cdot 500}\right)\right)dv$$

Průměrná rychlost částic ideálního plynu je:

#21: 2300.517602

Nyní určíme nejpravděpodobnější rychlost částic plynu při téže teplotě:

$$\#22:\quad \left(\frac{2\cdot k\cdot 500}{m}\right)^{1/2}$$

#23: 2038.780641

Porovnáním zjistíme, že průměrná rychlost je asi o 13 % větší než rychlost nejpravděpodobnější:

$$\#24: \quad \frac{2300.517602}{2038.780641} = 1.128379167$$

Není těžké dokázat, že uvedený poměr je konstantní pro všechny teploty.

Nyní vypočteme energii tohoto ideálního plynu opět při teplotě 500 K. Jedna částice má energii:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Všechny částice, jejichž rychlost je v intervalu v a v + dv, pak energii:

$$dE = dN \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = dS \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$dE = n(v) \cdot dv \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot n(v) \cdot dv$$

Což odpovídá celkové energii:

$$E = \frac{1}{2} m \cdot \int n(v) \cdot v^2 \cdot dv$$

Neboli energie našeho vodíku o jednom milionu částic vyjde v joulech:

$$\#25: \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot 500)^{1.5}}\cdot v^4\cdot EXP\left(-\frac{m\cdot v^2}{2\cdot k\cdot 500}\right)\right) dv$$

$$\#26: \quad 1.035\cdot 10^{-14}$$

Průměrná (střední) energie E_o připadající na jednu částici je tedy 10^6 krát menší:

$$\#27: \quad 1.035\cdot 10^{-20}$$

Když nyní zopakujeme celý výpočet pro teplotu dvakrát vyšší (tj. 1000 K), vyjde nám také střední energie dvakrát vyšší, tj.:

$$\#28: \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot 1000)^{1.5}}\cdot v^4\cdot EXP\left(-\frac{m\cdot v^2}{2\cdot k\cdot 1000}\right)\right) dv$$

$$\#29: \quad 2.07\cdot 10^{-14}$$

Evidentně mezi E_0 a T platí přímá úměrnost...

$$E_0 \sim T$$

...neboli...

$$E_0 = a\cdot T,\ a = konst$$

Nyní nám pouze zbývá určit hodnotu konstanty a. Podělíme tedy střední energii (E_0 = 2,07.10^{-14} J) a teplotu (T = 1000 K), tak dostaneme:

#30: $2.07 \cdot 10^{-23}$

Nechá se jednoduše dokázat, že se konstanta a rovná třem polovinám Boltzmannovy konstanty:

#31: $\frac{3}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}$

#32: $2.07 \cdot 10^{-23}$

Závěr je tedy jednoduchý:

$$E_0 = \frac{3}{2} k \cdot T$$

Střední energii si však mohu vyjádřit i pomocí rychlosti a oba výrazy porovnat:

#33: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k \cdot t$

Z této rovnice si mohu vyjádřit rychlost v_k, kterou nazýváme střední kvadratická. Částice s touto rychlostí má průměrnou energii. Střední kvadratická rychlost je dána vztahem:

#34: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k \cdot t,\ [k,\ v],\ \mathrm{Real}\right)$

#35: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{k \cdot t}{m}\right)}$

Porovnáme-li podílem střední kvadratickou rychlost v_k s rychlostí nejpravděpodobnější v_p, dostáváme:

$$\#36: \quad \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{k\cdot t}{m}\right)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{k\cdot t}{m}\right)}}$$

$$\#37: \quad \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\#38: \quad 1.224744871$$

Neboli střední kvadratická rychlost je asi o 22 % větší než rychlost nejpravděpodobnější. Příčinou je samozřejmě to, že graf funkce n = f(v) není osově symetrický.

Nyní ještě vyjádříme-li v_k v m/s:

$$\#39: \quad 2496.985348$$

Najděme nyní rychlost u, která splňuje tu podmínku, že počet částic, které mají rychlost větší než u, je stejný jako počet částic, které mají rychlost menší než u. Nazvěme u „první půlící rychlostí“ .

Evidentně pro ni platí:

$$\#40: \quad \int_0^u \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^2\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{m\cdot v^2}{2\cdot k\cdot t}\right) dv = 5\cdot 10^5$$

Když po určitou dobu aplikujeme metodu pokusu a omylu, zjistíme, že u má hodnotu 2217.49 m/s. Počítač totiž tvrdí:

$$\#41: \quad \int_0^{2217.49} \frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot t)^{1.5}}\cdot v^2\cdot \mathrm{EXP}\left(-\frac{m\cdot v^2}{2\cdot k\cdot t}\right) dv$$

$$\#42: \quad 5.00002444\cdot 10^5$$

Porovnáním rychlosti u s rychlostí nejpravděpodobnější v_p, tak zjistíme, že u je o 8 % větší, neboť:

$$\#43: \quad \frac{2217.49}{2038.78}$$

$$\#44: \quad 1.087655362$$

Obdobně můžeme definovat rychlost „druhou půlící rychlost“ w, která má tu vlastnost, že součet energií všech částic, která mají svoji rychlost menší než w, je stejný jako součet energií těch částic, která mají rychlost větší než w.

Zřejmě platí:

$$\#45: \quad \int_0^w \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot 500)^{1.5}}\cdot v^4\cdot EXP\left(-\frac{m\cdot v^2}{2\cdot k\cdot 500}\right)\right) dv = \frac{1.035\cdot 10^{-14}}{2} = 5.175\cdot 10^{-15}$$

Při troše trpělivosti stanovíme horní mez integrálu s odpovídající vlastností na 3007,28 m/s. Platí totiž s dostačující přesností:

$$\#46: \quad \int_0^{3007.28} \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot N\cdot m^{1.5}}{(\pi\cdot k\cdot 500)^{1.5}}\cdot v^4\cdot EXP\left(-\frac{m\cdot v^2}{2\cdot k\cdot 500}\right)\right) dv$$

$$\#47: \quad 5.175024303\cdot 10^{-15}$$

Rychlost w je tak o plných 48 % vyšší než rychlost nejpravděpodobnější.

$$\#48: \quad \frac{3007.28}{2038.78}$$

$$\#49: \quad 1.475038993$$

Výsledek jenom dokazuje, jak významně k celkové energii plynu přispívají částice s velkou rychlostí. Kinetická energie totiž závisí na její druhé mocnině.

3. Diskuse a závěr

V této práci jsme se zabývali Maxwellovým zákonem rozdělením rychlostí částic ideálního plynu. Ukázali jsme, že v rovnici, která jej vyjadřuje, jsou obsaženy všechny důležité informace o tomto plynu., především pak to, že střední energii částice závisí pouze na teplotě a že je s ní přímo úměrná. Znovu jsme odvodili vztahy pro nejpravděpodobnější rychlost v_p, průměrnou rychlost $\bar{v}$ a pro rychlost střední kvadratickou v_k. Zavedli jsme rovněž „první a druhou půlicí rychlost (u, w)" a určili jsme jejich vztah k rychlosti nejpravděpodobnější. Přitom jsme došli k tomuto závěru:

$$v_p : \bar{v} : v_k : u : w = 1 : 1{,}13 : 1{,}22 : 1{,}08 : 1{,}48$$

Výpočty, které přesahují rámec středoškolské fyziky jsme provedli v matematickém software Derive 6.

4. Obsah

5. Seznam použité literatury

Prof. RNDr. Horák Z., DrSc.:, Fyzika, SNTL Praha, 1976