Středoškolská technika 2017

Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT

Sbírka vlastních matematických úloh z vybraných oblastí SŠ matematiky

Ondřej Váša

První soukromé jazykové gymnázium
Brandlova 875, Hradec Králové

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat všem, kteří se na mé práci podíleli a pomohli mi ji zrealizovat. Nejvíce bych chtěl poděkovat svému konzultantovi, RNDr. Lindě Schmutzerové, Ph.D., za poskytnutí materiálů k teoretické části práce, rady při tvorbě příkladů a pomoc při jejich kontrole. Dále bych také rád poděkoval Lence Rajmontové za pomoc s tvorbou webových stránek.

V Hradci Králové dne 12. března 2017 Ondřej Váša

Anotace práce v českém jazyce

VÁŠA, O. *Sbírka vlastních matematických úloh z vybraných oblastí SŠ matematiky.* Hradec Králové 2017. Vedoucí práce RNDr. Linda Schmutzerová, Ph.D.

Cílem práce je vytvořit vlastní sbírku příkladů z vybraných celků učiva středoškolské matematiky. Konkrétně jsem se ve své práci zaměřil na problematiku exponenciálních, logaritmických a goniometrických rovnic a nerovnic. Každá kapitola obsahuje vždy 20 příkladů z daného tématu včetně výsledků. U všech příkladů je uvedeno i podrobné řešení.

V teoretické části práce se zabývám kurikulárními dokumenty, které vymezují závazné „rámce“ pro jednotlivé etapy vzdělávání (RVP Gy, ŠVP), historií a definicí pojmu logaritmus, charakteristikou exponenciálních, logaritmických a goniometrických rovnic a nerovnic a přehledem důležitých pravidel, potřebných pro řešení těchto typů příkladů.

Klíčová slova: exponenciální, logaritmická a goniometrická rovnice, nerovnice, logaritmus

Annotation

VÁŠA, O. *Collection of self-devised mathematical problems from various areas of high school mathematics.* Hradec Králové, 2017. Thesis supervisor RNDr. Linda Schmutzerová, Ph.D.

The aim of the work is to create a collection of my own mathematical problems from chosen parts of high school mathematics curriculum. Specifically, i have focused on exponential, logarithmic and trigoniometric equations and inequations. Every chapter contains 20 examples of each topic including the results. Every example is written with detailed solution.

The theoretical part deals with curricula, which define the binding „framework“ for the individual stages of education (RVP Gy, ŠVP), the history and definition of logarithm, characteristic exponential, logarithmic and trigoniometric equations and inequations and an overview of important rules needed for solving these types of examples.

Key words: exponential, logarithmic and trigoniometric equations, inequations, logarithm

Seznam zkratek

- R označuje množinu všech reálných čísel
- R^+ označuje množinu všech kladných reálných čísel
- Z označuje množinu všech celých čísel
- Z^+ označuje množinu všech kladných celých čísel
- Z_0^+ označuje množinu všech kladných celých čísel včetně nuly

Obsah

Úvod

Matematika je součást lidského poznání od doby, kdy lidé začali rozumně uvažovat. Byla často chápána jako součást jiných disciplín (filozofie, astronomie, zemědělství, fyzika, alchymie) a její počátky najdeme hluboko v historii na území dnešní Číny, Indie, Starého Řecka, Arabského světa a Latinské Ameriky. Širokou veřejností je matematika chápána jako věda, která jen kvantifikuje jevy okolního světa a pracuje převážně s čísly. Matematika je ale nejen počítání s čísly nebo řešení konkrétních problémů. Je to také způsob pohledu na svět, je to životní styl a životní filozofie. Je to zvláštní způsob myšlení, ale i nástroj poznávání světa a jeho zákonitostí. Pomocí přesného jazyka matematiky je možné „ naslouchat“ lidem, co už dávno nežijí. Nebo sdělovat svoje myšlenky těm, kteří se narodí o mnoho generací později. Matematika má výhodu i nevýhodu v tom, že poločas použití jejich výsledků je dlouhý. Citovanost matematiků není tak vysoká jako citovanost biologů či chemiků a to z toho důvodu, že některé výsledky a jejich hodnota se projeví až za mnoho let. Matematika umožňuje lidem lépe pochopit svět, ve kterém žijí a modifikovat ho k obrazu svému. To vše ale závisí na moudrosti lidí, kteří její výsledky používají (Drábek, 2015).

„Pro ty, kteří neznají matematiku, je složité dostat se k takovým pocitům jako je krása, nejhlubší krása přírody. Pokud se chcete něco dozvědět o přírodě, oceňovat přírodu, je nutné rozumět jazyku, kterým mluví“.

(Richard Phillips Feynman)

Cíl práce

Cílem práce je vytvořit sbírku vlastních příkladů z vybraných celků učiva středoškolské matematiky. Konkrétně jsem se ve své práci zaměřil na tvorbu příkladů tematicky orientovaných na problematiku exponenciálních, logaritmických a goniometrických rovnic a nerovnic. Příklady jsem rozčlenil do 6 kapitol a každá kapitola obsahuje vždy 20 příkladů z daného tématu. Celkem je tedy ve sbírce 120 originálních příkladů. U každého příkladu je uvedeno i řešení s podrobně rozepsaným postupem. Ke sbírce jsem vytvořil i webové stránky, které tyto příklady zpřístupňují širší veřejnosti a mohou tak sloužit středoškolským studentům k procvičování dané problematiky, k jejich přípravě na maturitu či přijímací zkoušky na VŠ. Jelikož jsem příklady koncipoval tak, aby při jejich řešení nešlo pouze o mechanický dril, ale k vyřešení je často nutné krom mechanických postupů použít i logickou úvahu, mohou tyto příklady využít i vysokoškolští studenti. Učitelé by příklady z této sbírky mohli použít jako problémové úlohy pro nadané studenty či zajímavé úlohy pro výuku této problematiky v rámci matematického semináře.

Sbírka bude knižně vydána a může tak sloužit jako doplňkový výukový materiál ke stávajícím gymnaziálním učebnicím matematiky.

1 Teoretická část práce

1.1 Matematika na gymnáziu

Cíle předmětu Matematika vycházejí ze vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* stanovené RVP.

Důraz je kladen na správné pochopení matematických pojmů, na zvládnutí matematických dovedností, geometrickou představivost, schopnost tvořivě pracovat s informacemi, dovednost formulovat a argumentovat, a konečně aplikovat získané znalosti v ostatních vědeckých disciplinách i v běžném životě.

Předmět Matematika poskytuje žákům vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě, a umožňuje jim tak získávat matematickou gramotnost. Schopnost abstraktního myšlení, umění logického a kritického usuzování, nalezení optimálního řešení jsou nezbytné pro všechny činnosti reálného života.

Žáci se učí řešit problémové úlohy z běžného života, spolupracovat při jejich řešení, vyslovovat hypotézy na základě zkušeností, pokusu či vlastní invence. Jsou schopni provést rozbor problému, plán jeho řešení, zvolit postup k jeho vyřešení a výsledky vyhodnotit.

Vzdělávání v matematice je zaměřeno:

- na užití matematiky v reálných situacích,
- na osvojení pojmů, matematických postupů,
- na rozvoj abstraktního a exaktního myšlení,
- na logické a kritické usuzování.

1.1.1 Rámcový vzdělávací program

Rámcové vzdělávací programy (RVP) vycházejí z nové strategie vzdělávání, která zdůrazňuje rozvoj klíčový kompetencí žáků, jejich provázanost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě. Vycházejí z koncepce celoživotního učení, formulují očekávanou úroveň vzdělávání pro všechny absolventy jednotlivých etap vzdělávání. Dávají velký prostor autonomii škol, avšak tím také velké odpovědnosti učitelů za výsledky vzdělávání.

Rámcový vzdělávací program zdůrazňuje rozvoj klíčových kompetencí, což je souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena ve společnosti.

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání jsou uvedeny tyto klíčové kompetence:

Kompetence k učení, kompetence k řešení problémů, kompetence komunikativní, kompetence sociální a personální, kompetence občanské, kompetence pracovní.

Jednotlivé předměty jsou uvedeny v tzv. vzdělávacích oblastech. Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je uvedena charakteristikou vzdělávací oblasti, cílovým zaměřením, vzdělávacím obsahem pro 1. stupeň ZŠ a pro 2. stupeň ZŠ.

V rámcovém učebním plánu je pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace přiřazeno pro 6. – 9. ročník ZŠ celkem 16 hodin matematiky. Ředitel školy může tento počet posílit z hodin přiřazených disponibilní časové dotaci. Rámcový vzdělávací program dále obsahuje tzv. Průřezová témata a vyjadřuje se ke vzdělávání žáků se specifickými vzdělávacími potřebami. (Balada, 2007).

1.1.2 Školní vzdělávací program

Školní vzdělávací program (ŠVP) je povinnou součástí dokumentace školy a musí být zveřejněn na přístupném místě. Podle ŠVP se uskutečňuje vzdělávání na konkrétní škole. Školní vzdělávací program musí být zpracován v souladu s Rámcovým vzdělávacím programem pro gymnázia i v souladu s obecně platnými právními předpisy. Víceletá gymnázia vycházejí při tvorbě ŠVP z požadavků RVP ZV a z požadavků RVP G. Zpracování ŠVP je zcela v kompetenci ředitele školy, který plně odpovídá za vzdělávací program své školy, za jeho soulad s rámcovým vzdělávacím programem, za jeho kvalitu a realizaci. Na formulování programu, který vzniká podle konkrétních vzdělávacích záměrů školy, zkušeností učitelů, podmínek školy, potřeb žáků, oprávněných požadavků rodičů nebo zákonných zástupců žáků, případně požadavků zřizovatele a regionu, a na zpracování jeho jednotlivých částí se podílejí i učitelé a mají spoluodpovědnost za jeho realizaci. K návrhu ŠVP a jeho následné realizaci se vyjadřuje školská rada a schvaluje způsob hodnocení žáků. Naplnění ŠVP a jeho soulad s rámcovým vzdělávacím programem posuzuje Česká školní inspekce a provádí v tomto smyslu svou inspekční činnost.

Výuka matematiky na gymnáziu rozvíjí a prohlubuje pochopení kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa, utváří kvantitativní gramotnost žáků a schopnost geometrického vhledu. Ovládnutí požadovaného matematického aparátu, elementy matematického myšlení, vytváření hypotéz a deduktivní úvahy jsou prostředkem pro nové hlubší poznání a předpokladem dalšího studia. Osvojené matematické pojmy, vztahy a procesy pěstují myšlenkovou ukázněnost, napomáhají žákům k prožitku celistvosti.

Matematické vzdělávání napomáhá rozvoji abstraktního a analytického myšlení, rozvíjí logické usuzování, učí srozumitelné a věcné argumentaci s cílem najít spíše objektivní pravdu než uhájit vlastní názor. Těžiště výuky spočívá v osvojení schopnosti formulace problému a strategie jeho řešení, v aktivním ovládnutí matematických nástrojů a dovedností, v pěstování schopnosti aplikace. Matematika přispívá k tomu, aby žáci byli schopni hodnotit správnost postupu při odvozování tvrzení a odhalovat klamné závěry.
Během studia žáci objevují, že matematika nachází uplatnění v mnoha oborech lidské činnosti (např. v ekonomii, technice, ale i ve společenských vědách), že je ovlivňována vnějšími podněty (například z oblasti přírodních věd) a že moderní technologie jsou užitečným pomocníkem matematiky. Žáci poznávají, že matematika je součástí naší kultury a je výsledkem složitého multikulturního historického vývoje spojeného s mnoha významnými osobnostmi lidských dějin.

Cílové zaměření vzdělávací oblasti
Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k:

- osvojování základních matematických pojmů a vztahů postupnou abstrakcí a zobecňováním na základě poznávání jejich charakteristických vlastností;

- určování, zařazování a využívání pojmů, k analýze a zobecňování jejich vlastností;
- vytváření zásoby matematických pojmů, vztahů, algoritmů a metod řešení úloh a k využívání osvojeného matematického aparátu;
- analyzování problému a vytváření plánu řešení, k volbě správného postupu při řešení úloh a problémů, k vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k zadaným podmínkám;
- práci s matematickými modely, k vědomí, že k výsledku lze dospět různými způsoby;
- rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů;
- pochopení vzájemných vztahů a vazeb mezi okruhy učiva a k aplikaci matematických poznatků v dalších vzdělávacích oblastech;
- přesnému vyjadřování a zdokonalování grafického projevu, k porozumění matematickým termínům, symbolice a matematickému textu;
- zdůvodňování matematických postupů, k obhajobě vlastního postupu;
- rozvíjení dovednosti pracovat s různými reprezentacemi;
- užívání kalkulátoru a moderních technologií k efektivnímu řešení úloh a k prezentaci výsledků;
- rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním (k činnostem, kterými se učí poznávat a nalézat situace, v nichž se může orientovat prostřednictvím matematického popisu), k vyhodnocování matematických modelů, k poznávání mezí jejich použití, k vědomí, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro více situací a jedna situace může být vyjádřena různými modely);
- rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti;
- pochopení matematiky jako součásti kulturního dědictví a nezaměnitelného způsobu uchopování světa (Balada, 2007).

1.1.3 ŠVP na PSJG

Vyučovací předmět Matematika se vyučuje v rozsahu 4 hodin týdně na nižším gymnáziu, v 1. a 2. ročníku vyššího gymnázia v rozsahu 5 hodin týdně, ve 3. ročníku přírodovědná větev v rozsahu 4hodin týdně, ve 3. ročníku v informatické a humanitní větvi v rozsahu 3 hodin týdně, ve 4. ročníku v přírodovědné a informatické větvi v rozsahu 4 hodin týdně a ve větvi humanitní v rozsahu 3 hodin týdně. Pokud je počet žáků ve třídě nižšího gymnázia a 1. ročníku vyššího gymnázia vyšší než 22, tak se jedna až dvě hodiny týdně půlí.

Výuku matematiky rozšiřuje v přírodovědném a informatickém zaměření ve 3. a 4. ročníku povinně volitelný Matematicko-fyzikální seminář (dotace 1h týdně matematická pro část). Od třetího ročníku vyššího gymnázia na povinnou výuku matematiky navazuje Matematický seminář (2 hodiny týdně), který dává prostor pro nadstandardní učivo, nové metody, úlohy s netypickým zadáním. Jeho obsah se aktuálně obměňuje dle požadavků a zaměření žáků. Předmět Matematika je úzce spjat s ostatními předměty; zejména s fyzikou, výpočetní technikou, chemií, zeměpisem a biologií. Ve výuce matematiky jsou využívány mezipředmětové vztahy.

Předmětem prolínají všechna průřezová témata, nejvíce je zastoupena Osobnostní a sociální výchova, kde je kladen důraz na formování volních a charakterových rysů žáků - důslednost, vytrvalost, schopnost sebekontroly, vynalézavost a tvořivost.
Vzdělávací obsah předmětu Matematika je rozdělen **na nižším gymnáziu na čtyři tematické okruhy:**

- Číslo a proměnná
- Závislosti, vztahy a práce s daty
- Geometrie v rovině a v prostoru
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Na vyšším gymnáziu je výuka zaměřena na 14 tematických okruhů:

- Číselné obory
- Základní poznatky z matematiky
- Elementární teorie čísel
- Algebraické výrazy
- Rovnice, nerovnice a jejich soustavy
- Planimetrie
- Goniometrie
- Stereometrie
- Vektorová algebra
- Analytická geometrie lineárních a kvadratických útvarů
- Komplexní čísla, kombinatorika
- Pravděpodobnost a statistika
- Posloupnosti, limita posloupnosti, nekonečná řada
- Diferenciální a integrální počet.

Na hodiny matematiky navazuje v přírodovědném a informatickém zaměření ve 3. a 4. ročníku povinně volitelný seminář (dotace 1h týdně), kde jsou probírány složitější úlohy, které navazují na učivo probrané v hodinách matematiky. Od třetího ročníku dále na povinné hodiny matematiky navazuje volitelný seminář (dotace 2h týdně), který dává prostor pro nadstandardní látku, nové metody, úlohy s netypickým zadáním. Jeho obsah se aktuálně obměňuje dle požadavků a zaměření žáků.

Vzdělávací cíle předmětu Matematika vycházejí ze vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace stanovené RVP.

Důraz je kladen na správné pochopení matematických pojmů, na zvládnutí matematických dovedností, geometrickou představivost, schopnost abstrakce a logického myšlení. Výuka matematiky rovněž zahrnuje schopnost tvořivě pracovat s informacemi, dovednost formulovat a argumentovat a aplikovat získané znalosti v ostatních vědeckých disciplínách i v běžném životě.

Cíle předmětu matematika na gymnáziu
Osvojení základních matematických pojmů, rozvoj aktivního a tvořivého porozumění kvantitativních nebo prostorových vztahů. Matematika vede žáky k poznání skutečnosti, že k řešení úloh lze zvolit různé postupy. Rozvíjí u žáků důvěru ve vlastní schopnosti, vede je k sebekontrole, systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti. Formuje osobnost žáka. Klade důraz na porozumění a osvojení si některých algoritmů, terminologie, symboliky a způsobů jejich využití.

V hodinách matematiky učitelé směřují k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí:

Kompetence k učení:

- Žák si osvojuje matematické pojmy, symboly a odbornou terminologii.
- Aktivně řeší matematické úkoly a problémy.
- Vyhledává a třídí informace, uvádí do souvislosti nově nabyté poznatky s praxí.

Kompetence k řešení problému

- Žák navrhuje postupy a řešení, diskutuje o nich.
- Vnímá a rozpozná problém a hledá nejvhodnější způsob k řešení.
- Učitel vede žáky k využívání náčrtů a schémat, odvozuje některé vzorce a podporuje jejich odvozování i během řešení úloh.

Kompetence komunikativní

- Žák si osvojuje odbornou terminologii.
- Vyjadřuje se věcně a srozumitelně, komentuje svůj postup řešení u tabule.
- Využívá internet a další technologie.

Kompetence sociální

- Žák posiluje své sebevědomí.
- Žák respektuje pravidla práce v týmu.
- Učitel oceňuje žáky, kteří se dovedou zeptat na nejasnost a problém.

Kompetence občanské

- Učitel podporuje zodpovědný vztah k plnění povinností a ke studiu.
- Učitel vede žáky k toleranci a kritickému hodnocení názorů svých i jiných žáků.

Kompetence pracovní

- Žák je schopen pracovní koncentrace.
- Dokáže zhodnotit výsledky své práce, hledá vlastní řešení nebo pracuje podle předem stanoveného postupu.
- Učitel vede žáky k využívání jejich znalostí získaných v matematice při přípravě na další vzdělání a profesní zaměření (ŠVP PSJG, 2016).

1.2 Exponenciální rovnice a nerovnice

Exponenciální rovnicí nazýváme rovnici, kde se neurčitá x vyskytuje v exponentu. Obecně definujeme exponenciální rovnici takto:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \text{ čísla } a, b \in R^{+} - \{1\}$$

$$f(x), g(x) \text{ jsou realné funkce jedné realné proměnné}$$

Pokud chceme vyřešit exponenciální rovnici tj. najít x tak, aby nastala rovnost, je velice výhodné, můžeme-li rovnici upravit na tvar

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \text{ kde } a = b.$$

Pokud máme stejné základy, budou se mocniny rovnat, právě když budou mít stejné exponenty, neboť mocninná funkce je buď vždy rostoucí, nebo vždy klesající. Počítáme již tedy pouze rovnici

$$f(x) = g(x)$$

V případě, že nemůžeme rovnici upravit na tvar se stejnými základy, tedy máme exponenciální rovnici o různých základech, přičemž není možné (nebo to není efektivní) je upravit na stejný základ, celou rovnici logaritmujeme.

$$f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log(b)$$

Vznikne nám tedy opět jednoduchá rovnice (většinou lineární nebo kvadratická), která však nemusí být ekvivalentní zadané. Proto je nutno vždy udělat zkoušku, zda získané řešení je platné.

Exponenciální nerovnicí nazýváme každou nerovnici, ve které je neznámá $x \in R$ v exponentu nějaké mocniny. Řešíme ekvivalentními úpravami s využitím vlastností exponenciálních funkcí podle pravidel (viz kap. 1.2.1). U složitějších rovnic a nerovnic vhodně zavádíme substituci.

$$\text{Nechť } a \in R^{+} - \{1\}; f(x), g(x) - \mathit{funkce}$$

Exponenciální nerovnice má tvar $a^{f(x)} \langle a^{g(x)}$

Pak platí: 1. $a \rangle 1 \Rightarrow f(x) \langle g(x);$ exponenciální funkce je rostoucí

2. $0 \langle a \langle 1 \Rightarrow f(x) \rangle g(x);$ exponenciální funkce je klesající

(Polák, 2015)

1.2.1 Pravidla pro počítání s mocninami

- $a^0 = 1$ $\qquad a, b \in R - \{0\}; r, s \in R - \{0\}$
- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$
- $a^{r-s} = \dfrac{a^r}{a^s}$
- $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $(a^r)^s = (a^s)^r$
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-r}$
- $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$ $\qquad r, s \in Z^+$
- $\sqrt[r]{a^s} = a^{\frac{s}{r}}$
- $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = a^{\frac{1}{r \cdot s}}$

(Exponenciální rovnice, 2016)

1.3 Logaritmus a historie jeho objevování

První zmínky o logaritmu se objevují v Babylonii. Tam byly později nalezeny pálené tabulky obsahující soubory po sobě jdoucích mocnin celých čísel a s nimi zároveň otázka: *Na jak vysoké číslo musíme dané číslo umocnit, abychom obdrželi číslo chtěné?* Přičemž dnes bychom tuto otázku mohli přeformulovat do řeči logaritmů takto: *Kolik je logaritmus daného čísla o daném základu?* Babyloňané ovšem přistupovali k logaritmům pouze jako k nástroji pro řešení určitých typů úloh, proto myšlenku samotných logaritmů příliš nerozvíjeli.

Dalším, kdo se pak tematikou blízkou prozatím nezavedeným logaritmům zabýval, byl *Archimédés* (287 př. n. l. až 212 př. n. l.). Ten svou pozornost věnoval mocninám o základu 100 milionů, u kterých se mu podařilo dojít k závěru, že násobek dvou mocnin o stejném základu souvisí se součtem dvou daných exponentů.

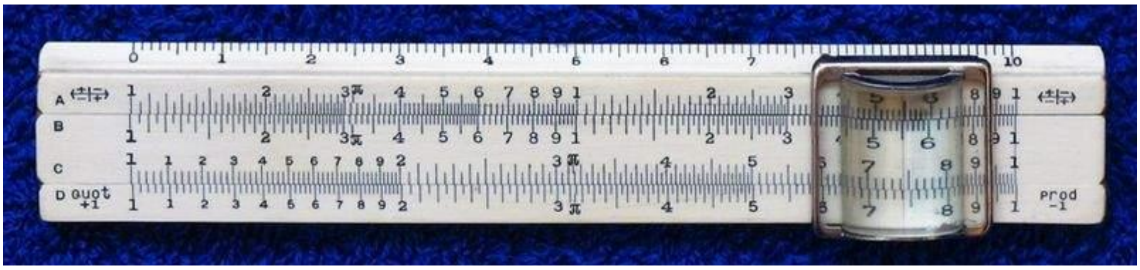
Ke zrodu pojmu logaritmus došlo teprve v 16. století. Zásadním bylo tehdejší období, ve kterém se pokoušel astronom *Tycho Brahe* (1546 až 1601) vyvrátit teorii o pohybu planet *Mikuláše Koperníka* (1473 až 1543). Potřebné výpočty prováděl Brahe tzv. metodou *prosthaphaeresis*, tedy použitím goniometrických identit. Součin dvou čísel touto metodou převáděl na součet kosinů (obdobně jako součet logaritmů převádíme na logaritmus součinu a naopak), čímž si výpočet nesmírně zjednodušil, neboť již tehdy měl k dispozici trigonometrické tabulky s přesností na 10 míst.

Posuňme se ovšem v našem výkladu historie logaritmů o pár let dále, konkrétně do roku 1590. Tehdy se konala svatba *Jamese VI* ze Skotska a princezny *Anny*, dcery dánského krále Fridricha. Když se tohoto roku plavili svatebčané do Dánska, zastihla je na moři bouře, jež donutila celou výpravu přistát u břehů ostrova Ven, kde měl svou observatoř právě Tycho Brahe. Během pobytu se zde *Dr. John Craig* (lékař Jamese VI) seznámil s výše uvedenou metodou prosthaphaeresis, kterou následně podrobně popsal svému příteli *Johnu Napierovi* (1560 až 1617), skotskému šlechtici, jenž byl vzděláním právník a teolog. Ten vešel do dějin matematiky jako objevitel logaritmů, pro které vymyslel i jejich samotný název. Jeho představa logaritmů se od té současné přece jen ještě lišila. Napier vycházel ze souvislosti geometrických a aritmetických posloupností.

Profesor londýnské univerzity *Henry Briggs* (1561 až 1630) společně s Napierem ještě v roce 1615 modifikoval logaritmy na výhodnější základ 10 tak, aby platilo $\log 1 = 0$ a $\log 10 = 1$. Po Napierově smrti pak Briggs v této práci pokračoval a 1624 publikoval v knize *Arithmetica Logarithmica* užitou terminologii a vlastnosti dekadických logaritmů spolu s návody k jejich praktickému využití.

Logaritmy se velmi záhy začaly využívat, a zabývali se jimi samozřejmě i mnozí další matematici. Důležitou roli ve vývoji logaritmů zastávaly logaritmické tabulky, jejichž postupným upřesňováním se zabývali mnozí, zmiňme zde například *Joosta Bürgiho* (1552 až 1632), švýcarského hodináře na dvoře Rudolfa II v Praze. Bürgi chtěl sobě i svým kolegům usnadnit počítání, proto sestavil početní tabulky, které vydal roku 1620 v knize *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*. Pro přehlednost v ní členy aritmetické posloupnosti zapisoval červeně a členy geometrické posloupnosti modře. Rozšiřování logaritmických tabulek bylo pro vývoj logaritmů nezbytné, ovšem v současné době počítačů a kalkulaček ztratily přibližné výpočty pomocí logaritmů a jejich tabulek smysl. Vraťme se zpět do historie pojmu logaritmus. Po Napierovi a

Briggsovi se např. holandský kartograf *Gerhard Mercator* (1512 až 1594) jako jeden z prvních věnoval rovněž logaritmům přirozeným, tedy logaritmům o základu **e**. Dalšími, kteří pak usnadnili počítání používáním logaritmů, byli angličtí matematikové *William Oughtred* (1574 až 1660) a *Edmund Guntr* (1581 až 1626). Ti sestrojili v roce 1622 logaritmické pravítko - matematickou pomůcku pro násobení a dělení čísel, která se (nejen) ve školách používala až do nástupu počítačů a kalkulaček (Zuzáková, 2014).



Obrázek 1 Logaritmické pravítko (Neznámý, 2013)

Jeden z největších matematiků všech dob, Švýcar *Leonhard Euler* (1707 až 1783), se mj. zasloužil o moderní definici logaritmu, uváděnou v současných středoškolských učebnicích matematiky.

To, co většinou trápí studenty při výuce logaritmů, je jejich konkrétní využití. Studenti často postrádají při samotném výkladu smysl logaritmů (neboť je dnes k numerickým výpočtům prakticky nepotřebujeme) a netuší, kde by se s nimi mohli setkat jinde, než v učebnici matematiky. Proto zde uvedeme několik ukázek z vědních oborů, které právě logaritmů využívají, a to především jako aparátu, pomocí něhož je možné pracovat s daty ve vhodné škále rozpětí.

Fyzika je vědním oborem, který je matematice nesmírně blízkým, proto i zde nacházíme samozřejmě logaritmy, a to například při studiu zvuku, světla, elektrických signálů atd.

Chemie využívá logaritmů dobře známým způsobem při stanovování kyselosti, či zásaditosti roztoku, tedy měření pH faktoru. Jedná se o jednu z nejpodstatnějších informací, jakou můžeme o roztoku podat. Právě logaritmus optimálně definuje stupnici pro koncentrace iontů

Psychologie se zabývá mimo jiné i tematikou počitků a vjemů, které popisuje *Weberův - Fechnerův zákon*, který říká, že intenzita počitku je přímo úměrná logaritmu intenzity podnětu. Toto tvrzení v sobě samozřejmě zahrnuje pro sluchový počitek již zmíněnou definici intenzity hladiny zvuku. Autorem výše uvedeného zákona z roku 1860 byl německý filosof a psycholog Gustav Theodor Fechner (1801 až 1887), přičemž formulaci zákona vytvořil fyzik Wilhelm Eduard Weber (1804 až 1891).

Biologie využívá logaritmů například při popisu alometrie, tedy nerovnoměrnosti růstu a vývinu, přesněji změn v proporcích organizmů vyvolaných změnami v absolutní velikosti celého organizmu nebo jeho jednotlivých částí (Zuzáková, 2014).

1.4 Logaritmické rovnice a nerovnice

Logaritmická rovnice je taková rovnice, která obsahuje logaritmy s neurčitou x.
Základní logaritmická rovnice má tvar

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

přičemž určujeme x tak, aby nastala rovnost.

Logaritmická nerovnice je taková nerovnice, v níž se vyskytují logaritmické výrazy s neznámou $x \in R$.

Nechť $a \in R^+ - \{1\}$; $f(x), g(x)$ jsou funkce nabývající pouze kladných hodnot, a logaritmická nerovnice má tvar $\log_a f(x) \langle \log_a g(x)$. Pak platí:

1. $a \rangle 1 \Rightarrow f(x) \langle g(x)$ logaritmická funkce je rostoucí
2. $0 \langle a \langle 1 \Rightarrow f(x) \rangle g(x)$ logaritmická funkce je klesající

Logaritmické rovnice i nerovnice řešíme užitím pravidel pro logaritmy (kap. 1.4.1).
U složitějších rovnic a nerovnic vhodně zavádíme substituci (Hejkrlík, 2006).

1.4.1 Pravidla pro počítání s logaritmy

Nechť $x, y \in (0;\infty), r \in R$ a $a, b \in (0;\infty) - \{1\}$, pak platí následující pravidla.

- $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

(Bartsch, 2006)

1.5 Goniometrické rovnice a nerovnice

Goniometrické rovnice jsou rovnice obsahující nějakou goniometrickou funkci (sinus, cosinus, tangens a cotangens).

Základní goniometrická rovnice má tvar $f(x) = c$, kde:
f – goniometrická funkce proměnné $x \in R$ (x – argument funkce)
c – konstanta ($c \in R$)

Jednoduché goniometrické rovnice řešíme tak, že například z grafu či z jednotkové kružnice vyčteme jejich hodnotu a zjistíme periodu, kterou k výsledku přičteme.
Tedy podle znaménka konstanty **c** určíme kvadrant, ve kterém leží kořeny rovnice příslušné funkce.

Rovnici $f(x) = |c|$ řešíme v I. kvadrantu. Je-li $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ kořenem rovnice $f(x) = |c|$, pak kořeny dané rovnice $f(x) = c$ v jednotlivých kvadrantech určíme dle znaménka konstanty **c** takto:

Tabulka 1 Vzorce pro převody do jednotlivých kvadrantů

I.kv. $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	II.kv. $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	III.kv. $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	IV.kv. $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
$x_1 = x_0$	$x_2 = \pi - x_0$	$x_3 = \pi + x_0$	$x_4 = 2\pi - x_0$

Máme-li ve funkci nějaký složitější výraz, lze použít metodu substituce.

Goniometrické nerovnice jsou nerovnice obsahující nějakou goniometrickou funkci (sinus, cosinus, tangens a cotangens).

Při řešení goniometrických nerovnic využíváme znalosti získané z řešení goniometrických rovnic, řešení je často viditelné přímo z grafu daných funkcí anebo z jednotkové kružnice, taktéž využíváme základní tabulkové hodnoty goniometrických funkcí. Při řešení goniometrických rovnic a nerovnic využíváme často vzorců (viz kap.1.5.1) (Hejkrlík, 2006).

1.5.1 Goniometrické vzorce

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
- $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \cos y$
- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$
- $\operatorname{cotg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y}$
- $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
- $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$
- $\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \dfrac{\sin(y \pm x)}{\sin x \cdot \cos y}$
- $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
- $\operatorname{cotg} 2x = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \cdot \operatorname{cotg} x}$
- $\left|\sin \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$
- $\left|\cos \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$
- $\left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\left|\operatorname{cotg} \dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

(Bartsch, 2006)

2 Praktická část

Praktická část práce obsahuje vlastní sbírku příkladů tematicky zaměřenou na exponenciální, logaritmické a goniometrické rovnice a nerovnice. Příklady jsem rozčlenil do jednotlivých kapitol a v jejich rámci je seřadil dle obtížnosti a typové podobnosti. Každá kapitola obsahuje vždy 20 příkladů z daného tématu včetně podrobného řešení. V celé práci se snažím dodržovat jednotný metodický postup, který je přizpůsoben pro středně zdatné a pokročilé studenty.

2.1 Metodika

Důvod, proč jsem se rozhodl sbírku vytvořit je ten, že mě matematika baví a již mi nestačily příklady, které jsem na hodinách matematiky dostával a které jsem našel i v různých matematických sbírkách. Napadlo mě tedy, že bych si mohl vytvořit vlastní sbírku příkladů.

Inspirací pro tvorbu příkladů mi byly jednak hodiny matematiky a jednak matematické sbírky, ze kterých jsem si ve volném čase počítal.

Samotné tvoření příkladů bylo velmi rozmanité a bohužel nelze obecně shrnout, jak jsem postupoval, neboť pokaždé se jak nápad, tak i provedení lišilo. Obecně lze říci, že mým hlavním cílem bylo, aby každý příklad byl něčím originální, aby nešlo pouze o běžný mechanický dril a obsahoval to, co se ve sbírkách neobjevuje a zároveň také vedl k zamyšlení nad daným problémem. Na začátku jsem si vždy stanovil, o jaký typ příkladu by se mělo jednat a jaké přesně po sobě jdoucí logické kroky bude nutno udělat k jeho vyřešení. Mou snahou bylo, aby jak výsledky, tak úpravy v postupu (rozklady polynomů apod.) vycházely celočíselně, neboť to, na co jsem se při tvorbě příkladů zaměřoval, je myšlenkový pochod řešitelů, nikoli rutinní mechanická úprava výrazů.

Příklady jsem přepisoval v programu Editor rovnic, který mi byl doporučen učiteli informatiky jako jeden z nejvíce používaných a snadno dostupných programů. Na tvorbu grafů uvedených v práci jsem užíval program *GeoGebra*, což je počítačový program pro interaktivní geometrii, algebru i analýzu. Jedná se o multiplatformní dynamický software pro všechny úrovně vzdělání. Současně jsem se naučil pracovat s programem *Desmos*, jehož hlavní funkcí je tvorba grafů a pomocí něhož jsem provedl kontrolu výsledků.

Webové stránky byly vytvořeny v HTML 5 v kombinaci CSS3 a Java Script. Pro lepší přehlednost a dodržení současných trendů, byl využit Material Design v kombinaci s automaticky vyjíždějícím menu v pravé části stránek. Veškeré příklady byly vloženy jako text, nikoliv jako obrázek, což zajištuje lepší manipulaci a případné kopírování.
Následně jsem oslovil full servisovou interaktivní agenturu *We Make Media,* s.r.o., která mi umožnila sbírku knižně vydat.

Poznámka:
U valné většiny příkladů jsou uvedeny podmínky, které jsou pro daný příklad nezbytné. Avšak podmínky, které jsou na první pohled zřejmé a nemají na výslednou podmínku vliv, uvedeny nejsou. V některých případech je to i z toho důvodu, že by byly mechanickým způsobem velmi zdlouhavé a pracné a je mnohem efektivnější provést následně zkoušku dosazením. Zkoušky u příkladů neuvádím, neboť výsledky jsou již ověřeny jak zkouškou, tak užitím grafického programu Desmos.

2.2 Exponenciální rovnice

1) $2^{|x|}+2^{|x+1|}+2^{|x-1|}=7$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$(-\infty;-1)$

$$2^{-x}+2^{-x-1}+2^{1-x}=7$$
$$\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2\cdot 2^x}+\frac{2}{2^x}=7$$
$$2+1+4=14\cdot 2^x$$
$$7=14\cdot 2^x$$
$$\frac{1}{2}=2^x$$
$$x=-1\wedge x\notin(-\infty;-1)$$

$\langle -1;0)$

$$2^{-x}+2^{x+1}+2^{1-x}=7$$
$$\frac{1}{2^x}+2\cdot 2^x+\frac{2}{2^x}=7$$
$$1+2\cdot 2^{2x}+2=7\cdot 2^x$$

Substituce $2^x=a$

$$2a^2-7a+3=0$$
$$a_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{4}$$
$$a_{1,2}=\frac{7\pm 5}{4}$$
$$a_1=3$$
$$a_2=\frac{1}{2}$$
$$2^x=3$$
$$x\cdot\log 2=\log 3$$
$$x_1=\frac{\log 3}{\log 2}\wedge x_1\notin\langle -1;0)$$
$$2^x=\frac{1}{2}$$
$$x_2=-1$$
$$x_2\in\langle -1;0)$$

$\langle 0;1)$

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{1-x} = 7$$

$$2^x + 2 \cdot 2^x + \frac{2}{2^x} = 7$$

$$2^{2x} + 2 \cdot 2^{2x} + 2 = 7 \cdot 2^x$$

Substituce $2^x = a$

$$3a^2 - 7a + 2 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{4}$$

$$a_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{3}$$

$$2^x = 2$$

$$x_1 = 1 \wedge x_1 \notin \langle 0;1)$$

$$2^x = \frac{1}{3}$$

$$x \cdot \log 2 = \log \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log 2} \wedge x_2 \notin \langle 0;1)$$

$\langle 1;\infty)$

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 7$$

$$2^x + 2^{x+1} + \frac{2^x}{2} = 7$$

$$2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + 2^x = 14$$

$$7 \cdot 2^x = 14$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

$$x \in \langle 1;\infty)$$

Celkovým výsledkem tedy budou pouze ty výsledky, které náleží danému intervalu.

$K = \{-1;1\}$.

2) $2^{\frac{x}{4}+3} - 2^{\frac{x}{4}+1} - 2^3 = 2^{\frac{x}{2}}$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

Substituce $2^{\frac{x}{4}} = a$

$$8a - 2a - 8 = a^2$$
$$a^2 - 6a + 8 = 0$$
$$(a-4)\cdot(a-2) = 0$$
$$a_1 = 4$$
$$a_2 = 2$$
$$2^{\frac{x}{4}} = 2^2$$
$$\frac{x}{4} = 2$$
$$x_1 = 8$$
$$2^{\frac{x}{4}} = 2$$
$$\frac{x}{4} = 1$$
$$x_2 = 4$$

$K = \{4;8\}$.

3) $3\cdot 6^{4x+1} - 81\cdot 4^{2x} = 324^{2x}$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$18\cdot 36^{2x} - 81\cdot 4^{2x} = 324^{2x}$$
$$18\cdot\left(\frac{36}{4}\right)^{x} - 81 = \left(\frac{324}{4}\right)^{2x}$$
$$18\cdot 9^{2x} - 81 = 81^{2x}$$

Substituce $9^{2x} = a$

$$a^2 - 18\cdot a + 81 = 0$$
$$(a-9)^2 = 0$$
$$a = 9$$
$$9^{2x} = 9$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

$K = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

4) $3 \cdot 3^{4x^2-4x-21} - \frac{7}{9} \cdot 3^{2x^2-2x-8} = 18$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$3^{4x^2-4x-21+1} - 7 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{2x^2-2x-8} = 18$$
$$3^{4x^2-4x-21+1} - 7 \cdot 3^{2x^2-2x-8-2} = 18$$
$$3^{4x^2-4x-20} - 7 \cdot 3^{2x^2-2x-10} = 18$$

Substituce $3^{2x^2-2x-10} = a$

$$a^2 - 7a - 18 = 0$$
$$(a-9)\cdot(a+2) = 0$$
$$a_1 = 9$$
$$a_2 = -2$$
$$3^{2x^2-2x-10} = 3^2$$
$$2x^2 - 2x - 10 = 2$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)\cdot(x+2) = 0$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -2$$

Je zřejmé, že druhý kořen (a_2) nebude řešením.

$K = \{-2;3\}$.

5) $15^x - 10 \cdot 3^x = 5^{x+\frac{\log 3}{\log 5}} - 30$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$15^x - 10 \cdot 3^x = 5^x \cdot 5^{\frac{\log 3}{\log 5}} - 30$$

$$15^x - 10 \cdot 3^x = 5^x \cdot \left(10^{\log 5}\right)^{\frac{\log 3}{\log 5}} - 30$$

$$15^x - 10 \cdot 3^x = 5^x \cdot 10^{\log 3} - 30$$

$$15^x - 10 \cdot 3^x = 3 \cdot 5^x - 30$$

$$3^x \cdot \left(5^x - 10\right) = 3 \cdot \left(5^x - 10\right)$$

$$\left(5^x - 10\right) \cdot \left(3^x - 3\right) = 0$$

$A)$

$$5^x - 10 = 0$$

$$5^x = 10$$

$$x \cdot \log 5 = \log 10$$

$$x_1 = \frac{1}{\log 5}$$

$B)$

$$3^x - 3 = 0$$

$$3^x = 3$$

$$x_2 = 1$$

$K = \left\{1; \frac{1}{\log 5}\right\}$.

6) $\left(9+4\sqrt{5}\right)^x+1=6\cdot\left(9-4\sqrt{5}\right)^x$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\left(9+4\sqrt{5}\right)^x+1=6\cdot\frac{\left(9-4\sqrt{5}\right)^x\cdot\left(9+4\sqrt{5}\right)^x}{\left(9+4\sqrt{5}\right)^x}$$
$$\left(9+4\sqrt{5}\right)^x+1=6\cdot\frac{(81-80)^x}{\left(9+4\sqrt{5}\right)^x}$$
$$\left(9+4\sqrt{5}\right)^x+1=\frac{6}{\left(9+4\sqrt{5}\right)^x}$$

Substituce $\left(9+4\sqrt{5}\right)^x=a$

$$a^2+a-6=0$$
$$(a+3)\cdot(a-2)=0$$
$$a_1=2$$
$$a_2=-3$$
$$\left(9+4\sqrt{5}\right)^x=2$$
$$x\cdot\log\left(9+4\sqrt{5}\right)=\log 2$$
$$x_1=\frac{\log 2}{\log\left(9+4\sqrt{5}\right)}$$

Je zřejmé, že druhý kořen (a_2) nebude řešením.

$K=\left\{\frac{\log 2}{\log\left(9+4\sqrt{5}\right)}\right\}.$

7) $12\cdot 81^x - 35\cdot 36^x + 18\cdot 16^x = 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$12\cdot\left(\frac{81}{36}\right)^x - 35 + 18\cdot\left(\frac{16}{36}\right)^x = 0$$

$$12\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x - 35 + 18\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x = 0$$

$$12\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 35\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x + 18 = 0$$

Substituce $\left(\frac{9}{4}\right)^x = a$

$$12a^2 - 35a + 18 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2 - 4\cdot 12\cdot 18}}{24}$$

$$a_{1,2} = \frac{35 \pm 19}{24}$$

$$a_1 = \frac{9}{4}$$

$$a_2 = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{9}{4}$$

$$x_1 = 1$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

$$2x = -1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$K = \left\{-\frac{1}{2};1\right\}$.

8) $\sqrt[(x+1)]{\sqrt[(x-1)]{\sqrt[(x^2+x+1)]{3}}} \cdot \sqrt[3\cdot(x^2-1)]{27} = \sqrt[(x+1)]{\sqrt[(x^3-1)]{3}} \cdot \sqrt[(x-1)(x^3+1)]{3}$

Podmínky:

$$x+1 \neq 0 \wedge x-1 \neq 0$$
$$x \neq \pm 1$$

Řešení:

$$3^{\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)}} \cdot 3^{\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}} = 3^{\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)}} \cdot 3^{\frac{1}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-x+1)}}$$

$$\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)} + \frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)} + \frac{1}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-x+1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{1}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-x+1)}$$

$$x^2 - x + 1 = 1$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x \cdot (x-1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

Druhý kořen nevyhovuje podmínkám této rovnice.

$K = \{0\}$.

9) $\frac{4^x-4}{4^x-16}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{4^x-16}{4^x-4}}=5\cdot\sqrt[3]{\frac{4^x-4}{4^x-16}}$

Podmínky:

$$4^x\neq 4 \wedge 4^x\neq 16$$
$$x\neq 1 \wedge x\neq 2$$
$$x\in R-\{1;2\}$$

Řešení:

Substituce $\sqrt[3]{\frac{4^x-4}{4^x-16}}=a$

$$a^3+\frac{4}{a}=5a$$
$$a^4-5a^2+4=0$$
$$\left(a^2-4\right)\cdot\left(a^2-1\right)=0$$
$$a^2=4$$
$$a_{1,2}=\pm 2$$
$$a^2=1$$
$$a_{3,4}=\pm 1$$
$$\sqrt[3]{\frac{4^x-4}{4^x-16}}=2$$
$$\frac{4^x-4}{4^x-16}=8$$
$$4^x-4=8\cdot 4^x-128$$
$$4^x=\frac{124}{7}$$
$$x\cdot\log 4=\log\frac{124}{7}$$
$$x_1=\frac{\log\frac{124}{7}}{\log 4}=\frac{\log 124-\log 7}{\log 4}$$
$$\sqrt[3]{\frac{4^x-4}{4^x-16}}=-2$$
$$\frac{4^x-4}{4^x-16}=-8$$
$$4^x-4=-8\cdot 4^x+128$$
$$9\cdot 4^x=132$$

$$4^x = \frac{132}{9}$$

$$x \cdot \log 4 = \log \frac{132}{9}$$

$$x_2 = \frac{\log \frac{132}{9}}{\log 4} = \frac{\log 132 - \log 9}{\log 4}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4^x - 4}{4^x - 16}} = 1$$

$$\frac{4^x - 4}{4^x - 16} = 1$$

$$4^x - 4 = 4^x - 16$$

$$0 = 20$$

Tento kořen nebude řešením.

$$\sqrt[3]{\frac{4^x - 4}{4^x - 16}} = -1$$

$$\frac{4^x - 4}{4^x - 16} = -1$$

$$4^x - 4 = -4^x + 16$$

$$2 \cdot 4^x = 20$$

$$4^x = 10$$

$$x \cdot \log 4 = \log 10$$

$$x_3 = \frac{1}{\log 4}$$

$$K = \left\{ \frac{1}{\log 4}; \frac{\log 132 - \log 9}{\log 4}; \frac{\log 124 - \log 7}{\log 4} \right\}.$$

10) $x\cdot\left[e^{\left(\ln\left(x^2\right)-12+\frac{12}{\ln(x)}\right)}\right]^{\ln(x)}-x^2\cdot\left[e^{\left(\ln(x)-6+\frac{6}{\ln(x)}\right)}\right]^{\ln(x)}+x=\left[e^{\left(\ln(x)-6+\frac{6}{\ln(x)}\right)}\right]^{\ln(x)}$

Podmínky:

$$\ln x\neq 0\wedge x\rangle 0$$
$$x\in(0;\infty)-\{1\}$$

Řešení:

$$x\cdot\left[e^{\left(2\cdot\ln(x)-12+\frac{12}{\ln(x)}\right)}\right]^{\ln(x)}-x^2\cdot e^{\left(\ln^2(x)-6\cdot\ln(x)+6\right)}+x=e^{\left(\ln^2(x)-6\cdot\ln(x)+6\right)}$$
$$x\cdot e^{\left(2\cdot\ln^2(x)-12\cdot\ln(x)+12\right)}-x^2\cdot e^{\left(\ln^2(x)-6\cdot\ln(x)+6\right)}+x=e^{\left(\ln^2(x)-6\cdot\ln(x)+6\right)}$$

Substituce $e^{\left(\ln^2(x)-6\cdot\ln(x)+6\right)}=a$

$$x\cdot a^2-x^2\cdot a+x=a$$
$$x\cdot a\cdot(a-x)-1\cdot(a-x)=0$$
$$(a-x)\cdot(x\cdot a-1)=0$$

$A)$

$$a-x=0$$
$$a_1=x$$
$$e^{\left(\ln^2(x)-6\cdot\ln(x)+6\right)}=x$$
$$\left(\ln^2 x-6\cdot\ln x+6\right)\cdot\ln e=\ln x$$
$$\ln^2 x-6\cdot\ln x+6=\ln x$$

Substituce $\ln x=b$

$$b^2-7b+6=0$$
$$(b-6)\cdot(b-1)=0$$
$$b_1=6$$
$$b_2=1$$
$$\ln x=6$$
$$x_1=e^6$$
$$\ln x=1$$
$$x_2=e$$

$$B)$$
$$x \cdot a - 1 = 0$$
$$x \cdot a = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{x}$$
$$e^{\left(\ln^2(x) - 6 \cdot \ln(x) + 6\right)} = \frac{1}{x}$$
$$\left(\ln^2 x - 6 \cdot \ln x + 6\right) \cdot \ln e = \ln \frac{1}{x}$$
$$\ln^2 x - 6 \cdot \ln x + 6 = -\ln x$$

Substituce $\ln x = c$

$$c^2 - 5c + 6 = 0$$
$$(c-3) \cdot (c-2) = 0$$
$$c_1 = 3$$
$$c_2 = 2$$
$$\ln x = 3$$
$$x_1 = e^3$$
$$\ln x = 2$$
$$x_2 = e^2$$

$K = \{e; e^2; e^3; e^6\}.$

11) $2^{8x} - 8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{7x} + 2^{6x} - 4 \cdot (2^{5x} - 2 \cdot 2^{4x} + 2^{3x}) + 4^{x+1} - 4 \cdot 2^{x+1} + 4 = 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

Substituce $2^x = a$

$$a^8 - 2a^7 + a^6 - 4 \cdot \left(a^5 - 2a^4 + a^3\right) + 4a^2 - 8a + 4 = 0$$
$$a^8 - 2a^7 + a^6 - 4a^5 + 8a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 8a + 4 = 0$$
$$a^6 \cdot \left(a^2 - 2a + 1\right) - 4a^3 \cdot \left(a^2 - 2a + 1\right) + 4 \cdot \left(a^2 - 2a + 1\right) = 0$$
$$\left(a^2 - 2a + 1\right) \cdot \left(a^6 - 4a^3 + 4\right) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&A) \\
&a^2 - 2a + 1 = 0 \\
&(a-1)^2 = 0 \\
&a_1 = 1 \\
&2^x = 1 \\
&x_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B) \\
&a^6 - 4a^3 + 4 = 0 \\
&(a^3 - 2)^2 = 0 \\
&a^3 = 2 \\
&a_2 = 2^{\frac{1}{3}} \\
&2^x = 2^{\frac{1}{3}} \\
&x_2 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$K = \left\{0; \dfrac{1}{3}\right\}$.

12) $\dfrac{4^{\left[\left(2^{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}+6\cdot 2^x-20\right)+1\right]}}{2} + 4^{\left[(4^x+3\cdot 2^x-10)+2\right]} = 18$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\frac{4\cdot 4^{\left(2^{2x+1}+6\cdot 2^x-20\right)}}{2} + 16\cdot 4^{(4^x+3\cdot 2^x-10)} = 18$$

$$2\cdot 4^{\left(2\cdot 4^x+6\cdot 2^x-20\right)} + 16\cdot 4^{(4^x+3\cdot 2^x-10)} = 18$$

Substituce $4^{(4^x+3\cdot 2^x-10)} = a$

$$
\begin{aligned}
&2a^2 + 16a - 18 \\
&a^2 + 8a - 9 = 0 \\
&(a+9)\cdot(a-1) = 0 \\
&a_1 = 1 \\
&a_2 = -9
\end{aligned}
$$

Je zřejmé, že druhý kořen (a_2) nebude řešením.

$$4^{(4^x+3\cdot 2^x-10)}=1$$
$$4^x+3\cdot 2^x-10=0$$

Substituce $2^x=b$

$$b^2+3b-10=0$$
$$(b-2)\cdot(b+5)=0$$
$$b_1=2$$
$$b_2=-5$$
$$2^x=2$$
$$x_1=1$$

Druhý kořen opět nebude možný, rovnice má tedy pouze jedno řešení.

$K=\{1\}$.

13) $9\cdot x^{\log_8 x}-8=8^{2\cdot\log_8^2 x}$

Podmínky:

$$x\in(0;\infty)$$

Řešení:

Substituce $\log_8 x=a\Rightarrow 8^a=x$

$$9\cdot x^a-8=8^{2a^2}$$
$$9\cdot(8^a)^a-8=8^{2a^2}$$
$$9\cdot 8^{a^2}-8=8^{2a^2}$$

Substituce $8^{a^2}=b$

$$9b-8=b^2$$
$$b^2-9b+8=0$$
$$(b-8)\cdot(b-1)=0$$
$$b_1=8$$
$$b_2=1$$
$$8^{\log_8^2 x}=8$$
$$\log_8^2 x=1$$
$$\log_8 x=\pm 1$$
$$x_1=8$$
$$x_2=\frac{1}{8}$$
$$8^{\log_8^2 x}=1$$
$$\log_8^2 x=0$$
$$x_3=1$$

$K = \left\{ \frac{1}{8}; 1; 8 \right\}.$

14) $x^{x^2} - \left(\sqrt[4]{x}\right)^x = 0$

Podmínky:

$$x \in (0; \infty)$$

Řešení:

$$x^{x^2} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^x$$

$$x^{x^2} = x^{\frac{x}{4}}$$

$$x^2 \cdot \log x = \frac{x}{4} \cdot \log x$$

$$\log x \cdot \left(x^2 - \frac{x}{4} \right) = 0$$

$A)$

$$\log x = 0$$

$$x_1 = 1$$

$B)$

$$x^2 - \frac{x}{4} = 0$$

$$x \cdot \left(x - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{4}$$

Druhý kořen nevyhovuje podmínkám, takže jej musíme z řešení vyloučit.

$K = \left\{ \frac{1}{4}; 1 \right\}.$

15) $x^{\log^3 x+3}=10000\cdot x^3$

Podmínky:

$$x\in(0;\infty)$$

Řešení:

$$\left(\log^3 x+3\right)\cdot\log x=\log\left(10000\cdot x^3\right)$$
$$\left(\log^3 x+3\right)\cdot\log x=\log 10000+\log x^3$$
$$\log^4 x+3\cdot\log x=4+3\cdot\log x$$
$$\log^4 x=4$$
$$\log x=\pm\sqrt{2}$$
$$x_1=10^{\sqrt{2}}$$
$$x_2=10^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{10^{\sqrt{2}}}$$

$K=\left\{\frac{1}{10^{\sqrt{2}}};10^{\sqrt{2}}\right\}$.

16) $\dfrac{\dfrac{4^x+3^x}{4^x-3^x}-\dfrac{4^x-3^x}{4^x+3^x}}{1+\dfrac{16^x+9^x}{16^x-9^x}}=1$

Podmínky:

$$4^x-3^x\neq 0\wedge 16^x-9^x\neq 0\wedge 1+\frac{16^x+9^x}{16^x-9^x}\neq 0$$
$$4^x\neq 3^x\wedge 16^x\neq 9^x\wedge\frac{16^x+9^x}{16^x-9^x}\neq -1$$
$$x\cdot\log 4\neq x\cdot\log 3\wedge x\cdot\log 16\neq x\cdot\log 9\wedge 16^x+9^x\neq -16^x+9^x$$
$$x\cdot(\log 4-\log 3)\neq 0\wedge x\cdot(\log 16-\log 9)\neq 0\wedge 2\cdot 16^x\neq 0$$
$$x\in R-\{0\}$$

Řešení:

$$\frac{\dfrac{\left(4^x+3^x\right)\cdot\left(4^x+3^x\right)-\left(4^x-3^x\right)\cdot\left(4^x-3^x\right)}{\left(4^x-3^x\right)\cdot\left(4^x+3^x\right)}}{\dfrac{16^x-9^x+16^x+9^x}{16^x-9^x}}=1$$

$$\frac{\dfrac{4^{2x}+2\cdot 12^x+3^{2x}-4^{2x}+2\cdot 12^x-3^{2x}}{4^{2x}-3^{2x}}}{\dfrac{2\cdot 16^x}{16^x-9^x}}=1$$

$$\frac{\dfrac{4\cdot 12^x}{4^{2x}-3^{2x}}}{\dfrac{2\cdot 16^x}{16^x-9^x}}=1$$

$$\frac{4\cdot 12^x}{16^x-9^x}=\frac{2\cdot 16^x}{16^x-9^x}$$

$$4\cdot 12^x=2\cdot 16^x$$

$$2\cdot 12^x=16^x$$

$$\log 2+x\cdot\log 12=x\cdot\log 16$$

$$\log 2=x\cdot(\log 16-\log 12)$$

$$\log 2=x\cdot\log\frac{16}{12}$$

$$x=\frac{\log 2}{\log\frac{16}{12}}=\frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}=\frac{\log 2}{\log 4-\log 3}$$

$$K=\left\{\frac{\log 2}{\log 4-\log 3}\right\}.$$

17) $x^{\log^2 64^{\left(\frac{\sin x+\cos x}{3}\right)}}=x^{\left[-2\log 4\cdot\log\left(\frac{1}{2^{(2\sin x+2\cos x)}}\right)-\log^2 4\right]}$

Podmínky:

$$x\in(0;\infty)$$

Řešení:

$$\log x^{\log^2 64^{\left(\frac{\sin x+\cos x}{3}\right)}}=\log x^{\left[-2\log 4\cdot\log\left(\frac{1}{2^{(2\sin x+2\cos x)}}\right)-\log^2 4\right]}$$

$$\log^2 64^{\left(\frac{\sin x+\cos x}{3}\right)}\cdot\log x=\left(-2\cdot\log 4\cdot\log\left(\frac{1}{2^{(2\sin x+2\cos x)}}\right)-\log^2 4\right)\cdot\log x$$

$$\log^2 4^{(\sin x+\cos x)}\cdot\log x=\left(-2\cdot\log 4\cdot\log\left(2^{-2\cdot(\sin x+\cos x)}\right)-\log^2 4\right)\cdot\log x$$

$$\log^2 4^{(\sin x+\cos x)}\cdot\log x=\left(-2\cdot\log 4\cdot-\log\left(4^{(\sin x+\cos x)}\right)-\log^2 4\right)\cdot\log x$$

$$\log^2 4^{(\sin x+\cos x)}\cdot\log x=\left(2\cdot\log 4\cdot\log\left(4^{(\sin x+\cos x)}\right)-\log^2 4\right)\cdot\log x$$

$$\log x\cdot\left(\log^2 4^{(\sin x+\cos x)}-2\cdot\log 4\cdot\log\left(4^{(\sin x+\cos x)}\right)+\log^2 4\right)=0$$

$$\log x\cdot\left(\log 4^{(\sin x+\cos x)}-\log 4\right)^2=0$$

$A)$

$$\log x=0$$

$$x_1=1$$

$B)$

$$\log 4^{(\sin x+\cos x)} - \log 4 = 0$$

$$\log 4^{(\sin x+\cos x)} = \log 4$$

$$4^{\sin x+\cos x} = 4$$

$$\sin x + \cos x = 1$$

Z grafu těchto dvou funkcí si lze všimnout, že pokud je $\sin x = 1$, tak $\cos x = 0$, protože jsou tyto funkce posunuty o hodnotu $\frac{\pi}{2}$. Toto nastává pouze ve dvou případech a to v hodnotě $2k\pi$ a $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Řešením tedy budou tato čísla, ale musíme ještě udělat průnik s podmínkou.

$$\left\{2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cap (0;\infty)$$

$$\bigcup_{k\in Z_0^+} \left\{1; \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right\}.$$

18) $\dfrac{4^{\sin^2 x+3}}{2^{2\sin^2 x+3}} - 4^{\frac{\log 6}{\log 4}} \cdot \left(4^{2\cdot\cos^2 x}\right)^{2\cdot\sin^2 x} + 256^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\frac{2^{2\cdot(\sin^2 x+3)}}{2^{2\sin^2 x+3}} - \left(10^{\log 4}\right)^{\frac{\log 6}{\log 4}} \cdot 4^{2\cdot\cos^2 x\cdot 2\cdot\sin^2 x} + 256^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = 0$$

$$2^{2\cdot\sin^2 x+6-2\cdot\sin^2 x-3} - 10^{\log 6} \cdot 4^{4\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x} + 256^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = 0$$

$$8 - 6\cdot 4^{4\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x} + 256^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = 0$$

$$8 - 6\cdot 16^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} + 256^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = 0$$

Substituce $16^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = a$

$$a^2 - 6a + 8 = 0$$

$$(a-4)\cdot(a-2) = 0$$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 2$$

$$16^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = 4$$

$$4^{4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = 4$$

$$4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 2x = 1$$

$$\sin 2x = \pm 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$16^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = 2$$

$$2^{8\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = 2$$

$$8\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1$$

$$2\cdot\sin^2 2x = 1$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\}.$$

19) $3^{[3\cdot\log(x+1)+9\cdot\log_{(x+1)}10]} + 531441\cdot 3^{\left[\left(\log_2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10\right)\right]} = 6642\cdot 3^{[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10]}$

Podmínky:

$$x+1\rangle 0 \wedge x+1 \neq 1$$

$$x\rangle -1 \wedge x \neq 0$$

$$x \in (-1;\infty) - \{0\}$$

Řešení:

$$3^{3\cdot[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10]} + 531441\cdot 3^{[-1\cdot(\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10)]} = 6642\cdot 3^{[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10]}$$

$$3^{3\cdot[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10]} + \frac{531441}{3^{[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10]}} = 6642\cdot 3^{[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10]}$$

Substituce $3^{[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10]} = a$

$$a^3 + \frac{531441}{a} = 6642a$$

$$a^4 - 6642a^2 + 531441 = 0$$

Substituce $a^2 = b$

$$b^2 - 6642b + 531441 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{6642 \pm \sqrt{(-6642)^2 - 4\cdot 1\cdot 531441}}{2}$$

$$b_{1,2} = \frac{6642 \pm 6480}{2}$$

$$b_1 = 6561$$
$$b_2 = 81$$
$$a^2 = 6561$$
$$a_{1,2} = \pm 81$$
$$a^2 = 81$$
$$a_{3,4} = \pm 9$$

Je zřejmé, že záporné kořeny nebudou řešením.

$$3^{\left[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10\right]} = 81$$
$$3^{\left[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10\right]} = 3^4$$
$$\log(x+1) + 3\cdot\log_{(x+1)}10 = 4$$
$$\log(x+1) + \frac{3}{\log(x+1)} - 4 = 0$$

Substituce $\log(x+1) = c$

$$c^2 - 4c + 3 = 0$$
$$(c-1)\cdot(c-3) = 0$$
$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 3$$
$$\log(x+1) = 1$$
$$x+1 = 10$$
$$x_1 = 9$$
$$\log(x+1) = 3$$
$$x+1 = 100$$
$$x_2 = 999$$
$$3^{\left[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10\right]} = 9$$
$$3^{\left[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10\right]} = 3^2$$
$$\log(x+1) + 3\cdot\log_{(x+1)}10 = 2$$
$$\log(x+1) + \frac{3}{\log(x+1)} - 2 = 0$$

Substituce $\log(x+1) = d$

$$d^2 - 2d + 3 = 0$$
$$d_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2}$$

Diskriminant bude záporný, takže tento kořen nemá řešení.

$K = \{9;999\}$.

20) $8^{\log_2\left[\sqrt[3]{4^{2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}}\right]}-\sqrt[3]{8}\cdot 64^{\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}{3}}=-\sin^2 x-\cos^2 x$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$8^{\frac{1}{3}\cdot\log_2\left[4^{2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}\right]}-2\cdot 4^{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}=-1\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$8^{\frac{1}{3}\cdot\log_2\left[4^{2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}\right]}-2\cdot 4^{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}=-1$$

$$2^{\log_2\left[4^{2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}\right]}-2\cdot 4^{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}=-1$$

$$4^{2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}-2\cdot 4^{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}=-1$$

Substituce $4^{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}=a$

$$a^2-2a+1=0$$

$$(a-1)^2=0$$

$$a=1$$

$$4^{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}=1$$

$$4^{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}=4^0$$

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}=0$$

$$\sin\frac{x}{2}+4\cdot\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}=0$$

Substituce $\frac{x}{8}=b$

$$\sin 4b + 4\cdot\sin b\cdot\cos b = 0$$
$$2\cdot\sin 2b\cdot\cos 2b + 4\cdot\sin b\cdot\cos b = 0$$
$$2\cdot\sin 2b\cdot\cos 2b + 2\cdot\sin 2b = 0$$
$$2\cdot\sin 2b\cdot(\cos 2b + 1) = 0$$

$A)$

$$\sin 2b = 0$$
$$\sin\frac{x}{4} = 0$$
$$\frac{x}{4} = k\pi$$
$$x_1 = 4k\pi$$

$B)$

$$\cos 2b + 1 = 0$$
$$\cos 2b = -1$$
$$\cos\frac{x}{4} = -1$$
$$\frac{x}{4} = \pi + 2k\pi$$
$$x_2 = 4\pi + 8k\pi$$

Oba výsledky se dají sjednotit do jednoho a již finálního výsledku.

$$\bigcup_{k\in Z}\{4k\pi\}.$$

2.3 Exponenciální nerovnice

1) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-x} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3} \rangle 3^{x+2} + 3^{x+1}$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$27^x + 27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x \rangle 9\cdot 3^x + 3\cdot 3^x$$

$$27^x + 27\cdot\frac{1}{3^x} \rangle 12\cdot 3^x$$

Substituce $3^x = a$

$$a^3 + \frac{27}{a} \rangle 12a$$

$$a^4 - 12a^2 + 27 \rangle 0$$

Substituce $a^2 = b$

$$b^2 - 12b + 27 \rangle 0$$

$$b_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4\cdot 1\cdot 27}}{2}$$

$$b_{1,2} = \frac{12 \pm 6}{2}$$

$$b_1 = 9$$

$$b_2 = 3$$

Nulové body	$(-\infty;3)$	$(3;9)$	$(9;\infty)$
$b-3$	$-$	$+$	$+$
$b-9$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a^2 \langle 3 \vee a^2 \rangle 9$$

$A)$

$$a^2 \langle 3$$

$$\left(a-\sqrt{3}\right)\cdot\left(a+\sqrt{3}\right)\langle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3};\infty\right)$
$a+\sqrt{3}$	$-$	$+$	$+$
$a-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\rangle -\sqrt{3} \wedge a\langle \sqrt{3}$$

$$3^x\rangle -\sqrt{3} \wedge 3^x\langle \sqrt{3}$$

První nerovnost bude platit vždy.

$$3^x\langle 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$$

$$B)$$

$$a^2\rangle 9$$

$$(a-3)\cdot(a+3)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-3)$	$(-3;3)$	$(3;\infty)$
$a+3$	$-$	$+$	$+$
$a-3$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\langle -3 \vee a\rangle 3$$

$$a)$$

$$3^x\langle -3$$

Tato nerovnost nebude nikdy platit.

$$b)$$

$$3^x\rangle 3$$

$$x \in (1;\infty)$$

$$K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1;\infty).$$

2) $256^x - 33\cdot 8^x\rangle -32\cdot\left(2^x\cdot 8^{-x}\right)$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$256^x - 33\cdot 8^x\rangle -32\cdot\left(\frac{2^x}{8^x}\right)$$

$$256^x - 33\cdot 8^x\rangle -\frac{32}{4^x}$$

$$1024^x - 33\cdot 32^x\rangle -32$$

Substituce $32^x = a$

$$a^2 - 33a + 32 \rangle 0$$
$$(a-32)\cdot(a-1)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;1)$	$(1;32)$	$(32;\infty)$
$a-1$	$-$	$+$	$+$
$a-32$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\langle 1 \vee a \rangle 32$$

$A)$

$$32^x \langle 1$$
$$32^x \langle 32^0$$
$$x \in (-\infty;0)$$

$B)$

$$32^x \rangle 32$$
$$x \in (1;\infty)$$

$K = (-\infty;0)\cup(1;\infty).$

3) $\sqrt[|x^2-1|]{\left(\frac{1}{6}\right)^{|x|}} \langle \frac{1}{36}\cdot 216^{-\frac{1}{3}}$

Podmínky:

$$x^2 - 1 \neq 0$$
$$x \neq \pm 1$$

Řešení:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{|x|}{|x^2-1|}} \langle \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{6}$$
$$\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{|x|}{|x^2-1|}} \langle \left(\frac{1}{6}\right)^3$$
$$\frac{|x|}{|x^2-1|}\rangle 3$$
$$|x| \rangle 3\cdot|x^2-1|$$

$(-\infty;-1)$

$$-x\rangle 3\cdot\left(x^2-1\right)$$

$$3x^2+x-3\langle 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$$

$$3\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)\cdot\left(x+\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)\langle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{37}}{6}\right)$	$\left(\frac{-1-\sqrt{37}}{6};\frac{-1+\sqrt{37}}{6}\right)$	$\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{6};\infty\right)$
$x+\frac{1+\sqrt{37}}{6}$	$-$	$+$	$+$
$x+\frac{1-\sqrt{37}}{6}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x\in\left(\frac{-1-\sqrt{37}}{6};\frac{-1+\sqrt{37}}{6}\right)\cap(-\infty;-1)$$

$$x\in\left(\frac{-1-\sqrt{37}}{6};-1\right)$$

$(-1;0)$

$$-x\rangle -3\cdot\left(x^2-1\right)$$

$$3x^2-x-3\rangle 0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{37}}{6}$$

$$3\cdot\left(x+\frac{-1+\sqrt{37}}{6}\right)\cdot\left(x+\frac{-1-\sqrt{37}}{6}\right)\rangle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{37}}{6};\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{37}}{6};\infty\right)$
$x+\frac{-1+\sqrt{37}}{6}$	$-$	$+$	$+$
$x+\frac{-1-\sqrt{37}}{6}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x\in\left[\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{6};\infty\right)\right]\cap(-1;0)$$

$$x\in\left(-1;\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)$$

$\langle 0;1)$

$$x\rangle -3\cdot\left(x^2-1\right)$$

$$3x^2+x-3\rangle 0$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$$

$$3\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)\cdot\left(x+\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)\rangle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{37}}{6}\right)$	$\left(\frac{-1-\sqrt{37}}{6};\frac{-1+\sqrt{37}}{6}\right)$	$\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{6};\infty\right)$
$x+\frac{1+\sqrt{37}}{6}$	$-$	$+$	$+$
$x+\frac{1-\sqrt{37}}{6}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x\in\left[\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{37}}{6}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{6};\infty\right)\right]\cap(0;1)$$

$$x\in\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{6};1\right)$$

$(1;\infty)$

$$x \rangle 3\cdot\left(x^2-1\right)$$
$$3x^2-x-3\langle 0$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{6}$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{37}}{6}$$
$$3\cdot\left(x+\frac{-1+\sqrt{37}}{6}\right)\cdot\left(x+\frac{-1-\sqrt{37}}{6}\right)\langle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{37}}{6};\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{37}}{6};\infty\right)$
$x+\frac{-1+\sqrt{37}}{6}$	$-$	$+$	$+$
$x+\frac{-1-\sqrt{37}}{6}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x\in\left(\frac{1-\sqrt{37}}{6};\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)\cap(1;\infty)$$
$$x\in\left(1;\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$$
$$K=\left(\frac{-1-\sqrt{37}}{6};-1\right)\cup\left(-1;\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{6};1\right)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right).$$

4) $2^{2^{\left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{|2x|}}\right)}}\rangle 4$

Podmínky:

$$8-x^2\geq 0\wedge|2x|\neq 0$$
$$\left(\sqrt{8}-x\right)\cdot\left(\sqrt{8}+x\right)\geq 0\wedge x\neq 0$$
$$x\in\left\langle-\sqrt{8};\sqrt{8}\right\rangle-\{0\}$$

Řešení:

$$2^{2^{\left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{|2x|}}\right)}} \rangle 2^2$$

$$2^{\frac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{|2x|}}} \rangle 2$$

$$\frac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{|2x|}} \rangle 1$$

$$\sqrt{8-x^2} \rangle \sqrt{|2x|}$$

$$8-x^2 \rangle |2x|$$

$$x^2+|2x|-8 \langle 0$$

$\left\langle -\sqrt{8};0\right)$

$$x^2-2x-8\langle 0$$

$$(x-4)\cdot(x+2)\langle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-2)$	$(-2;4)$	$(4;\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x\in(-2;4)\cap\left\langle -\sqrt{8};0\right)$$

$$x\in(-2;0)$$

$\left(0;\sqrt{8}\right\rangle$

$$x^2+2x-8\langle 0$$

$$(x+4)\cdot(x-2)\langle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-4)$	$(-4;2)$	$(2;\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x\in(-4;2)\cap\left(0;\sqrt{8}\right\rangle$$

$$x\in(0;2)$$

$K=(-2;2)-\{0\}$.

5) $6^{|x|} + 6^{x} \langle 12$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$(-\infty;0)$

$$6^{-x} + 6^{x} \langle 12$$

$$\frac{1}{6^{x}} + 6^{x} \langle 12$$

Substituce $6^{x} = a$

$$a^2 - 12a + 1 \langle 0$$

$$a_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{140}}{2} = 6 \pm \sqrt{35}$$

$$\left(a - 6 + \sqrt{35}\right) \cdot \left(a - 6 - \sqrt{35}\right) \langle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty; 6-\sqrt{35}\right)$	$\left(6-\sqrt{35}; 6+\sqrt{35}\right)$	$\left(6+\sqrt{35}; \infty\right)$
$a - 6 + \sqrt{35}$	$-$	$+$	$+$
$a - 6 - \sqrt{35}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a \rangle 6 - \sqrt{35} \wedge a \langle 6 + \sqrt{35}$$

$$6^{x} \rangle 6 - \sqrt{35} \wedge 6^{x} \langle 6 + \sqrt{35}$$

$$x \cdot \log 6 \rangle \log\left(6 - \sqrt{35}\right) \wedge x \cdot \log 6 \langle \log\left(6 + \sqrt{35}\right)$$

$$x \rangle \frac{\log\left(6 - \sqrt{35}\right)}{\log 6} \wedge x \langle \frac{\log\left(6 + \sqrt{35}\right)}{\log 6}$$

$$x \in \left(\frac{\log\left(6 - \sqrt{35}\right)}{\log 6}; \frac{\log\left(6 + \sqrt{35}\right)}{\log 6} \right) \cap (-\infty;0)$$

$$x \in \left(\frac{\log\left(6 - \sqrt{35}\right)}{\log 6}; 0 \right)$$

$\langle 0;\infty)$

$$6^x + 6^x \langle 12$$
$$2 \cdot 6^x \langle 12$$
$$6^x \langle 6$$
$$x \langle 1$$
$$x \in (-\infty;1) \cap \langle 0;\infty)$$
$$x \in \langle 0;1)$$

$$K = \left(\frac{\log\left(6-\sqrt{35}\right)}{\log 6};1 \right).$$

6) $$\frac{1296^x - 2x^2 + x + 216 - 42 \cdot 6^{2x}}{\frac{x}{2} - x^2} \rangle 2$$

Podmínky:

$$\frac{x}{2} - x^2 \neq 0$$
$$x \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right) \neq 0$$
$$x \in R - \left\{ 0; \frac{1}{2} \right\}$$

Řešení:

$$\frac{1296^x - 2x^2 + x + 216 - 42 \cdot 6^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{x}{2} - x^2 \right)}{\frac{x}{2} - x^2} \rangle 0$$
$$\frac{1296^x - 2x^2 + x + 216 - 42 \cdot 6^{2x} - x + 2x^2}{\frac{x}{2} - x^2} \rangle 0$$
$$\frac{36^{2x} - 42 \cdot 36^x + 216}{\frac{x}{2} - x^2} \rangle 0$$
$$\frac{36^{2x} - 42 \cdot 36^x + 216}{x \cdot \left(\frac{1}{2} - x \right)} \rangle 0$$

$A)$

Substituce $36^x = a$

$$a^2 - 42a + 216 \rangle 0$$
$$(a-6)\cdot(a-36)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;6)$	$(6;36)$	$(36;\infty)$
$a-6$	$-$	$+$	$+$
$a-36$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\langle 6 \vee a\rangle 36$$

$a)$

$36^x \langle 6$

$36^x \langle 36^{\frac{1}{2}}$

$x \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

$b)$

$36^x \rangle 36$

$x \in (1;\infty)$

Můžeme tedy shrnout čitatele:

$$\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;\infty)\Rightarrow +$$
$$\left(\frac{1}{2};1\right)\Rightarrow -$$

$B)$

$$x\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$
x	$-$	$+$	$+$
$\frac{1}{2}-x$	$+$	$+$	$-$
Výsledné znaménko	$-$	$+$	$-$

Můžeme tedy shrnout jmenovatele:

$$\left(0;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow +$$

$$(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)\Rightarrow -$$

Nyní uděláme průnik intervalů.

$$\left[\left[\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;\infty)\right]\cap\left(0;\frac{1}{2}\right)\right]\cap x\in R-\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2};1\right)\cap\left[(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)\right]\right]\cap x\in R-\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$$

$K=\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)$.

7) $\sqrt[3]{3^x-3}\cdot\sqrt[6]{x^{12}}\cdot\left[x^4\cdot 3^x-\frac{1}{3^{-x-4}}\right]\langle 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\sqrt[3]{3^x-3}\cdot x^2\cdot\left[x^4\cdot 3^x-\frac{1}{3^{-1\cdot(x+4)}}\right]\langle 0$$

$$\sqrt[3]{3^x-3}\cdot x^2\cdot\left[x^4\cdot 3^x-3^{x+4}\right]\langle 0$$

$$\sqrt[3]{3^x-3}\cdot x^2\cdot\left[x^4\cdot 3^x-81\cdot 3^x\right]\langle 0$$

$$\sqrt[3]{3^x-3}\cdot x^2\cdot\left[3^x\cdot\left(x^4-81\right)\right]\langle 0$$

Výrazy x^2 a 3^x budou vždy kladné, takže řešíme pouze následující nerovnosti.

$$\sqrt[3]{3^x-3}\cdot\left(x^4-81\right)\langle 0$$

$A)$

$3^x-3\rangle 0$

$3^x\rangle 3$

$x\in(1;\infty)\Rightarrow +$

$x\in(-\infty;1)\Rightarrow -$

$B)$

$$\left(x^2-9\right)\cdot\left(x^2+9\right)\langle 0$$

$$\left(x-3\right)\cdot\left(x+3\right)\cdot\left(x^2+9\right)\langle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-3)$	$(-3;3)$	$(3;\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)\Rightarrow +$$

$$x\in(-3;3)\Rightarrow -$$

Nyní uděláme průnik intervalů.

$$\left[(-\infty;-3)\cup(3;\infty)\right]\cap(-\infty;1)$$

$$(-3;3)\cap(1;\infty)$$

$K=(-\infty;-3)\cup(1;3)$.

8) $7^x\cdot 5^x+\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{20}{7}\right)^x-\frac{9}{2}\cdot 10^x\rangle 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\left(\frac{35}{10}\right)^x+\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{20}{70}\right)^x-\frac{9}{2}\rangle 0$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x+\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^x-\frac{9}{2}\rangle 0$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^{2x}+\frac{7}{2}-\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^x\rangle 0$$

Substituce $\left(\frac{7}{2}\right)^x=a$

$$2a^2-9a+7\rangle 0$$

$$a_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 2\cdot 7}}{4}$$

$$a_{1,2}=\frac{9\pm 5}{4}$$

$$a_1=\frac{7}{2}$$

$$a_2=1$$

$$2\cdot(a-1)\cdot\left(a-\frac{7}{2}\right)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;1)$	$\left(1;\frac{7}{2}\right)$	$\left(\frac{7}{2};\infty\right)$
$a-1$	$-$	$+$	$+$
$a-\frac{7}{2}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\langle 1 \vee a\rangle\frac{7}{2}$$

$A)$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x\langle 1$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x\langle\left(\frac{7}{2}\right)^0$$

$$x\in(-\infty;0)$$

$B)$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x\rangle\frac{7}{2}$$

$$x\in(1;\infty)$$

$K=(-\infty;0)\cup(1;\infty)$.

9) $5^{x^{\left(\frac{1}{2}\right)}}\cdot\left(125^{x^{\left(\log_2\sqrt{2}\right)}}-4\cdot 5^{x^{\left(\log_{16}4\right)}}\right)\rangle 5$

Podmínky:

$$x\in\langle 0;\infty)$$

Řešení:

$$5^{\sqrt{x}}\cdot\left(125^{\sqrt{x}}-4\cdot 5^{\sqrt{x}}\right)\rangle 5$$

$$5^{\sqrt{x}}\cdot\left(5^{3\cdot\sqrt{x}}-4\cdot 5^{\sqrt{x}}\right)\rangle 5$$

Substituce $5^{\sqrt{x}}=a$

$$a^4-4a^2-5\rangle 0$$

Substituce $a^2=b$

$$b^2-4b-5\rangle 0$$

$$(b-5)\cdot(b+1)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-1)$	$(-1;5)$	$(5;\infty)$
$b+1$	$-$	$+$	$+$
$b-5$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$b\langle -1 \vee b\rangle 5$$

$$A)$$
$$a^2\langle -1$$

Tato nerovnost nebude nikdy platit.

$$B)$$
$$a^2-5\rangle 0$$
$$\left(a-\sqrt{5}\right)\cdot\left(a+\sqrt{5}\right)\rangle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)$	$\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$	$\left(\sqrt{5};\infty\right)$
$a+\sqrt{5}$	$-$	$+$	$+$
$a-\sqrt{5}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\langle -\sqrt{5} \vee a\rangle \sqrt{5}$$

$$a)$$
$$5^{\sqrt{x}}\langle -\sqrt{5}$$

Tato nerovnost nebude nikdy platit.

$$b)$$
$$5^{\sqrt{x}}\rangle \sqrt{5}$$
$$5^{\sqrt{x}}\rangle 5^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{x}\rangle \frac{1}{2}$$
$$x\rangle \frac{1}{4}$$

$K=\left(\frac{1}{4};\infty\right).$

10) $x^x \rangle x^{x^x}$

Podmínky:

$$x \in (0;\infty)$$

Řešení:

$$x \cdot \log x \rangle x^x \cdot \log x$$
$$\log x \cdot \left(x - x^x\right) \rangle 0$$

Již v této fázi je zřejmé, že nerovnost bude platit pouze pro interval $(0;1)$, ale abychom to plně dokázali, musíme zjistit, jak se v tomto intervalu bude chovat výraz $x - x^x$, neboť logaritmus bude zcela jistě záporný.

$$x \langle x^x$$
$$\log x \langle x \cdot \log x$$
$$\log x \cdot (1 - x) \langle 0$$

V intervalu $(0;1)$ bude tento výraz též záporný, neboť logaritmus bude opět záporný a výraz $(1-x)$ kladný. Naopak v intervalu $(1;\infty)$ nerovnost platit nebude, protoželogaritmus bude již kladný a výraz $(1-x)$ záporný.

$K = (0;1)$.

11) $1^x + 1^x \geq 2$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$2 \cdot 1^x \geq 2$$
$$1^x \geq 1$$

Zde je nutno si uvědomit, že 1 na libovolnou mocninu bude vždy 1,takže nerovnost bude splněna.

$x \in R$.

12) $99^x + 98^{2x} + 97^{3x} < 3$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

V tomto příkladu je nutno si uvědomit, že pokud $x = 0$, tak bude výsledek každého výrazu 1 a tedy součet všech tří bude 3. Jde tedy o hodnotu, která bude hraniční s nerovností, takže všechna čísla, která by měla nerovnost splňovat, budou čísla menší než 0.

$K = (-\infty; 0)$.

13) $\log_4(x+3) + \log_{16}(x+3)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x - \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{\log 4}{\log 8}\right)^x > -1 - \log_{64}(x+3)^3 + \log_4(x+3)^3$

Podmínky:

$$x + 3 > 0$$
$$x \in (-3; \infty)$$

Řešení:

$$\log_4(x+3) + \log_4(x+3) + \left(\frac{9}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x - \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{\log 4}{\log 8}\right)^x > -1 - \log_4(x+3) + \log_4(x+3)^3$$

$$3 \cdot \log_4(x+3) + \left(\frac{9}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x - \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{\log 4}{\log 8}\right)^x > -1 + 3 \cdot \log_4(x+3)$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x - \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{\log 4}{\log 8}\right)^x > -1$$

$$\left(\frac{9 \cdot 16}{4 \cdot 81}\right)^x - \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{\log 2^2}{\log 2^3}\right)^x > -1$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x > -1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x > -1$$

Substituce $\left(\frac{2}{3}\right)^x = a$

$$a^2 - \frac{13}{6} a + 1 > 0$$
$$6a^2 - 13a + 6 > 0$$
$$a_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12}$$
$$a_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{3}$$

$$6 \cdot \left(a - \frac{3}{2} \right) \cdot \left(a - \frac{2}{3} \right) \rangle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty; \frac{2}{3} \right)$	$\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2} \right)$	$\left(\frac{3}{2}; \infty \right)$
$a - \frac{2}{3}$	$-$	$+$	$+$
$a - \frac{3}{2}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a \langle \frac{2}{3} \vee a \rangle \frac{3}{2}$$

$A)$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^x \langle \left(\frac{3}{2} \right)^{-1}$$

$$x \langle -1$$

$$x \in (-\infty; -1) \cap (-3; \infty)$$

$$x \in (-3; -1)$$

$B)$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^x \rangle \frac{3}{2}$$

$$x \rangle 1$$

$$x \in (1; \infty) \cap (-3; \infty)$$

$$x \in (1; \infty)$$

$K = (-3; -1) \cup (1; \infty).$

14) $\left[\dfrac{\sqrt[3]{512^x}+32^x}{8^{x+\frac{1}{3}}-32^{x+\frac{1}{5}}}-\dfrac{8^x-32^x}{2\cdot 8^x+2\cdot 32^x}-\dfrac{32^{2x+\frac{1}{5}}}{32^{2x}-8^{2x}}\right]\cdot\left[\dfrac{1}{32^x}-\dfrac{1}{8^x}\right]\rangle 8^{\sqrt{x+2}+\frac{1}{3}}$

Podmínky:

$$8^{x+\frac{1}{3}}-32^{x+\frac{1}{5}}\neq 0\wedge 32^{2x}-8^{2x}\neq 0\wedge x+2\geq 0$$
$$8^x\neq 32^x\wedge 32^{2x}\neq 8^{2x}\wedge x\geq -2$$
$$x\in\langle -2;\infty)-\{0\}$$

Řešení:

$$\left[\frac{8^x+32^x}{2\cdot 8^x-2\cdot 32^x}-\frac{8^x-32^x}{2\cdot 8^x+2\cdot 32^x}-\frac{2\cdot 32^{2x}}{32^{2x}-8^{2x}}\right]\cdot\left[\frac{1}{32^x}-\frac{1}{8^x}\right]\rangle 2\cdot 8^{\sqrt{x+2}}$$
$$\left[\frac{8^x+32^x}{2\cdot(8^x-32^x)}-\frac{8^x-32^x}{2\cdot(8^x+32^x)}+\frac{2\cdot 32^{2x}}{(32^x+8^x)\cdot(8^x-32^x)}\right]\cdot\left[\frac{1}{32^x}-\frac{1}{8^x}\right]\rangle 2\cdot 8^{\sqrt{x+2}}$$
$$\left[\frac{(8^x+32^x)^2-(8^x-32^x)^2+4\cdot 32^{2x}}{2\cdot(32^x+8^x)\cdot(8^x-32^x)}\right]\cdot\left[\frac{1}{32^x}-\frac{1}{8^x}\right]\rangle 2\cdot 8^{\sqrt{x+2}}$$
$$\left[\frac{8^{2x}+2\cdot 8^x\cdot 32^x+32^{2x}-8^{2x}+2\cdot 8^x\cdot 32^x-32^{2x}+4\cdot 32^{2x}}{2\cdot(32^x+8^x)\cdot(8^x-32^x)}\right]\cdot\left[\frac{1}{32^x}-\frac{1}{8^x}\right]\rangle 2\cdot 8^{\sqrt{x+2}}$$
$$\left[\frac{2\cdot 8^x\cdot 32^x+2\cdot 32^{2x}}{(32^x+8^x)\cdot(8^x-32^x)}\right]\cdot\left[\frac{1}{32^x}-\frac{1}{8^x}\right]\rangle 2\cdot 8^{\sqrt{x+2}}$$
$$\left[\frac{2\cdot 32^x\cdot(8^x+32^x)}{(32^x+8^x)\cdot(8^x-32^x)}\right]\cdot\left[\frac{1}{32^x}-\frac{1}{8^x}\right]\rangle 2\cdot 8^{\sqrt{x+2}}$$
$$\left[\frac{2\cdot 32^x}{8^x-32^x}\right]\cdot\left[\frac{8^x-32^x}{32^x\cdot 8^x}\right]\rangle 2\cdot 8^{\sqrt{x+2}}$$
$$\frac{2}{8^x}\rangle 2\cdot 8^{\sqrt{x+2}}$$
$$8^{-x}\rangle 8^{\sqrt{x+2}}$$
$$-x\rangle\sqrt{x+2}$$

Nerovnost v intervalu $\langle 0;\infty)$ očividně platit nebude, takže zbývá interval $\langle -2;0)$, kde budeme moci nerovnici umocnit.

$$x^2-x-2\rangle 0$$
$$(x-2)\cdot(x+1)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-1)$	$(-1;2)$	$(2;\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x \in \left[(-\infty;-1) \cup (2;\infty)\right] \cap \left\langle -2;0\right)$$

$K = \left\langle -2;1\right).$

15) $\sqrt{4^x - 2^x} \rangle 2^x - 2$

Podmínky:

$$4^x - 2^x \geq 0$$
$$2^x \cdot \left(2^x - 1\right) \geq 0$$
$$2^x \geq 1$$
$$x \in \left\langle 0;\infty\right)$$

Řešení:

Nejprve musíme zjistit, v jakém intervalu bude pravá strana nerovnice kladná, abychom mohli nerovnici umocnit.

$$2^x - 2 \geq 0$$
$$2^x \geq 2$$
$$x \geq 1$$

Je tedy zřejmé, že v intervalu $\left\langle 0;1\right)$ bude nerovnost splněna a nyní budeme řešit pouze interval $\left\langle 1;\infty\right)$.

$$4^x - 2^x \rangle 4^x - 4 \cdot 2^x + 4$$
$$3 \cdot 2^x \rangle 4$$
$$2^x \rangle \frac{4}{3}$$

Toto bude v intervalu $\left\langle 1;\infty\right)$ nepochybně splněno.

$K = \left\langle 0;\infty\right).$

16) $\sqrt{5^x+16-6\cdot\sqrt{5^x+7}}+\sqrt{5^x+11+\sqrt{16\cdot 5^x+16\cdot 7}}\rangle 5$

Podmínky:

$$5^x+16-6\cdot\sqrt{5^x+7}\geq 0$$
$$5^x+16\geq 6\cdot\sqrt{5^x+7}$$
$$5^{2x}+32\cdot 5^x+256\geq 36\cdot 5^x+252$$
$$5^{2x}-4\cdot 5^x+4\geq 0$$
$$\left(5^x-2\right)^2\geq 0$$
$$x\in R$$

Řešení:

$$\sqrt{5^x+16-6\cdot\sqrt{5^x+7}}+\sqrt{5^x+11+4\cdot\sqrt{5^x+7}}\rangle 5$$

Substituce $\sqrt{5^x+7}=a$

$$\sqrt{a^2+9-6a}+\sqrt{a^2+4+4a}\rangle 5$$
$$\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(a+2)^2}\rangle 5$$
$$|a-3|+|a+2|\rangle 5$$

Interval $(-\infty;-2)$ není nutno řešit, neboť výraz $\sqrt{5^x+7}$ nebude nikdy záporný.

$\langle -2;3)$

$$3-a+a+2\rangle 5$$
$$5\rangle 5$$

V tomto intervalu tedy nerovnost nebude splněna.

$\langle 3;\infty)$

$$a-3+a+2\rangle 5$$
$$2a\rangle 6$$
$$a\rangle 3$$
$$\sqrt{5^x+7}\rangle 3$$
$$5^x+7\rangle 9$$
$$5^x\rangle 2$$
$$x\cdot\log 5\rangle\log 2$$
$$x\rangle\frac{\log 2}{\log 5}$$

$K=\left(\dfrac{\log 2}{\log 5};\infty\right)$.

17) $6^{\left[\left(\sqrt{3}\cdot\log_x(x+1)\right)^2-\log_{\sqrt[3]{x}}(x+1)\right]}+6^{\left[\log_x^2\left(\frac{1}{x+1}\right)-\log_x(x+1)\right]}\rangle\frac{6^{\left[\log_x(x+1)-\log_x^2(x+1)+1\right]}}{3}$

Podmínky:

$$x\rangle 0\wedge x\neq 1\wedge x+1\rangle 0$$
$$x\in(0;\infty)-\{1\}$$

Řešení:

$$6^{\left[3\cdot\log_x^2(x+1)-\log_{\sqrt[3]{x}}(x+1)\right]}+6^{\left[\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right]}\rangle\frac{6\cdot 6^{\left[\log_x(x+1)-\log_x^2(x+1)\right]}}{3}$$
$$6^{\left[3\cdot\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)^3\right]}+6^{\left[\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right]}\rangle 2\cdot 6^{\left[\log_x(x+1)-\log_x^2(x+1)\right]}$$
$$6^{\left[3\cdot\log_x^2(x+1)-3\cdot\log_x(x+1)\right]}+6^{\left[\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right]}\rangle 2\cdot 6^{\left[-1\cdot\left(\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right)\right]}$$
$$6^{\left[3\cdot\left(\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right)\right]}+6^{\left[\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right]}\rangle\frac{2}{6^{\left[\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right]}}$$

Substituce $6^{\left[\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right]}=a$

$$a^3+a\rangle\frac{2}{a}$$
$$a^4+a^2-2\rangle 0$$

Substituce $a^2=b$

$$b^2+b-2\rangle 0$$
$$(b+2)\cdot(b-1)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-2)$	$(-2;1)$	$(1;\infty)$
$b+2$	$-$	$+$	$+$
$b-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$b\langle -2\vee b\rangle 1$$

$A)$

$$a^2\langle -2$$
$$\left[6^{\left[\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right]}\right]^2\langle 2$$

Tato nerovnost nebude nikdy platit.

$B)$

$$a^2\rangle 1$$
$$(a-1)\cdot(a+1)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;\infty)$
$a+1$	$-$	$+$	$+$
$a-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\langle -1 \vee a\rangle 1$$

První varianta nebude možná, takže zbývá pouze druhá.

$$6^{\left[\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\right]}\rangle 1$$

$$\log_x^2(x+1)-\log_x(x+1)\rangle 0$$

Substituce $\log_x(x+1)=c$

$$c^2-c\rangle 0$$

$$c\cdot(c-1)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;\infty)$
c	$-$	$+$	$+$
$c-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$c\langle 0 \vee c\rangle 1$$

$a)$

$$\log_x(x+1)\langle 0$$

$A)$

$x\in(0;1)$

$$x+1\rangle 1$$

$$x\rangle 0$$

$$x\in(0;\infty)\cap(0;1)$$

$$x\in(0;1)$$

$B)$

$x\in(1;\infty)$

$$x+1\langle 1$$

$$x\langle 0$$

$$x\in(-\infty;0)\wedge\notin(1;\infty)$$

$b)$

$$\log_x(x+1)\rangle 1$$

$A)$

$x \in (0;1)$

$$x+1\langle x$$
$$1\langle 0$$

Tato nerovnost neplatí.

$B)$

$x \in (1;\infty)$

$$x+1\rangle x$$
$$1\rangle 0$$
$$x \in R \cap (1;\infty)$$
$$x \in (1;\infty)$$

$K = (0;1) \cup (1;\infty)$.

18) $625^{\left[\frac{\log_{x^2}|\log x|^3}{\log_2 4}\right]} - \dfrac{1}{\left[\sqrt{5}^{\log_{x^2}\frac{1}{|\log x|^3}}\right]^2} \rangle 0$

Podmínky:

$$x^2 \neq 1 \wedge x^2 \neq 0 \wedge x\rangle 0$$
$$x \in (0;\infty) - \{1\}$$

Řešení:

$$625^{\left[\frac{\log_{x^2}|\log x|^3}{2}\right]} - \frac{1}{5^{\log_{x^2}\frac{1}{|\log x|^3}}} \rangle 0$$
$$25^{\log_{x^2}|\log x|^3} - \frac{1}{5^{\log_{x^2}|\log x|^{-3}}} \rangle 0$$
$$25^{\log_{x^2}|\log x|^3} - \frac{1}{5^{-\log_{x^2}|\log x|^3}} \rangle 0$$
$$25^{\log_{x^2}|\log x|^3} - 5^{\log_{x^2}|\log x|^3} \rangle 0$$

Substituce $5^{\log_{x^2}|\log x|^3} = a$

$$a^2 - a\rangle 0$$
$$a \cdot (a-1)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;\infty)$
a	$-$	$+$	$+$
$a-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\rangle 0 \vee a\rangle 1$$

První varianta nebude možná, takže zbývá pouze druhá.

$$5^{\log_{x^2}|\log x|^3}\rangle 1$$

$$\log_{x^2}|\log x|^3\rangle 0$$

$A)$

$x \in (0;1)$

$$|\log x|^3\langle 1$$

Hledáme tedy takové hodnoty x v intervalu $(0;1)$,pro které bude $\log x$ též ve stejném intervalu.

$$\log x\rangle -1 \wedge \log x\langle 0$$

$$x\rangle \frac{1}{10} \wedge x\langle 1$$

$$x \in \left(\frac{1}{10};1\right)$$

$B)$

$x \in (1;\infty)$

$$|\log x|^3\rangle 1$$

Nyní hledáme takové hodnoty x v intervalu $(1;\infty)$, pro které bude nerovnost platit.

$$\log x\rangle 1$$

$$x \in (10;\infty)$$

$K = \left(\frac{1}{10};1\right) \cup (10;\infty)$.

19) $x^{\log\left(x^{x^2}\right)^2} + 10^{100}\rangle 10^{10} \cdot \left(10^{90} + \frac{1}{100^5}\right) \cdot x^{\log\left(x^{x^2}\right)}$

Podmínky:

$$x \in (0;\infty)$$

Řešení:

$$x^{2\cdot\log\left(x^{x^2}\right)} + 10^{100}\rangle 10^{10} \cdot \left(10^{90} + \frac{1}{10^{10}}\right) \cdot x^{\log\left(x^{x^2}\right)}$$

$$x^{2\cdot\log\left(x^{x^2}\right)} + 10^{100}\rangle \left(10^{100} + 1\right) \cdot x^{\log\left(x^{x^2}\right)}$$

Substituce $x^{\log\left(x^{x^2}\right)} = a$

$$a^2 - \left(10^{100} + 1\right) \cdot a + 10^{100}\rangle 0$$

$$(a-1) \cdot \left(a - 10^{100}\right)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;1)$	$(1;10^{100})$	$(10^{100};\infty)$
$a-1$	$-$	$+$	$+$
$a-10^{100}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\langle 1 \vee a\rangle 10^{100}$$

$$A)$$

$$x^{\log\left(x^{x^2}\right)}\langle 1$$

$$\log\left(x^{x^2}\right)\cdot \log x\langle \log 1$$

$$x^2 \cdot \log^2 x\langle 0$$

Tato nerovnost nebude nikdy splněna.

$$B)$$

$$x^{\log\left(x^{x^2}\right)}\rangle 10^{100}$$

$$\log\left(x^{x^2}\right)\cdot \log x\rangle \log 10^{100}$$

$$x^2 \cdot \log^2 x\rangle 100$$

$$(x\cdot \log x-10)\cdot(x\cdot \log x+10)\rangle 0$$

Substituce $x\cdot \log x = b$

$$(b-10)\cdot(b+10)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-10)$	$(-10;10)$	$(10;\infty)$
$b+10$	$-$	$+$	$+$
$b-10$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$b\langle -10 \vee b\rangle 10$$

$$A)$$

$$x\cdot \log x\langle -10$$

$$\log x^x\langle \log 10^{-10}$$

$$x^x\langle 10^{-10}$$

Toto řešení není možné.

$$B)$$
$$x \cdot \log x \rangle 10$$
$$\log x^x \rangle \log 10^{10}$$
$$x^x \rangle 10^{10}$$
$$x \in (10;\infty)$$

$K = (10;\infty)$.

20) $$\left[49^{(6-6\cdot\cos 2x)}\right]^{\sin x} - \frac{25\cdot\left[7^{\left(\cos^2 x+7\cdot\sin^2 x-\cos 2x\right)}\right]^{\sin x}}{2^{-1}} \rangle -\frac{49}{\left[7^{\left(\sin^{-3}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x\right)}\right]^{\left(1-\cos^2 x\right)}}$$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\left[49^{\left(6\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-6\cdot\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\right)}\right]^{\sin x} - \frac{25\cdot\left[7^{\left(\cos^2 x+7\cdot\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x\right)}\right]^{\sin x}}{\frac{1}{2}} \rangle -\frac{49}{\left[7^{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\sin x\right)}\right]^{\left(1-\cos^2 x\right)}}$$

$$\left[49^{\left(6\cdot\sin^2 x+6\cdot\cos^2 x-6\cdot\cos^2 x+6\cdot\sin^2 x\right)}\right]^{\sin x} - 50\cdot\left[7^{\left(8\cdot\sin^2 x\right)}\right]^{\sin x} \rangle -\frac{49}{\left[7^{(8\cdot\sin x)}\right]^{\left(1-\cos^2 x\right)}}$$

$$\left[49^{\left(12\cdot\sin^2 x\right)}\right]^{\sin x} - 50\cdot\left[7^{\left(8\cdot\sin^2 x\right)}\right]^{\sin x} \rangle -\frac{49}{\left[7^{(8\cdot\sin x)}\right]^{\left(\sin^2 x\right)}}$$

$$49^{12\cdot\sin^3 x} - 50\cdot 7^{8\cdot\sin^3 x} \rangle -\frac{49}{7^{8\cdot\sin^3 x}}$$

$$7^{24\cdot\sin^3 x} - 50\cdot 7^{8\cdot\sin^3 x} \rangle -\frac{49}{7^{8\cdot\sin^3 x}}$$

Substituce $7^{8\cdot\sin^3 x} = a$

$$a^3 - 50a \rangle -\frac{49}{a}$$
$$a^4 - 50a^2 + 49 \rangle 0$$

Substituce $a^2 = b$

$$b^2 - 50b + 49 \rangle 0$$
$$(b-49)\cdot(b-1)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;1)$	$(1;49)$	$(49;\infty)$
$b-1$	$-$	$+$	$+$
$b-49$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$b\langle 1 \vee b\rangle 49$$

$$A)$$

$$a^2\langle 1$$

$$(a-1)\cdot(a+1)\langle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;\infty)$
$a+1$	$-$	$+$	$+$
$a-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\rangle -1 \wedge a\langle 1$$

$$7^{8\cdot\sin^3 x}\rangle -1 \wedge 7^{8\cdot\sin^3 x}\langle 1$$

První nerovnost bude vždy splněna.

$$8\cdot\sin^3 x\langle 0$$

$$x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$$

$$B)$$

$$a^2\rangle 49$$

$$(a-7)\cdot(a+7)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-7)$	$(-7;7)$	$(7;\infty)$
$a+7$	$-$	$+$	$+$
$a-7$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\langle -7 \vee a\rangle 7$$

$$a)$$

$$7^{8\cdot\sin^3 x}\langle -7$$

Tato rovnost nebude nikdy splněna.

$b)$

$$7^{8\cdot\sin^3 x} \rangle 7$$

$$8\cdot\sin^3 x \rangle 1$$

$$\sin^3 x \rangle \frac{1}{8}$$

$$\sin x \rangle \frac{1}{2}$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)\right\}.$$

2.4 Logaritmické rovnice

1) $\log_3\left(81^x - 3^{\sqrt[3]{8x^3}+2} + 9\right) = 2x$

Řešení:

$$81^x - 3^{\sqrt[3]{8x^3}+2} + 9 = 3^{2x}$$
$$81^x - 9\cdot 3^{2x} + 9 = 3^{2x}$$
$$81^x - 10\cdot 9^x + 9 = 0$$

Substituce $9^x = a$

$$a^2 - 10a + 9 = 0$$
$$(a-9)\cdot(a-1) = 0$$
$$a_1 = 9$$
$$a_2 = 1$$
$$9^x = 9$$
$$x_1 = 1$$
$$9^x = 1$$
$$x_2 = 0$$

$K = \{0;1\}$.

2) $(\log x)\cdot\left(3^{8x} - \left(\log 10^{10}\right)\cdot 9^{\log_4 16^x} + 2\cdot\log_{\sqrt[5]{2}} 2\right) = \dfrac{\log x^{7\cdot\log\sqrt[7]{x}}}{\log x}$

Podmínky:

$$x\rangle 0 \wedge \log x \neq 0$$
$$x \in (0;\infty) - \{1\}$$

Řešení:

$$(\log x)\cdot\left(3^{8x} - 10\cdot 9^{\log_4 16^x} + 2\cdot 5\right) = \frac{\log x^{\log x}}{\log x}$$
$$(\log x)\cdot\left(3^{8x} - 10\cdot 9^{\log_4 16^x} + 10\right) = \frac{\log x\cdot\log x}{\log x}$$
$$(\log x)\cdot\left(81^{2x} - 10\cdot 9^{2x} + 10\right) = \log x$$
$$(\log x)\cdot\left(81^{2x} - 10\cdot 9^{2x} + 10 - 1\right) = 0$$

A)

$\log x = 0$

$x_1 = 1$

$B)$

$$81^{2x} - 10 \cdot 9^{2x} + 9 = 0$$

Substituce $9^{2x} = a$

$$a^2 - 10a + 9 = 0$$
$$(a-9) \cdot (a-1) = 0$$
$$a_1 = 9$$
$$a_2 = 1$$
$$9^{2x} = 9$$
$$2x = 1$$
$$x_2 = \frac{1}{2}$$
$$9^{2x} = 1$$
$$2x = 0$$
$$x_3 = 0$$

První a třetí kořen nevyhovují podmínkám rovnice.

$K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3) $\left(\log_9 x^4\right) \cdot \left(\log_{4x} 3\right) = 1$

Podmínky:

$$4x \rangle 0 \wedge 4x \neq 1$$
$$x \rangle 0 \wedge x \neq \frac{1}{4}$$
$$x \in (0; \infty) - \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

Řešení:

$$\left(\log_9 x^4\right) \cdot \left(\frac{1}{\log_3 4x}\right) = 1$$
$$\log_3 x^2 = \log_3 4x$$
$$x^2 = 4x$$
$$x \cdot (x-4) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 4$$

První kořen nevyhovuje podmínkám rovnice.

$K = \{4\}$.

4) $\left(\log_{25} x^2 - 1\right)\cdot \log_{\frac{x}{5}} 5 \cdot \log_{125x} 125^{\frac{1}{3}} = 1$

Podmínky:

$$\frac{x}{5} > 0 \wedge \frac{x}{5} \neq 1 \wedge 125x > 0 \wedge 125x \neq 1$$
$$x > 0 \wedge x \neq 5 \wedge x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{125}$$
$$x \in (0;\infty) - \left\{\frac{1}{125};5\right\}$$

Řešení:

$$\left(\log_{25} x^2 - 1\right)\cdot \log_{\frac{x}{5}} 5 \cdot \log_{125x} 5 = 1$$
$$\left(\log_{25} x^2 - 1\right)\cdot \frac{1}{\log_5 \frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{\log_5 125x} = 1$$
$$\left(\log_5 x - 1\right)\cdot \frac{1}{\log_5 x - \log_5 5} \cdot \frac{1}{\log_5 125 + \log_5 x} = 1$$
$$\left(\log_5 x - 1\right)\cdot \frac{1}{\log_5 x - 1} \cdot \frac{1}{3 + \log_5 x} = 1$$
$$\frac{1}{3 + \log_5 x} = 1$$
$$1 = 3 + \log_5 x$$
$$\log_5 x = -2$$
$$x = \frac{1}{25}$$

$K = \left\{\frac{1}{25}\right\}.$

5) $-4 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 4 \cdot \log_{64x} 4 = 1$

Podmínky:

$$\frac{x}{16} > 0 \wedge \frac{x}{16} \neq 1 \wedge 64x > 0 \wedge 64x \neq 1$$
$$x > 0 \wedge x \neq 16 \wedge x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{64}$$
$$x \in (0;\infty) - \left\{\frac{1}{64};16\right\}$$

Řešení:

$$-4\cdot\frac{1}{\log_4\frac{x}{16}}\cdot\frac{1}{\log_4 64x}=1$$

$$-4\cdot\frac{1}{\log_4 x-\log_4 16}\cdot\frac{1}{\log_4 64+\log_4 x}=1$$

$$-4\cdot\frac{1}{\log_4 x-2}\cdot\frac{1}{3+\log_4 x}=1$$

$$-4=(\log_4 x-2)\cdot(3+\log_4 x)$$

Substituce $\log_4 x=a$

$$-4=(a-2)\cdot(3+a)$$

$$-4=a^2+a-6$$

$$a^2+a-2=0$$

$$(a+2)\cdot(a-1)=0$$

$$a_1=-2$$

$$a_2=1$$

$$\log_4 x=-2$$

$$x_1=\frac{1}{16}$$

$$\log_4 x=1$$

$$x_2=4$$

$K=\left\{\frac{1}{16};4\right\}$.

6) $(\log x)^{\log x^2}-54\cdot(\log x)^{\log x}+729=0$

Podmínky:

$$\log x\rangle 0$$

$$x\in(1;\infty)$$

Řešení:

$$(\log x)^{2\cdot\log x}-54\cdot(\log x)^{\log x}+729=0$$

Substituce $(\log x)^{\log x}=a$

$$a^2-54a+729=0$$

$$(a-27)^2=0$$

$$a=27$$

$$(\log x)^{\log x}=27$$

Zde je řešení intuitivní z tvaru $b^b=27$ vyplývá, že $b=3$, což je v logaritmické podobě 10^3.

$K=\{1000\}$.

7) $\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right]^5 - 6\cdot\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right]^4 - 40\cdot\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right]^3 + 240\cdot\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right]^2 + 144\cdot\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right] = 864$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

Substituce $\left(\ln^3 x^2\right)! = a$

$$a^5 - 6a^4 - 40a^3 + 240a^2 + 144a - 864 = 0$$
$$a^4\cdot(a-6) - 40a^2\cdot(a-6) + 144\cdot(a-6) = 0$$
$$(a-6)\cdot\left(a^4 - 40a^2 + 144\right) = 0$$

$A)$

$$a_1 = 6$$
$$\left(\ln^3 x^2\right)! = 6$$
$$\ln^3 x^2 = 3$$
$$\ln x^2 = \sqrt[3]{3}$$
$$x^2 = e^{\sqrt[3]{3}}$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{e^{\sqrt[3]{3}}}$$

$B)$

Substituce $a^2 = b$

$$b^2 - 40b + 144 = 0$$
$$(b-36)\cdot(b-4) = 0$$
$$b_1 = 36$$
$$b_2 = 4$$
$$a^2 = 36$$
$$a_{2,3} = \pm 6$$
$$a^2 = 4$$
$$a_{4,5} = \pm 2$$

Záporné kořeny nebudou řešením, takže řešíme pouze následující rovnosti.

$$\left(\ln^3 x^2\right)! = 6$$

Tento kořen jsme již řešili, takže zbývá poslední kořen.

$$(\ln^3 x^2)! = 2$$
$$\ln^3 x^2 = 2$$
$$\ln x^2 = \sqrt[3]{2}$$
$$x^2 = e^{\sqrt[3]{2}}$$
$$x_{3,4} = \pm\sqrt{e^{\sqrt[3]{2}}}$$

$K = \left\{\pm\sqrt{e^{\sqrt[3]{2}}}; \pm\sqrt{e^{\sqrt[3]{3}}}\right\}.$

8) $\left[\left[(\log_{x!}(7x!-6))!\right]^2 - (\log_{x!}(7x!-6))!\right]^2 ! = 24$

Podmínky:

$$x! \neq 1$$
$$x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

Řešení:

Substituce $\left[(\log_{x!}(7x!-6))!\right]^2 - (\log_{x!}(7x!-6))! = a$

$$a^2! = 24$$
$$a^2 = 4$$
$$a_{1,2} = \pm 2$$
$$\left[(\log_{x!}(7x!-6))!\right]^2 - (\log_{x!}(7x!-6))! = 2$$

Substituce $(\log_{x!}(7x!\text{-}6))! = b$

$$b^2 - b - 2 = 0$$
$$(b-2)\cdot(b+1) = 0$$
$$b_1 = 2$$
$$b_2 = -1$$

Druhý kořen nebude řešením, neboť je záporný.

$$(\log_{x!}(7x!-6))! = 2$$
$$(\log_{x!}(7x!-6)) = 2$$
$$(x!)^2 = 7x!-6$$

Substituce $x! = c$

$$c^2 - 7c + 6 = 0$$
$$(c-6)\cdot(c-1) = 0$$
$$c_1 = 6$$
$$c_2 = 1$$

$$x! = 6$$
$$x_1 = 3$$
$$x! = 1$$
$$x_2 = 0 \wedge x_3 = 1$$

Druhý a třetí kořen nevyhovují podmínkám této rovnice.

$$[(\log_{x!}(7x!-6))!]^2 - (\log_{x!}(7x!-6))! = -2$$

Substituce $(\log_{x!}(7x!\text{-}6))! = d$

$$d^2 - d + 2 = 0$$
$$d_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$$
$$d_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

Diskriminant bude záporný, takže toto nebude řešením.

$K = \{3\}$.

9) $\log_{5^x}\left(\frac{6 \cdot 5^{x+1} - 5^3}{625^x}\right) = -\frac{4}{\log_{5^x}(6 \cdot 5^{x+1} - 5^3)}$

Podmínky:

$$5^x \neq 1 \wedge 6 \cdot 5^{x+1} - 5^3 \rangle 0 \wedge 6 \cdot 5^{x+1} - 5^3 \neq 1$$
$$x \neq 0 \wedge 5^x \rangle \frac{125}{30} \wedge 5^x \neq \frac{126}{30}$$
$$x \neq 0 \wedge x \rangle \frac{\log \frac{125}{30}}{\log 5} \wedge x \neq \frac{\log \frac{126}{30}}{\log 5}$$
$$x \in \left(\frac{\log \frac{125}{30}}{\log 5}; \infty\right) - \left\{\frac{\log \frac{126}{30}}{\log 5}\right\}$$

Řešení:

$$\log_{5^x}(6 \cdot 5^{x+1} - 5^3) - \log_{5^x} 625^x = -\frac{4}{\log_{5^x}(6 \cdot 5^{x+1} - 5^3)}$$
$$\log_{5^x}(6 \cdot 5^{x+1} - 5^3) - 4 = -\frac{4}{\log_{5^x}(6 \cdot 5^{x+1} - 5^3)}$$

Substituce $\log_{5^x}\left(6\cdot 5^{x+1}-5^3\right)=a$

$$a-4=-\frac{4}{a}$$
$$a^2-4a+4=0$$
$$(a-2)^2=0$$
$$a=2$$
$$\log_{5^x}\left(6\cdot 5^{x+1}-5^3\right)=2$$
$$5^{2x}=6\cdot 5^{x+1}-5^3$$
$$5^{2x}=30\cdot 5^x-125$$

Substituce $5^x=b$

$$b^2-30b+125=0$$
$$(b-5)\cdot(b-25)=0$$
$$b_1=5$$
$$b_2=25$$
$$5^x=5$$
$$x_1=1$$
$$5^x=25$$
$$x_2=2$$

$K=\{1;2\}$.

10) $\log^2_{(x-2)}\sqrt{x}+2\cdot\log\sqrt[4]{10}=\log_{(x-2)}\sqrt[4]{x\cdot\sqrt{x}}$

Podmínky:

$$x-2\rangle 0\wedge x-2\neq 1\wedge x\rangle 0$$
$$x\rangle 2\wedge x\neq 3$$
$$x\in(2;\infty)-\{3\}$$

Řešení:

$$\log^2_{(x-2)}x^{\frac{1}{2}}+2\cdot\frac{1}{4}=\log_{(x-2)}x^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}$$
$$\frac{1}{4}\cdot\log^2_{(x-2)}x+\frac{1}{2}=\log_{(x-2)}x^{\frac{3}{4}}$$
$$\frac{1}{4}\cdot\log^2_{(x-2)}x+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\cdot\log_{(x-2)}x$$
$$\log^2_{(x-2)}x+2=3\cdot\log_{(x-2)}x$$

Substituce $\log_{(x-2)} x = a$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$
$$(a-2)\cdot(a-1) = 0$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 1$$
$$\log_{(x-2)} x = 2$$
$$(x-2)^2 = x$$
$$x^2 - 4x + 4 = x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$(x-1)\cdot(x-4) = 0$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 4$$
$$\log_{(x-2)} x = 1$$
$$x - 2 = x$$
$$-2 = 0$$

Je zřejmé, že druhé řešení nebude možné a druhý kořen nevyhovuje podmínkám této rovnice.

$K = \{4\}$.

11) $2\cdot\left[8^{-\frac{1}{3}}\cdot\log_2^2\left(x^3+2x^2+x\right)+\log_2\left(\frac{1}{x^3+2x^2+x}\right)^2\right]=\log_2 16^{-1}$

Podmínky:

$$x^3 + 2x^2 + x \rangle 0$$
$$x\cdot\left(x^2+2x+1\right)\rangle 0$$
$$x\cdot(x+1)^2\rangle 0$$
$$x\in(0;\infty)$$

Řešení:

$$2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\log_2^2\left(x^3+2x^2+x\right)+\log_2\frac{1}{\left(x^3+2x^2+x\right)^2}\right]=-4$$
$$\log_2^2\left(x^3+2x^2+x\right)+2\cdot\log_2\left(x^3+2x^2+x\right)^{-2}=-4$$
$$\log_2^2\left(x^3+2x^2+x\right)-4\cdot\log_2\left(x^3+2x^2+x\right)=-4$$

Substituce $\log_2\left(x^3+2x^2+x\right)=a$

$$a^2-4a+4=0$$
$$\left(a-2\right)^2=0$$
$$a=2$$
$$\log_2\left(x^3+2x^2+x\right)=2$$
$$x^3+2x^2+x=4$$
$$x^3+2x^2+x-4=0$$

Nyní odhadneme kořen. Evidentně bude tato rovnost platit pro číslo 1, vydělíme tedy rovnici tímto výrazem pro získání rozkladu tohoto mnohočlenu.

$$\left(x^3+2x^2+x-4\right)\div\left(x-1\right)$$

Po vydělení polynomu polynomem získáme následující tvar:

$$x^3+2x^2+x-4=\left(x-1\right)\cdot\left(x^2+3x+4\right)$$
$$\left(x-1\right)\cdot\left(x^2+3x+4\right)=0$$

$A)$
$$x-1=0$$
$$x_1=1$$

$B)$
$$\left(x^2+3x+4\right)=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}$$

Diskriminant bude záporný, takže tento kořen nebude řešením.

$K=\{1\}$.

12) $\log_6\left[\log_4\left[\log_2\left(2x^2-12x+16\right)+\log_{\left(2x^2-12x+16\right)}8\right]\right]=0$

Řešení:

$$\log_4\left[\log_2\left(2x^2-12x+16\right)+\log_{\left(2x^2-12x+16\right)}8\right]=1$$
$$\log_2\left(2x^2-12x+16\right)+\log_{\left(2x^2-12x+16\right)}8=4$$
$$\log_2\left(2x^2-12x+16\right)+\log_{\left(2x^2-12x+16\right)}2^3=4$$
$$\log_2\left(2x^2-12x+16\right)+3\cdot\log_{\left(2x^2-12x+16\right)}2=4$$
$$\log_2\left(2x^2-12x+16\right)+\frac{3}{\log_2\left(2x^2-12x+16\right)}=4$$

Substituce $\log_2\left(2x^2-12x+16\right)=a$

$$a+\frac{3}{a}=4$$
$$a^2-4a+3=0$$
$$(a-3)\cdot(a-1)=0$$
$$a_1=3$$
$$a_2=1$$
$$\log_2\left(2x^2-12x+16\right)=3$$
$$2x^2-12x+16=8$$
$$2x^2-12x+8=0$$
$$x^2-6x+4=0$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot4}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{20}}{2}$$
$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{5}$$
$$\log_2\left(2x^2-12x+16\right)=1$$
$$2x^2-12x+16=2$$
$$2x^2-12x+14=0$$
$$x^2-6x+7=0$$
$$x_{3,4}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot7}}{2}$$
$$x_{3,4}=\frac{6\pm\sqrt{8}}{2}$$
$$x_{3,4}=3\pm\sqrt{2}$$

$K=\left\{3\pm\sqrt{2};3\pm\sqrt{5}\right\}.$

13) $\log_5\left[\log^5 x-\log_3 9\cdot\log^4 x+(\log x)^{\left(\frac{\log_2 3}{\log_8 3}\right)}+\log x\cdot\log x-\left(\sqrt[3]{4^{\log_2\sqrt{8}}}\right)\cdot\log x+2\right]=0$

Řešení:

$$\log^5 x-\log_3 9\cdot\log^4 x+(\log x)^{\left(\frac{\log_2 3}{\log_8 3}\right)}+\log^2 x-\left(\sqrt[3]{4^{\log_2\sqrt{8}}}\right)\cdot\log x+2=1$$
$$\log^5 x-2\cdot\log^4 x+(\log x)^{\left(\frac{\log_8 27}{\log_8 3}\right)}+\log^2 x-\left(\sqrt[3]{4^{\log_4 8}}\right)\cdot\log x+1=0$$
$$\log^5 x-2\cdot\log^4 x+(\log x)^{\left(\frac{3\cdot\log_8 3}{\log_8 3}\right)}+\log^2 x-\left(\sqrt[3]{8}\right)\cdot\log x+1=0$$
$$\log^5 x-2\cdot\log^4 x+\log^3 x+\log^2 x-2\cdot\log x+1=0$$

Substituce $\log x=a$

$$a^5-2a^4+a^3+a^2-2a+1=0$$
$$a^3\cdot\left(a^2-2a+1\right)+a^2-2a+1=0$$
$$\left(a^3+1\right)\cdot\left(a^2-2a+1\right)=0$$

$A)$

$a^3+1=0$

$a^3=-1$

$a_1=-1$

$\log x=-1$

$x_1=\frac{1}{10}$

$B)$

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$

$a_2=1$

$\log x=1$

$x_2=10$

$K=\left\{\frac{1}{10};10\right\}.$

14) $\left(\log_{\left[\log_x 50x+(\log x)\cdot\left(x^5+\log\log x+\frac{3}{2}\right)\right]} 1\right)+\left(\log_{\left[\log_x \log x^4+\left(2^x\right)^{\log x}-99\right]} \log 10\right)=1$

Řešení:

I kdybychom našli x, pro která by tato rovnice měla smysl, je vidět, že vždycky by výsledek obou výrazů byl nulový bez závislosti na hodnotě neznámé x.

$$0+0\neq 1$$

Řešením bude tedy prázdná množina.

$K = \theta.$

15) $5\cdot\left[\log^2_{\sin x}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{\frac{2}{5}}}+\log_2 \sqrt[5]{16}\right]=\log_{\sin x}\frac{1}{64}$

Podmínky:

$$\sin x\rangle 0 \wedge \sin x\neq 1$$

$$x\in(2k\pi,\pi+2k\pi)\wedge x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Řešení:

$$5\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\log^2_{\sin x}\left(\frac{1}{2}\right)+\log_2 2^{\frac{4}{5}}\right]=\log_{\sin x}\frac{1}{64}$$

$$5\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\log^2_{\sin x}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{5}\right]=\log_{\sin x}\frac{1}{64}$$

$$2\cdot\log^2_{\sin x}\left(\frac{1}{2}\right)+4=\log_{\sin x}\frac{1}{64}$$

$$2\cdot\log^2_{\sin x}\left(\frac{1}{2}\right)+4=\log_{\sin x}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$2\cdot\log^2_{\sin x}\left(\frac{1}{2}\right)+4=6\cdot\log_{\sin x}\frac{1}{2}$$

Substituce $\log_{\sin x}\frac{1}{2}=a$

$$2a^2-6a+4=0$$

$$a^2-3a+2=0$$

$$(a-1)\cdot(a-2)=0$$

$$a_1=1$$

$$a_2=2$$

$$\log_{\sin x}\frac{1}{2}=1$$
$$\sin x=\frac{1}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$
$$\log_{\sin x}\frac{1}{2}=2$$
$$\sin^2 x=\frac{1}{2}$$
$$\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x_3=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$

Ještě však musíme udělat průnik podmínek s řešením.

$$\left[x\in(2k\pi,\pi+2k\pi)\wedge x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]\cap\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right]$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}.$$

16) $\log_4^2\left[\cos^2 x\cdot(1-2\operatorname{tg} x)-\sin^2 x\right]=\log_4\left[\sqrt[4]{\cos^2 x\cdot(1-2\operatorname{tg} x)-\sin^2 x}\right]$

Podmínky:

$$\cos^2 x\cdot(1-2\operatorname{tg} x)-\sin^2 x\rangle 0$$
$$\cos^2 x\cdot\left(1-\frac{2\cdot\sin x}{\cos x}\right)-\sin^2 x\rangle 0$$
$$\cos^2 x\cdot\left(\frac{\cos x-2\cdot\sin x}{\cos x}\right)-\sin^2 x\rangle 0$$
$$\cos^2 x-\sin 2x-\sin^2 x\rangle 0$$

Substituce $2x=a$

$$\cos^2\frac{a}{2}-\sin a-\sin^2\frac{a}{2}\rangle 0$$
$$\frac{1+\cos a}{2}-\sin a-\frac{1-\cos a}{2}\rangle 0$$
$$\cos a-\sin a\rangle 0$$
$$\cos a\rangle\sin a$$
$$a\in\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{9\pi}{4}+2k\pi\right)$$

$$x \in \left(\frac{5\pi}{8} + k\pi, \frac{9\pi}{8} + k\pi\right)$$
$$\cos x \neq 0$$
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Řešení:

$$\log_4^2\left[\cos^2 x \cdot (1 - 2\operatorname{tg} x) - \sin^2 x\right] = \frac{1}{4} \cdot \log_4\left[\cos^2 x \cdot (1 - 2\operatorname{tg} x) - \sin^2 x\right]$$

Substituce $\log_4\left[\cos^2 x \cdot (1 - 2\operatorname{tg} x) - \sin^2 x\right] = a$

$$a^2 - \frac{a}{4} = 0$$
$$a \cdot \left(a - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$A)$

$$a_1 = 0$$
$$\log_4\left[\cos^2 x \cdot (1 - 2\operatorname{tg} x) - \sin^2 x\right] = 0$$
$$\cos^2 x \cdot (1 - 2\operatorname{tg} x) - \sin^2 x = 1$$
$$\cos^2 x \cdot \left(\frac{\cos x - 2 \cdot \sin x}{\cos x}\right) - \sin^2 x = 1$$
$$\cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$$
$$2 \cdot \sin x \cdot (\sin x + \cos x) = 0$$

$a)$

$$\sin x = 0$$
$$x_1 = k\pi$$

$b)$

$$\sin x + \cos x = 0$$
$$\sin x = -\cos x$$
$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$B)$$

$$a_2 = \frac{1}{4}$$

$$\log_4\left[\cos^2 x \cdot (1 - 2\operatorname{tg} x) - \sin^2 x\right] = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 x \cdot (1 - 2\operatorname{tg} x) - \sin^2 x = \sqrt{2}$$

$$\cos^2 x \cdot \left(\frac{\cos x - 2 \cdot \sin x}{\cos x}\right) - \sin^2 x = \sqrt{2}$$

$$\cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x = \sqrt{2}$$

Substituce $2x = b$

$$\cos^2 \frac{b}{2} - \sin b - \sin^2 \frac{b}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1 + \cos b}{2} - \sin b - \frac{1 - \cos b}{2} = \sqrt{2}$$

$$\cos b - \sin b = \sqrt{2}$$

V této fázi je zřejmé, že řešením bude hodnota $\frac{\pi}{4}$, musíme však pouze určit správné kvadranty a to kdy je cosinus kladný a zároveň sinus záporný. Jde o čtvrtý kvadrant.

$$b = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{7\pi}{8} + k\pi$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{7\pi}{8} + k\pi\right\}.$$

17) $x^{\frac{1}{\log_{x^5} 10}} + 2\cdot(\log x)^{\log_{\log x} 1} = \dfrac{2}{x^{\log\frac{1}{x^3}}} + \left(10^{\log^2 x}\right)^2$

Podmínky:

$$x^5\rangle 0 \wedge x^5 \neq 1 \wedge \log x\rangle 0 \wedge x\rangle 0 \wedge \log x \neq 1 \wedge x^3\rangle 0$$
$$x\rangle 0 \wedge x \neq 1 \wedge x\rangle 1 \wedge x \neq 10$$
$$x \in (1;\infty) - \{10\}$$

Řešení:

$$x^{\log x^5} + 2\cdot 1 = \frac{2}{x^{\log x^{-3}}} + \left(10^{\log^2 x}\right)^2$$
$$x^{\log x^5} + 2 = \frac{2}{x^{\log x^{-3}}} + \left(\left(10^{\log x}\right)^{\log x}\right)^2$$
$$x^{\log x^5} + 2 = \frac{2}{x^{-\log x^3}} + \left(x^{\log x}\right)^2$$
$$x^{\log x^5} + 2 = 2\cdot x^{\log x^3} + x^{2\cdot\log x}$$
$$x^{5\cdot\log x} + 2 = 2\cdot x^{3\cdot\log x} + x^{2\cdot\log x}$$

Substituce $x^{\log x} = a$

$$a^5 + 2 = 2a^3 + a^2$$
$$a^5 - 2a^3 - a^2 + 2 = 0$$
$$a^3\cdot\left(a^2 - 2\right) - 1\cdot\left(a^2 - 2\right) = 0$$
$$\left(a^3 - 1\right)\cdot\left(a^2 - 2\right) = 0$$

$A)$

$$a^3 - 1 = 0$$
$$a^3 = 1$$
$$a_1 = 1$$
$$x^{\log x} = 1$$
$$\log x \cdot \log x = \log 1$$
$$\log^2 x = 0$$
$$x_1 = 1$$

Toto řešení nevyhovuje podmínkám rovnice.

$$a^2 - 2 = 0$$
$$a^2 = 2$$
$$a_{2,3} = \pm\sqrt{2}$$

Záporný kořen nebude řešením.

$$x^{\log x} = \sqrt{2}$$
$$\log x \cdot \log x = \log \sqrt{2}$$
$$\log^2 x = \log \sqrt{2}$$
$$\log x = \pm\sqrt{\log \sqrt{2}}$$
$$x_2 = 10^{-\sqrt{\log\sqrt{2}}} = \frac{1}{10^{\sqrt{\log\sqrt{2}}}}$$
$$x_3 = 10^{\sqrt{\log\sqrt{2}}}$$

Druhý kořen nevyhovuje podmínkám rovnice.

$K = \left\{10^{\sqrt{\log\sqrt{2}}}\right\}.$

18) $\left(\log_{x^2} x^{\log x}\right)^{\log^5(x-3)} = 1$

Podmínky:

$$\log_{x^2} x^{\log x} \rangle 0 \wedge x^2 \rangle 0 \wedge x^2 \neq 1 \wedge x \rangle 0 \wedge x-3 \rangle 0$$
$$\log_{x^2} x^{\log x} \rangle 0 \wedge x \rangle 0 \wedge x \neq \pm 1 \wedge x \rangle 3$$

Pro řešení první nerovnosti užijeme již podmínku $x\rangle 3$ a nemusí se tak řešit interval $(0;1)$.

$(3;\infty)$

$$\log_{x^2} x^{\log x} \rangle 0$$
$$\log_{x^2} x^{\log x} \rangle \log_{x^2} 1$$
$$x^{\log x} \rangle 1$$
$$\log x \cdot \log x \rangle \log 1$$
$$\log^2 x \rangle 0$$
$$x \in (3;\infty)$$

Řešení:

$$\left(\log_{x^2} x^{\log x}\right)^{\log^5(x-3)} = 1$$
$A)$
$$\log_{x^2} x^{\log x} = 1$$
$$x^2 = x^{\log x}$$
$$2 \cdot \log x = \log^2 x$$
$$\log x \cdot (\log x - 2) = 0$$

$a)$
$$\log x = 0$$
$$x_1 = 1$$

$$b)$$
$$\log x - 2 = 0$$
$$\log x = 2$$
$$x_2 = 100$$

První kořen nebude řešením.

$$B)$$
$$\log^5 (x-3) = 0$$
$$\log x - 3 = 0$$
$$x - 3 = 1$$
$$x_3 = 4$$

$K = \{4;100\}$.

19) $\left[\log\left(36^x - 9\right) + \log_{\frac{1}{10}}\left(6^x + 3\right) + x \cdot \log 6\right]^x = 1$

Podmínky:

$$36^x \rangle 9$$
$$x \rangle \frac{\log 9}{\log 36}$$
$$\log\left(36^x - 9\right) + \log_{\frac{1}{10}}\left(6^x + 3\right) + x \cdot \log 6 \rangle 0$$
$$\log\left(36^x - 9\right) + \log_{10}\left(\frac{1}{6^x + 3}\right) + \log 6^x \rangle 0$$
$$\log \frac{36^x - 9}{6^x + 3} + \log 6^x \rangle 0$$
$$\log \frac{\left(6^x - 3\right) \cdot \left(6^x + 3\right)}{6^x + 3} + \log 6^x \rangle 0$$
$$\log\left(6^x - 3\right) + \log 6^x \rangle 0$$
$$\log\left(36^x - 3 \cdot 6^x\right) \rangle 0$$
$$\log\left(36^x - 3 \cdot 6^x\right) \rangle \log 1$$
$$36^x - 3 \cdot 6^x \rangle 1$$

Substituce $6^x = a$

$$a^2 - 3a - 1 \rangle 0$$
$$a_{1,2} \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2}$$
$$a_{1,2} \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$6^x \rangle \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

$$x \rangle \frac{\log\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)}{\log 6}$$

$$x \in \left(\frac{\log\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)}{\log 6}; \infty\right)$$

Druhý kořen bude záporné číslo, takže jej nemá smysl řešit.

Řešení:

$$A)$$

$$\log\left(36^x - 9\right) + \log_{\frac{1}{10}}\left(6^x + 3\right) + x \cdot \log 6 = 1$$

$$\log\left(36^x - 9\right) + \log_{10}\left(\frac{1}{6^x + 3}\right) + \log 6^x = 1$$

$$\log \frac{36^x - 9}{6^x + 3} + \log 6^x = 1$$

$$\log \frac{\left(6^x - 3\right) \cdot \left(6^x + 3\right)}{6^x + 3} + \log 6^x = 1$$

$$\log\left(6^x - 3\right) + \log 6^x = 1$$

$$\log\left(36^x - 3 \cdot 6^x\right) = 1$$

$$36^x - 3 \cdot 6^x = 10$$

Substituce $6^x = b$

$$b^2 - 3b - 10 = 0$$

$$(b-5) \cdot (b+2) = 0$$

$$b_1 = 5$$

$$b_2 = -2$$

$$6^x = 5$$

$$x \cdot \log 6 = \log 5$$

$$x_1 = \frac{\log 5}{\log 6}$$

Druhý kořen (b_2) nebude řešením.

$$B)$$

$$x_2 = 0$$

Tento kořen nevyhovuje podmínkám rovnice.

$K = \left\{\frac{\log 5}{\log 6}\right\}.$

20)

$$\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[3\cdot\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]}+2\cdot\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[\sqrt{2}\cdot\log\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]^2}-\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]}=2$$

Podmínky:

$$x-10^{\sqrt{3}}>0\wedge\log x>0\wedge x>0$$
$$x>10^{\sqrt{3}}\wedge x>1\wedge x>0$$
$$\log_{\log^2(x)-2}(\log x)>0$$
$$\log^2 x-2>0\wedge\log^2 x-2\neq 1$$
$$\left(\log x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\log x+\sqrt{2}\right)>0\wedge x\neq\frac{1}{10^{\sqrt{3}}}\vee 10^{\sqrt{3}}$$
$$x<\frac{1}{10^{\sqrt{2}}}\vee x>10^{\sqrt{2}}$$

Je vidět, že první výsledek nemá smysl začleňovat do řešení, protože již není v podmínkách.

A)

$(0;1)$

$$\log^2 x-2<1$$
$$\left(\log x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\log x+\sqrt{3}\right)<0$$
$$x>\frac{1}{10^{\sqrt{3}}}\wedge x<10^{\sqrt{3}}$$

Interval $(0;1)$ tedy také nebude nutno řešit, protože není v podmínkách.

B)

$(1;\infty)$

$$\log^2 x-2>1$$
$$\left(\log x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\log x+\sqrt{3}\right)>0$$
$$x<\frac{1}{10^{\sqrt{3}}}\vee x>10^{\sqrt{3}}$$

První interval také není v podmínkách, takže řešíme pouze ve druhém.

$\left(10^{\sqrt{3}};\infty\right)$

$$\log_{\log^2(x)-2}(\log x)>0$$
$$\log x>1$$
$$x>10$$
$$x\in(10;\infty)\cap\left(10^{\sqrt{3}};\infty\right)$$
$$x\in\left(10^{\sqrt{3}};\infty\right)$$

Řešení:

$$\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[3\cdot\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]}+2\cdot\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[2\cdot\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]}-\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]}=2$$

Substituce $\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]}=a$

$$a^3+2a^2-a=2$$
$$a^2\cdot(a+2)-1\cdot(a+2)=0$$
$$(a+2)\cdot\left(a^2-1\right)=0$$

$A)$

$$a+2=0$$
$$a_1=-2$$

Toto řešení není možné.

$B)$

$$a^2-1=0$$
$$a^2=1$$
$$a_{2,3}=\pm 1$$

Číslo -1 také nebude řešením, takže řešíme pouze jeden kořen.

$$\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]}=1$$

$a)$

$$\log_{\log^2(x)-2}(\log x)=1$$
$$\log x=\log^2 x-2$$

Substituce $\log x=b$

$$b^2-b-2=0$$
$$(b-2)\cdot(b+1)=0$$
$$b_1=2$$
$$b_2=-1$$
$$\log x=2$$
$$x_1=100$$
$$\log x=-1$$
$$x_2=\frac{1}{10}$$

Druhý kořen není v podmínkách rovnice.

$b)$

$$\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)=0$$
$$x-10^{\sqrt{3}}=1$$
$$x=1+10^{\sqrt{3}}$$

$K=\left\{1+10^{\sqrt{3}};100\right\}.$

2.5 Logaritmické nerovnice

1) $1\rangle \log_{\frac{1}{2}}(\sin x)\rangle 0$

Podmínky:

$$\sin x \rangle 0$$
$$x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

Řešení:

$$A)$$
$$\log_{\frac{1}{2}} \sin x \langle 1$$
$$\log_{\frac{1}{2}} \sin x \langle \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$
$$\sin x \rangle \frac{1}{2}$$
$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

$$B)$$
$$\log_{\frac{1}{2}} \sin x \rangle 0$$
$$\log_{\frac{1}{2}} \sin x \rangle \log_{\frac{1}{2}} 1$$
$$\sin x \langle 1$$
$$x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

$$\left[\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \cap x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}\right] \cap (2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}\right\}.$$

2) $\log_7 x + \log_{\sqrt{x}} \frac{1}{7} > 1$

Podmínky:

$$x > 0 \wedge \sqrt{x} \neq 1$$
$$x \in (0;\infty) - \{1\}$$

Řešení:

$$\log_7 x + \log_x \frac{1}{49} > 1$$
$$\log_7 x + \log_x 7^{-2} > 1$$
$$\log_7 x - 2 \cdot \log_x 7 > 1$$
$$\log_7 x - \frac{2}{\log_7 x} - 1 > 0$$

Substituce $\log_7 x = a$

$$a - \frac{2}{a} - 1 > 0$$
$$\frac{a^2 - a - 2}{a} > 0$$
$$\frac{(a-2)\cdot(a+1)}{a} > 0$$

Nulové body	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	$(0;2)$	$(2;\infty)$
$a+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
a	$-$	$-$	$+$	$+$
$a-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$-$	$+$	$-$	$+$

$A)$

$$a > -1 \wedge a < 0$$
$$\log_7 x > -1 \wedge \log_7 x < 0$$
$$x > \frac{1}{7} \wedge x < 1$$
$$x \in \left(\frac{1}{7};1\right)$$

$B)$

$$a > 2$$
$$\log_7 x > 2$$
$$x \in (49;\infty)$$

$$K = \left(\frac{1}{7};1\right) \cup (49;\infty).$$

3) $\log_{\frac{1}{3}} x^{-1} + \log_9 x^4 \rangle \log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}$

Podmínky:

$$x \in (0;\infty)$$

Řešení:

$$\log_{\frac{1}{3}} x^{-1} + \log_9 x^4 \rangle \log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}$$

$$\log_3 x + \log_9 x^4 \rangle \log_3 x$$

$$\log_9 x^4 \rangle 0$$

$$x^4 \rangle 1$$

$$\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)\rangle 0$$

$$(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x \in (-\infty;-1)\cup(1;\infty)$$

$$[(-\infty;-1)\cup(1;\infty)]\cap(0;\infty)$$

$K = (1;\infty)$.

4) $\log_{\frac{1}{4}} \log_5 \log_2\left(x^2+14x\right) \le 0$

Řešení:

$$\log_5 \log_2\left(x^2+14x\right) \ge 1$$

$$\log_2\left(x^2+14x\right) \ge 5$$

$$x^2+14x \ge 32$$

$$(x+16)\cdot(x-2) \ge 0$$

Nulové body	$(-\infty;-16)$	$(-16;2)$	$(2;\infty)$
$x+16$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

Do výsledku je nutno započítat i nulové body.

$K = (-\infty;-16\rangle \cup \langle 2;\infty)$.

5) $\log_{x^2-4x} x \rangle 1$

Podmínky:

$$x^2-4x\rangle 0 \wedge x^2-4x \neq 1 \wedge x \rangle 0$$
$$x\cdot(x-4)\rangle 0 \wedge x \neq 2 \pm \sqrt{5}$$
$$x \in (4;\infty)-\{2+\sqrt{5}\}$$

Řešení:

$A)$

$(0;1)$

$x^2-4x\rangle 0 \wedge x^2-4x-1\langle 0$

$x \in \left(4;2+\sqrt{5}\right)$

$$x\langle x^2-4x$$
$$x^2-5x\rangle 0$$
$$x\cdot(x-5)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;0)$	$(0;5)$	$(5;\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x \in [(-\infty;0)\cup(5;\infty)] \wedge \notin \left(4;2+\sqrt{5}\right)$$

V tomto intervalu tedy nemáme žádné řešení.

$B)$

$(1;\infty)$

$x^2-4x-1\rangle 0$

$x \in \left(2+\sqrt{5};\infty\right)$

$$x\rangle x^2-4x$$
$$x^2-5x\langle 0$$
$$x\cdot(x-5)\langle 0$$

Nulové body	$(-\infty;0)$	$(0;5)$	$(5;\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x \in (0;5)\cap\left(2+\sqrt{5};\infty\right)$$

$K=\left(2+\sqrt{5};5\right)$.

6) $\log_{\frac{1}{x}}\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$

Podmínky:

$$\frac{1}{x}>0 \wedge \frac{1}{x}\neq 1 \wedge x-\frac{1}{2}>0$$

$$x>0 \wedge x\neq 1 \wedge x>\frac{1}{2}$$

$$x\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)-\{1\}$$

$A)$

$(0;1)$

$\frac{1}{x}>0 \wedge \frac{1}{x}<1$

$x\in(1;\infty)$

$$x-\frac{1}{2}<\frac{1}{x}$$

$$2x^2-x-2<0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot -2}}{4}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$$

Nulové body	$\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};\infty\right)$
$x+\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x\in\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\cap(1;\infty)$$

$$x\in\left(1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$$

$B)$

$\langle 1;\infty)$

$\frac{1}{x}\rangle 1$

$x \in (0;1)$

$$x-\frac{1}{2}\rangle\frac{1}{x}$$

$$2x^2-x-2\rangle 0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{4}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$$

Nulové body	$\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};\infty\right)$
$x+\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x\in\left[\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};\infty\right)\right]\wedge\notin(0;1)$$

V tomto intervalu tedy není žádné řešení.

$K=\left(1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right).$

7) $\log_{\log x} x < 1$

Podmínky:

$$x > 0 \wedge \log x > 0 \wedge \log x \neq 1$$
$$x > 1 \wedge x \neq 10$$
$$x \in (1;\infty) - \{10\}$$

Řešení:

$A)$
$(0;1)$
$\log x > 0 \wedge \log x < 1$
$x \in (1;10)$

$$x > \log x$$
$$\log 10^x > \log x$$
$$10^x > x$$

Je vidět, že tato nerovnost bude platit úplně vždy.

$$x \in R \cap (1;10)$$
$$x \in (1;10)$$

$B)$
$(1;\infty)$
$\log x > 1$
$x \in (10;\infty)$

$$x < \log x$$
$$\log 10^x < \log x$$
$$10^x < x$$

Tato nerovnost naopak nikdy neplatí.

$K = (1;10)$.

8) $x^3 \cdot \log_x(\log x) \geq \log_x(\log x)$

Podmínky:

$$x \rangle 0 \wedge x \neq 1 \wedge \log x \rangle 0$$
$$x \in (1;\infty)$$

Řešení:

$$(x^3 - 1) \cdot \log_x(\log x) \geq 0$$

Je očividné, že s podmínkami bude první výraz vždy kladný, takže řešíme pouze následující nerovnost.

$$\log_x(\log x) \geq 0$$

Interval $(0;1)$ zde nemusíme řešit.

$A)$

$x \in (1;\infty)$

$$\log x \geq 1$$
$$x \geq 10$$

$K = \langle 10;\infty)$.

9) $\log_{\log x}(\log^3 x - \log x) \geq 1$

Podmínky:

$$\log^3 x - \log x \rangle 0 \wedge x \rangle 0 \wedge \log x \rangle 0 \wedge \log x \neq 1$$
$$\log x \cdot (\log^2 x - 1) \rangle 0 \wedge x \rangle 1 \wedge x \neq 10$$
$$\log x \cdot (\log x + 1) \cdot (\log x - 1) \rangle 0$$
$$[\log x \rangle -1 \wedge \log x \langle 0] \vee \log x \rangle 1$$
$$x \in \left(\frac{1}{10};1\right) \cup (10;\infty)$$
$$x \in (10;\infty)$$

Řešení:

Interval $(0;1)$, což je v logaritmické podobě $(1;10)$ není nutno řešit, protože není v podmínkách této nerovnice.

$A)$

$(1;\infty)$

$\log x \rangle 1$

$x \in (10;\infty)$

$$\log^3 x - \log x \geq \log x$$

Substituce $\log x = a$

$$a^3 - a \geq a$$
$$a^3 - 2a \geq 0$$
$$a \cdot \left(a^2 - 2\right) \geq 0$$
$$a \cdot \left(a - \sqrt{2}\right) \cdot \left(a + \sqrt{2}\right) \geq 0$$

Nulové body	$\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2}; 0\right)$	$\left(0; \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}; \infty\right)$
$a + \sqrt{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$
a	$-$	$-$	$+$	$+$
$a - \sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$-$	$+$	$-$	$+$

Při návratu do substituce je nutné započítat i nulové body.

$$A)$$
$$\log x \geq -\sqrt{2} \wedge \log x \leq 0$$
$$x \geq \frac{1}{10^{\sqrt{2}}} \wedge x \leq 1$$
$$x \in \left\langle \frac{1}{10^{\sqrt{2}}}; 1 \right\rangle \wedge \notin \left(10; \infty\right)$$

$$B)$$
$$\log x \geq \sqrt{2}$$
$$x \geq 10^{\sqrt{2}}$$
$$x \in \left\langle 10^{\sqrt{2}}; \infty\right) \cap \left(10; \infty\right)$$

$K = \left\langle 10^{\sqrt{2}}; \infty\right)$.

10) $\log_x 5 - \log_{\left[\sqrt[4]{x} + 10^{\log_{2x} 3x} - \log\log x\right]} 1 \geq 3$

Podmínky:

$$x \rangle 0 \wedge x \neq 1 \wedge \log \log x \rangle 0$$
$$x \in \left(1; \infty\right)$$

Řešení:

Z důvodu podmínek není nutno řešit interval $\left(0; 1\right)$.

$A)$

$x \in (1;\infty)$

$$\log_x 5 - 0 \geq 3$$
$$\log_x 5 \geq 3$$
$$5 \geq x^3$$
$$x \leq \sqrt[3]{5}$$
$$x \in \left(-\infty;\sqrt[3]{5}\right\rangle \cap (1;\infty)$$

$K = \left(1;\sqrt[3]{5}\right\rangle$.

11) $\log_{(x+1)}(x-3)\cdot\left[\log_x(x+1)-\log_x(x-1)\right]\rangle 0$

Podmínky:

$$x+1\rangle 0 \wedge x+1 \neq 1 \wedge x-3\rangle 0 \wedge x\rangle 0 \wedge x \neq 1 \wedge x-1\rangle 0$$
$$x\rangle -1 \wedge x \neq 0 \wedge x\rangle 3 \wedge x\rangle 1$$
$$x \in (3;\infty)$$

Řešení:

Z důvodu podmínek není nutno řešit interval $(0;1)$.

$A)$

$x \in (3;\infty)$

$$\log_{(x+1)}(x-3)\rangle 0$$
$$x-3\rangle 1$$
$$x\rangle 4$$

Pro tento výraz tedy bude platit, že bude-li $x \in (4;\infty)$, tak bude kladný a bude-li $x \in (3;4)$ záporný.

$$\log_x(x+1)-\log_x(x-1)\rangle 0$$
$$\log_x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\rangle 0$$
$$\frac{x+1}{x-1}\rangle 1$$
$$x+1\rangle x-1$$
$$2\rangle 0$$
$$x \in R \cap (3;\infty)$$
$$x \in (3;\infty)$$

Výraz v závorce tedy bude vždy kladný, takže uděláme pouze průnik intervalů.

$$(3;\infty)\cap(4;\infty)$$

$K = (4;\infty)$.

12) $\left(\log_{(x+1)^2}|x-5|\right)\cdot\left(\log^2_{(x+1)^2}7-\log_{(x+1)^2}7\right)\rangle 0$

Podmínky:

$$x-5\neq 0\wedge|x-5|\rangle 0\wedge(x+1)^2\rangle 0\wedge(x+1)^2\neq 1\wedge(x+1)^2\neq 0$$
$$x\neq 5\wedge x\neq 0\wedge x\neq -1\wedge x\neq -2$$
$$x\in R-\{-2;-1-0;5\}$$

Řešení:

V tomto příkladu by byl mechanický postup velmi složitý, je tedy snadnější si to rozdělit na dvě části a použít jednoduchou úvahu.

$A)$

$$\log_{(x+1)^2}|x-5|\rangle 0$$

$a)$

$(0;1)$

$(x+1)^2\rangle 0\wedge(x+1)^2\langle 1$

$x\in(-2;-1)\cup(-1;0)$

$$|x-5|\langle 1$$
$$x\in(4;6)\wedge\notin[(-2;-1)\cup(-1;0)]$$

$b)$

$(1;\infty)$

$(x+1)^2\rangle 1$

$x\in(-\infty;-2)\cup(0;\infty)$

$$|x-5|\rangle 1$$
$$x\in[(-\infty;4)\cup(6;\infty)]\cap[(-\infty;-2)\cup(0;\infty)]$$
$$x\in(-\infty;-2)\cup(0;4)\cup(6;\infty)$$

V těchto intervalech bude tento výraz kladný, v těch zbylých tedy záporný.

$B)$

$$\left(\log^2_{(x+1)^2}7-\log_{(x+1)^2}7\right)\rangle 0$$

Zde by byl postup dosti zdlouhavý, takže užijeme úvahu. Bude-li $x\in(-2;-1)\cup(-1;0)$, tak bude výsledek obou logaritmů záporný a protože je u prvního výrazu druhá mocnina a u druhého mínus, tak bude součet obou kladný. Nyní budeme uvažovat interval $(x+1)^2\langle 7$, protože v něm bude základ dosahovat hodnot v intervalu $(1;7)$.Po úpravách nám vyjde $\left(-1-\sqrt{7};-2\right)\cup\left(0;-1+\sqrt{7}\right)$. V těchto intervalech budeme dostávat výsledky, které jsou větší než jedna a v důsledku druhé mocniny u prvního výrazu bude výsledek celé závorky kladný.

Další interval bude $(x+1)^2\rangle 7$, kde bude základ dosahovat hodnot $(7;\infty)$. Po úpravách nám vyjde $\left(-\infty;-1-\sqrt{7}\right)\cup\left(-1+\sqrt{7};\infty\right)$. V těchto intervalech budeme dostávat výsledky, které budou v intervalu $(0;1)$ a opět v důsledku druhé mocniny u prvního výrazu bude nyní celkový výsledek záporný.

Jako shrnutí můžeme napsat:

$$x \in (-2;-1) \cup (-1;0) \Rightarrow +$$
$$x \in \left(-1-\sqrt{7};-2\right) \cup \left(0;-1+\sqrt{7}\right) \Rightarrow +$$
$$x \in \left(-\infty;-1-\sqrt{7}\right) \cup \left(-1+\sqrt{7};\infty\right) \Rightarrow -$$

Nyní pouze uděláme průnik následujících intervalů s intervaly prvního výrazu.

$$[(-\infty;-2) \cup (0;4) \cup (6;\infty)] \cap \left[(-2;-1) \cup (-1;0) \cup \left(-1-\sqrt{7};-2\right) \cup \left(0;-1+\sqrt{7}\right)\right]$$
$$[(-2;-1) \cup (-1;0) \cup (4;6) - \{5\}] \cap \left[\left(-\infty;-1-\sqrt{7}\right) \cup \left(-1+\sqrt{7};\infty\right)\right]$$

$K = \left(-\sqrt{7}-1;-2\right) \cup \left(0;\sqrt{7}-1\right) \cup (4;6) - \{5\}$.

13) $\log(\log x - 1) + \log(\log x + 1) \rangle 1$

Podmínky:

$$\log x - 1 \rangle 0 \wedge \log x + 1 \rangle 0$$
$$\log x \rangle 1 \wedge \log x \rangle -1$$
$$x \rangle 10 \wedge x \rangle \frac{1}{10}$$
$$x \in (10;\infty)$$

Řešení:

$$\log\left(\log^2 x - 1\right) \rangle 1$$
$$\log^2 x - 1 \rangle 10$$
$$\log^2 x - 11 \rangle 0$$

Substituce $\log x = a$

$$a^2 - 11 \rangle 0$$
$$\left(a-\sqrt{11}\right) \cdot \left(a+\sqrt{11}\right) \rangle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty;-\sqrt{11}\right)$	$\left(-\sqrt{11};\sqrt{11}\right)$	$\left(\sqrt{11};\infty\right)$
$a+\sqrt{11}$	$-$	$+$	$+$
$a-\sqrt{11}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a \langle -\sqrt{11} \vee a \rangle \sqrt{11}$$

A)

$$\log x \langle -\sqrt{11}$$
$$x \in \left(-\infty;\frac{1}{10^{\sqrt{11}}}\right) \wedge \notin (10;\infty)$$

$B)$

$\log x > \sqrt{11}$

$x \in \left(10^{\sqrt{11}}; \infty\right)$

$K = \left(10^{\sqrt{11}}; \infty\right).$

14) $\dfrac{x \cdot \log_3^2 x - 2x \cdot \log_3 x - 3x}{x^4 - 5x^2 + 4} > 0$

Podmínky:

$$x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0 \wedge x > 0$$
$$\left(x^2 - 4\right) \cdot \left(x^2 - 1\right) \neq 0$$
$$x \neq \pm 2 \wedge x \neq \pm 1$$
$$x \in (0; \infty) - \{1; 2\}$$

Řešení:

$$\frac{x \cdot \left(\log_3^2 x - 2 \cdot \log_3 x - 3\right)}{x^4 - 5x^2 + 4} > 0$$

Vzhledem k podmínkám bude x před závorkou vždy kladné.

$A)$

Substituce $\log_3 x = a$

$$a^2 - 2a - 3 > 0$$
$$(a - 3) \cdot (a + 1) > 0$$

Nulové body	$(-\infty; -1)$	$(-1; 3)$	$(3; \infty)$
$a + 1$	−	+	+
$a - 3$	−	−	+
Výsledné znaménko	+	−	+

$$a < -1 \vee a > 3$$

$A)$

$\log_3 x < -1$

$x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cap (0; \infty)$

$x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$

$B)$

$\log_3 x > 3$

$$x \in (27;\infty)$$

Můžeme tedy shrnout čitatele:

$$\left(0;\frac{1}{3}\right) \cup (27;\infty) \Rightarrow +$$

$$\left(\frac{1}{3};27\right) - \{1;2\} \Rightarrow -$$

$B)$

Substituce $x^2 = b$

$$b^2 - 5b + 4\rangle 0$$

$$(b-4)\cdot(b-1)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;1)$	$(1;4)$	$(4;\infty)$
$b-1$	$-$	$+$	$+$
$b-4$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$b\langle 1 \vee b\rangle 4$$

$A)$

$$x^2\langle 1$$

$$(x-1)\cdot(x+1)\langle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x \in (-1;1)$$

$B)$

$$x^2\rangle 4$$

$$(x-2)\cdot(x+2)\rangle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-2)$	$(-2;2)$	$(2;\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$x \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$$

Můžeme tedy shrnout jmenovatele:

$$(-\infty;-2)\cup(2;\infty)\cup(-1;1)\Rightarrow +$$
$$(-2;-1)\cup(1;2)\Rightarrow -$$

Nyní uděláme průnik intervalů.

$$[(-\infty;-2)\cup(2;\infty)\cup(-1;1)]\cap\left[\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup(27;\infty)\right]$$
$$[(-2;-1)\cup(1;2)]\cap\left[\left(\frac{1}{3};27\right)-\{1;2\}\right]$$

$K=\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;2)\cup(27;\infty).$

15) $\log_{\frac{2^x}{2}}\left(4^{\log x}\right)\rangle 0$

Podmínky:

$$x\rangle 0\wedge 2^{x-1}\neq 1$$
$$x\in(0;\infty)-\{1\}$$

Řešení:

$$\log_{2^{x-1}}\left(4^{\log x}\right)\rangle 0$$

$A)$

$(0;1)$

$2^{x-1}\rangle 0\wedge 2^{x-1}\langle 1$

$x\in(0;1)$

$$4^{\log x}\langle 1$$
$$4^{\log x}\langle 4^0$$
$$\log x\langle 0$$
$$x\langle 1$$
$$x\in(-\infty;1)\cap(0;1)$$
$$x\in(0;1)$$

$B)$

$(1;\infty)$

$2^{x-1}\rangle 1$

$x\in(1;\infty)$

$$4^{\log x}\rangle 1$$
$$4^{\log x}\rangle 4^0$$
$$\log x\rangle 0$$
$$x\rangle 1$$
$$x\in(1;\infty)\cap(1;\infty)$$
$$x\in(1;\infty)$$

$K = (0;\infty) - \{1\}$.

16) $\log_{\sqrt{16^x - 4^x}} (4^x) \rangle 2$

Podmínky:

$$16^x - 4^x \rangle 0 \wedge 16^x - 4^x \neq 1$$

$$4^x \cdot (4^x - 1) \rangle 0 \wedge 4^x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x \rangle 0 \wedge x \neq \frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log 4}$$

$$x \in (0;\infty) - \left\{\frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log 4}\right\}$$

Řešení:

$A)$

$(0;1)$

$\sqrt{16^x - 4^x} \rangle 0 \wedge \sqrt{16^x - 4^x} \langle 1$

$$x \in \left(0; \frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log 4}\right)$$

$$4^x \langle 16^x - 4^x$$

$$16^x - 2 \cdot 4^x \rangle 0$$

$$4^x \cdot (4^x - 2) \rangle 0$$

$$4^x \rangle 4^{\frac{1}{2}}$$

$$x \rangle \frac{1}{2}$$

$$x \in \left(\frac{1}{2};\infty\right) \wedge \notin \left(0; \frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log 4}\right)$$

$B)$

$\langle 1;\infty)$

$\sqrt{16^x - 4^x} > 1$

$$x \in \left(\frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log 4}; \infty \right)$$

$$4^x > 16^x - 4^x$$
$$16^x - 2 \cdot 4^x < 0$$
$$4^x \cdot (4^x - 2) < 0$$
$$4^x < 4^{\frac{1}{2}}$$
$$x < \frac{1}{2}$$
$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right) \cap \left(\frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log 4}; \infty \right)$$

$$K = \left(\frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log 4}; \frac{1}{2} \right).$$

17) $\log_{\sin x} \cos x > 1$

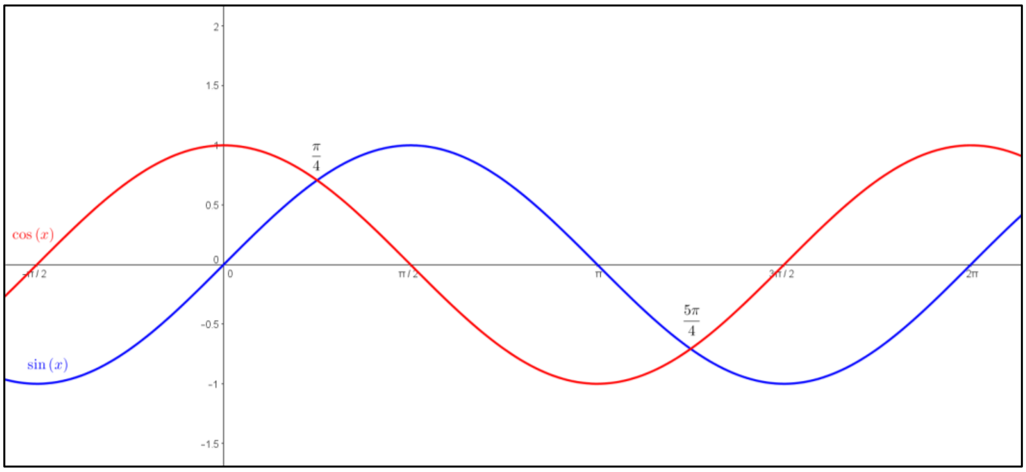
Podmínky:

$$\sin x > 0 \wedge \sin x \neq 1 \wedge \cos x > 0$$
$$x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$
$$x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

Řešení:

Protože je sinus pouze v intervalu $(0;1)$, není nutno řešit základ v intervalu $(1;\infty)$.

$$\cos x \langle \sin x$$



$$x \in \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right) \cap \left(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$

$$\bigcup_{k \in Z}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right).$$

18) $\log_{\sqrt{2}\cdot\sin x} \operatorname{tg} x \rangle 2$

Podmínky:

$$\sin x \rangle 0 \wedge \sqrt{2}\cdot\sin x \neq 1 \wedge \operatorname{tg} x \rangle 0 \wedge \cos x \neq 0$$

$$x \in (2k\pi, \pi+2k\pi) \wedge x \neq \frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi \wedge x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \wedge x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$$

Řešení:

A)

$(0;1)$

$\sqrt{2}\cdot\sin x \rangle 0 \wedge \sqrt{2}\cdot\sin x \langle 1$

$x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$

$$\operatorname{tg} x \langle 2\cdot\sin^2 x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \langle 2\cdot\sin^2 x$$

$$\sin x \langle 2\cdot\sin^2 x\cdot\cos x$$

$$\sin x \langle \sin x\cdot\sin 2x$$

$$\sin x\cdot(\sin 2x - 1) \rangle 0$$

Tento výraz bude v daném intervalu vždy záporný, takže zde nebude řešení.

$B)$

$(1;\infty)$

$\sqrt{2}\cdot\sin\ x\rangle 1$

$x\in\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$$\operatorname{tg}\ x\rangle 2\cdot\sin^2 x$$

$$\frac{\sin\ x}{\cos x}\rangle 2\cdot\sin^2 x$$

$$\sin\ x\rangle 2\cdot\sin^2 x\cdot\cos x$$

$$\sin\ x\rangle\sin\ x\cdot\sin\ 2x$$

$$\sin\ x\cdot(\sin\ 2x-1)\langle 0$$

Tato nerovnost bude v tomto intervalu splněna.

$\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right).$

19) $(\log x)^{2^{(x+1)}}\langle(\log x)^{4^{\left(\frac{x}{2}\right)}}$

Podmínky:

$$\log x\rangle 0$$

$$x\in(1;\infty)$$

Řešení:

$$(\log x)^{2\cdot 2^x}\langle(\log x)^{2^x}$$

Substituce $(\log x)^{2^x}=a$

$$a^2-a\langle 0$$

$$a\cdot(a-1)\langle 0$$

Nulové body	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;\infty)$
a	$-$	$+$	$+$
$a-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\rangle 0\wedge a\langle 1$$

$$(\log x)^{2^x}\rangle 0\wedge(\log x)^{2^x}\langle 1$$

První nerovnost bude vždy splněna.

$$2^x \cdot \log(\log x)\langle \log 1$$
$$2^x \cdot \log(\log x)\langle 0$$
$$\log(\log x)\langle 0$$
$$\log x\langle 1$$
$$x\langle 10$$
$$x \in (-\infty;10) \cap (1;\infty)$$

$K = (1;10)$.

20) $\left(\log_{\log^2 x} x\right)^{\log^3 x} \rangle 0$

Podmínky:

$$\log_{\log^2 x} x\rangle 0 \wedge x\rangle 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 10$$

$A)$

$(0;1)$

$\log^2 x\rangle 0 \wedge \log^2 x\langle 1$

$x \in \left(\frac{1}{10};10\right) - \{1\}$

$$\log_{\log^2 x} x\rangle \log_{\log^2 x} 1$$
$$x\langle 1$$
$$x \in (-\infty;1) \cap \left[\left(\frac{1}{10};10\right) - \{1\}\right]$$
$$x \in \left(\frac{1}{10};1\right)$$

$B)$

$(1;\infty)$

$\log^2 x\rangle 1$

$x \in \left(0;\frac{1}{10}\right) \cup (10;\infty)$

$$\log_{\log^2 x} x\rangle \log_{\log^2 x} 1$$
$$x\rangle 1$$
$$x \in (1;\infty) \cap \left[\left(0;\frac{1}{10}\right) \cup (10;\infty)\right]$$
$$x \in (10;\infty)$$

Získali jsme tedy výslednou podmínku a zároveň i řešení, neboť jde o exponenciálu.

$K = \left(\frac{1}{10};1\right) \cup (10;\infty)$.

2.6 Goniometrické rovnice

1) $\sqrt[10]{\sin x} = \sqrt{\sin x}$

Podmínky:

$$\sin x \geq 0$$
$$x \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$$

Řešení:

$$\sin x = \sin^5 x$$
$$\sin x \cdot \left(\sin^4 x - 1\right) = 0$$
$$\sin x \cdot \left(\sin^2 x - 1\right) \cdot \left(\sin^2 x + 1\right) = 0$$
$$\sin x \cdot \left(\sin x - 1\right) \cdot \left(\sin x + 1\right) \cdot \left(\sin^2 x + 1\right) = 0$$

$A)$

$$\sin x = 0$$
$$x_1 = k\pi$$

$B)$

$$\sin x = 1$$
$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$C)$

$$\sin x = -1$$
$$x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \wedge \notin \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}.$$

2) $\sqrt[4]{1 - \sin^2 x} - \sqrt[5]{\cos^2 x} - \sqrt[10]{\cos x} = -\sin^2 x - \cos^2 x$

Podmínky:

$$\cos x \geq 0$$
$$x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$$

Řešení:

$$\sqrt[4]{\cos^2 x} - \sqrt[5]{\cos^2 x} - \sqrt[10]{\cos x} = -1 \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$\sqrt{\cos x} - \sqrt[5]{\cos^2 x} - \sqrt[10]{\cos x} = -1$$

Substituce $\sqrt[10]{\cos x} = a$

$$a^5 - a^4 - a + 1 = 0$$

$$a^4 \cdot (a-1) - 1 \cdot (a-1) = 0$$

$$(a-1) \cdot \left(a^4 - 1\right) = 0$$

$$(a-1) \cdot \left(a^2 - 1\right) \cdot \left(a^2 + 1\right) = 0$$

$$(a-1) \cdot (a-1) \cdot (a+1) \cdot \left(a^2 + 1\right) = 0$$

$A)$

$$a - 1 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$\sqrt[10]{\cos x} = 1$$

$$\cos x = 1$$

$$x_1 = 2k\pi$$

$B)$

$$a + 1 = 0$$

$$a_2 = -1$$

$$\sqrt[10]{\cos x} = -1$$

$C)$

$$a^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = -1$$

$$\left(\sqrt[10]{\cos x}\right)^2 = -1$$

Druhý a třetí kořen (B, C) nemají řešení.

$$\bigcup_{k \in Z} \{2k\pi\}.$$

3) $2\cdot\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\operatorname{cotg}^3\frac{x}{4}}{2}-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{2}$

Podmínky:

$$\sin\frac{x}{2}\neq 0\wedge\sin\frac{x}{4}\wedge\cos\frac{x}{4}\neq 0$$
$$x\neq 2k\pi\wedge x\neq 4k\pi\wedge x\neq 2\pi+4k\pi$$
$$x\neq 2k\pi$$

Řešení:

Substituce $\dfrac{x}{4}=a$

$$4\cdot\operatorname{cotg}2a=\operatorname{cotg}^3a-\operatorname{tg}a$$
$$4\cdot\left(\frac{\operatorname{cotg}^2a-1}{2\cdot\operatorname{cotg}a}\right)=\operatorname{cotg}^3a-\operatorname{tg}a$$
$$2\cdot\operatorname{cotg}^2a-2=\operatorname{cotg}^4a-1$$

Substituce $\operatorname{cotg}^2a=b$

$$b^2-2b+1=0$$
$$(b-1)^2=0$$
$$b=1$$
$$\operatorname{cotg}^2a=1$$
$$\operatorname{cotg}a=\pm1$$
$$\frac{x}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi$$
$$x_1=\pi+4k\pi$$
$$\frac{x}{4}=\frac{3\pi}{4}+k\pi$$
$$x_2=3\pi+4k\pi$$

$\bigcup\limits_{k\in Z}\{\pi+4k\pi,3\pi+4k\pi\}$.

4) $\dfrac{\operatorname{tg}x-\left(\sqrt{3}\right)^{-1}}{\sin^2x+\cos^2x+\operatorname{tg}x\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{-1}}+\dfrac{\operatorname{cotg}x\cdot\sqrt{3}+(\sin x+\cos x)^2-\sin 2x}{\sqrt{3}-\operatorname{cotg}x}=2$

Podmínky:

$$\cos x\neq 0\wedge\sin x\neq 0\wedge\sqrt{3}-\operatorname{cotg}x\neq 0\wedge\sin^2x+\cos^2x+\operatorname{tg}x\cdot\sqrt{3}^{-1}\neq 0$$
$$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\wedge x\neq k\pi\wedge x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi\wedge\operatorname{tg}x\neq-\sqrt{3}$$
$$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\wedge x\neq k\pi\wedge x\neq\frac{\pi}{6}+k\pi\wedge x\neq\frac{2\pi}{3}+k\pi$$

Řešení:

$$\frac{\operatorname{tg} x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}}+\frac{\operatorname{cotg} x\cdot\sqrt{3}+\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x-2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{3}-\operatorname{cotg} x}=2$$

$$\frac{\operatorname{tg} x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}}+\frac{\operatorname{cotg} x\cdot\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-\operatorname{cotg} x}=2$$

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{cotg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2$$

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=2$$

Substituce $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=a$

$$a+\frac{1}{a}=2$$

$$a^2-2a+1=0$$

$$(a-1)^2=0$$

$$a=1$$

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$x_1=\frac{5\pi}{12}+k\pi$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{5\pi}{12}+k\pi\right\}.$$

5) $$\left[(1-\sin x)\cdot\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+1-\sin x\right]\cdot\left[(1-\sin x)\cdot\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}-1\right)\right]=\sin x-1$$

Podmínky:

$$1-\sin x\neq 0$$

$$\sin x\neq 1$$

$$x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Řešení:

$$\left[(1-\sin x)\cdot\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+1-\sin x\right]\cdot\left[(1-\sin x)\cdot\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}-(1-\sin x)\right]=\sin x-1$$

$$\left[(1-\sin x)\cdot\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right]^2-(1-\sin x)^2=\sin x-1$$

$$(1-\sin x)^2\cdot\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-1+2\cdot\sin x-\sin^2 x=\sin x-1$$

$$(1-\sin x)\cdot(1+\sin x)+\sin x-\sin^2 x=0$$

$$1-\sin^2 x+\sin x-\sin^2 x=0$$

Substituce $\sin x=a$

$$2a^2-a-1=0$$

$$a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{4}$$

$$a_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}$$

$$a_1=1$$

$$a_2=-\frac{1}{2}$$

$$\sin x=1$$

$$x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\sin x=-\frac{1}{2}$$

$$x_{2,3}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi$$

První kořen nevyhovuje podmínkám rovnice.

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right\}.$$

6) $\sin 10x\cdot\cos 10x\cdot\left[\frac{1}{2-\operatorname{cotg}10x}\right]^{-1}+\sin^2 10x=4\cdot\left[\sin\left(\frac{37\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right]\cdot\cos 40x$

Podmínky:

$$\sin 10x\neq 0$$

$$10x\neq k\pi$$

$$x\neq\frac{k\pi}{10}$$

Řešení:

$$\sin 10x\cdot\cos 10x\cdot(2-\operatorname{cotg}10x)+\sin^2 10x=4\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\cos 40x$$

$$\sin 10x\cdot\cos 10x\cdot\left(2-\frac{\cos 10x}{\sin 10x}\right)+\sin^2 10x=4\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]\cdot\cos 40x$$

$$\sin 10x\cdot\cos 10x\cdot\left(\frac{2\cdot\sin 10x-\cos 10x}{\sin 10x}\right)+\sin^2 10x=4\cdot\left[\frac{1}{4}\right]\cdot\cos 40x$$

$$\cos 10x\cdot(2\cdot\sin 10x-\cos 10x)+\sin^2 10x=\cos 40x$$

Substituce $10x=a$

$$\cos a\cdot(2\cdot\sin a-\cos a)+\sin^2 a=\cos 4a$$

$$2\cdot\sin a\cdot\cos a-\cos^2 a+\sin^2 a=\cos 4a$$

$$\sin 2a-\cos 2a=\cos 4a$$

Substituce $2a=b$

$$\sin b-\cos b=\cos 2b$$

$$\sin b-\cos b=\cos^2 b-\sin^2 b$$

$$(\cos b-\sin b)\cdot(\cos b+\sin b)+\cos b-\sin b=0$$

$$(\cos b-\sin b)\cdot(\cos b+\sin b+1)=0$$

$A)$

$$\cos b-\sin b=0$$

$$\cos b=\sin b$$

$$20x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$x_1=\frac{\pi}{80}+\frac{k\pi}{20}$$

$B)$

$$\cos b+\sin b+1=0$$

$$\cos b+\sin b=-1$$

V této fázi je vidět, že řešením budou hodnoty $\pi+2k\pi$ a $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

$$20x=\pi+2k\pi$$

$$x_2=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}$$

$$20x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

$$x_3=\frac{3\pi}{40}+\frac{k\pi}{10}$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{80}+\frac{k\pi}{20},\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10},\frac{3\pi}{40}+\frac{k\pi}{10}\right\}.$$

7) $\cos 10x - \cos 8x + \cos 6x = \sin 10x - \sin 8x + \sin 6x + 2\cdot(\cos x + \sin x)\cdot(\cos x - \sin x) - 1$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$2\cdot\cos\frac{16x}{2}\cdot\cos\frac{4x}{2} - \cos 8x = 2\cdot\sin\frac{16x}{2}\cdot\cos\frac{4x}{2} - \sin 8x + 2\cdot(\cos x + \sin x)\cdot(\cos x - \sin x) - 1$$
$$2\cdot\cos 8x\cdot\cos 2x - \cos 8x = 2\cdot\sin 8x\cdot\cos 2x - \sin 8x + 2\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x) - 1$$
$$\cos 8x\cdot(2\cdot\cos 2x - 1) = \sin 8x\cdot(2\cdot\cos 2x - 1) + 2\cdot\cos 2x - 1$$
$$(2\cdot\cos 2x - 1)\cdot(\cos 8x - \sin 8x - 1) = 0$$

$A)$

$$2\cdot\cos 2x - 1 = 0$$
$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$
$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi$$
$$2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$B)$

$$\cos 8x - \sin 8x - 1 = 0$$
$$\cos 8x - \sin 8x = 1$$

V této fázi je vidět, že řešením budou hodnoty $2k\pi$ a $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

$$8x = 2k\pi$$
$$x_3 = \frac{k\pi}{4}$$
$$8x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$
$$x_4 = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi, \frac{k\pi}{4}, \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}\right\}.$$

8) $\left(\sin\frac{14\pi}{3}\right)^{-1}\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\left[\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right]=\sqrt{\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$2\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\left[2\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2}\right]=\sqrt{\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$2\cdot\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sin x=\sqrt{\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$2\cdot\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sin x=\sqrt{\left(\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right)^2\right)^2}$$

$$2\cdot\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sin x=\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{2}-\frac{1-\cos x}{2}\right)^2}$$

$$2\cdot\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sin x=\sqrt{\cos^2 x}$$

$$\sqrt{\cos^2 x}\cdot(2\cdot\sin x-1)=0$$

A)

$$\sqrt{\cos^2 x}=0$$

$$\cos^2 x=0$$

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

B)

$$2\cdot\sin x-1=0$$

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

$$x_{2,3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}.$$

9)

$$\cos x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} + \sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) \cdot \sin 2x \cdot \left(\operatorname{cotg} x + \sin^{-1} x\right) = \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sqrt{1-\cos^2 x}$$

Podmínky:

$$\sin x \neq 0$$
$$x \neq k\pi$$

Řešení:

$$\cos x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x}\right) = \cos x + 1 - \sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$\cos x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \left(\frac{\cos x + 1}{\sin x}\right) = \cos x + 1 - \sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$\cos x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} + \cos x \cdot (\cos x + 1) = \cos x + 1 - \sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$\sqrt{1-\cos^2 x} \cdot (\cos x + 1) + \cos x \cdot (\cos x + 1) - (\cos x + 1) = 0$$

$$(\cos x + 1) \cdot \left(\sqrt{1-\cos^2 x} + \cos x - 1\right) = 0$$

$A)$

$$\cos x + 1 = 0$$
$$\cos x = -1$$
$$x_1 = \pi + k\pi$$

$B)$

$$\sqrt{1-\cos^2 x} + \cos x - 1 = 0$$
$$\sqrt{\sin^2 x} + \cos x - 1 = 0$$
$$|\sin x| + \cos x = 1$$

V této fázi je vidět, že řešením budou hodnoty $2k\pi$ a $\frac{\pi}{2} + k\pi$. $\pi + k\pi$ a $2k\pi$ však nevyhovují podmínkám, takže je musíme z řešení vyloučit.

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}.$$

10)
$$\left[\sin 7x\cdot\cos 2x-\cos 7x\cdot\sin 2x\right]^2+\left[\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\cos 3x-\sin 2x\cdot\sin 3x-\sin^2 x\cdot\cos 3x\right]^2=1$$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:
$$\left[\sin(7x-2x)\right]^2+\left[\cos^2 x\cdot\cos 3x-\sin 2x\cdot\sin 3x-\sin^2 x\cdot\cos 3x\right]^2=1$$
$$\left[\sin 5x\right]^2+\left[\cos 3x\cdot\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-\sin 2x\cdot\sin 3x\right]^2=1$$
$$\left[\sin 5x\right]^2+\left[\cos 3x\cdot\cos 2x-\sin 2x\cdot\sin 3x\right]^2=1$$
$$\left[\sin 5x\right]^2+\left[\cos(3x+2x)\right]^2=1$$
$$\left[\sin 5x\right]^2+\left[\cos 5x\right]^2=1$$

Tato rovnost bude platit vždy.

$x\in R$.

11) $$\cos x+\cos x\cdot\sin 2x+\sin x+2\sin^2 x\cdot\cos x+\frac{6}{\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=7\cdot\sin x+7\cdot\cos x$$

Podmínky:
$$\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\neq 0$$
$$\sin x+\cos x\neq 0$$
$$\sin x\neq-\cos x$$
$$x\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi,$$

Řešení:
$$\cos x+\cos x\cdot\sin 2x+\sin x+2\sin^2 x\cdot\cos x+\frac{6}{\sin x+\cos x}=7\cdot(\sin x+\cos x)$$
$$\cos x\cdot(1+\sin 2x)+\sin x\cdot(1+2\sin x\cdot\cos x)+\frac{6}{\sin x+\cos x}=7\cdot(\sin x+\cos x)$$
$$\cos x\cdot(1+2\sin x\cdot\cos x)+\sin x\cdot(1+2\sin x\cdot\cos x)+\frac{6}{\sin x+\cos x}=7\cdot(\sin x+\cos x)$$
$$(1+2\sin x\cdot\cos x)\cdot(\cos x+\sin x)+\frac{6}{\sin x+\cos x}=7\cdot(\sin x+\cos x)$$
$$\left(\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x\right)\cdot(\cos x+\sin x)+\frac{6}{\sin x+\cos x}=7\cdot(\sin x+\cos x)$$
$$(\sin x+\cos x)^2\cdot(\cos x+\sin x)+\frac{6}{\sin x+\cos x}=7\cdot(\sin x+\cos x)$$

Substituce $\sin x + \cos x = a$

$$a^3 + \frac{6}{a} = 7a$$
$$a^4 - 7a^2 + 6 = 0$$

Substituce $a^2 = b$

$$b^2 - 7b + 6 = 0$$
$$(b-6)\cdot(b-1) = 0$$
$$b_1 = 6$$
$$b_2 = 1$$
$$a^2 = 6$$
$$a_{1,2} = \pm\sqrt{6}$$
$$\sin x + \cos x = \pm\sqrt{6}$$

Tato rovnost nemůže nikdy nastat, neboť nejvyšší hodnoty, které bude tento výraz dosahovat, bude $\pm\sqrt{2}$ a to v bodě $\frac{\pi}{4} + k\pi$.

$$a^2 = 1$$
$$a_{3,4} = \pm 1$$
$$\sin x + \cos x = \pm 1$$

V této fázi je vidět, že rovnost bude platit pro hodnoty $\frac{k\pi}{2}$.

$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$.

12) $\mathrm{tg}^3\frac{x}{2} + 3\cdot\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{2} = 4\cdot\left[\left(2\cdot\cos^2\frac{x}{4}\right)-1\right]^{-1}\cdot\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\sin^{-1}\frac{x}{2}$

Podmínky:

$$\left(2\cdot\cos^2\frac{x}{4}\right)-1 \neq 0 \wedge \sin\frac{x}{2} \neq 0 \wedge \cos\frac{x}{2} \neq 0$$
$$\cos\frac{x}{4} \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x \neq 2k\pi \wedge x \neq \pi + 2k\pi$$
$$x \neq \pi + 2k\pi \wedge x \neq 2k\pi \wedge x \neq \pi + 2k\pi$$

Řešení:

$$\mathrm{tg}^3\frac{x}{2} + \frac{3}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \frac{4}{\left(2\cdot\cos^2\frac{x}{4}\right)-1}\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$
$$\mathrm{tg}^3\frac{x}{2} + \frac{3}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \frac{4}{\left(2\cdot\cos^2\frac{x}{4}\right)-1}\cdot\sin\frac{x}{2}$$

Substituce $\frac{x}{2} = a$

$$\mathrm{tg}^3 a + \frac{3}{\mathrm{tg}\ a} = \frac{4}{\left(2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\right)^2\right) - 1} \cdot \sin\ a$$

$$\mathrm{tg}^3 a + \frac{3}{\mathrm{tg}\ a} = \frac{4}{\left(2 \cdot \frac{1+\cos a}{2}\right) - 1} \cdot \sin\ a$$

$$\mathrm{tg}^3 a + \frac{3}{\mathrm{tg}\ a} = \frac{4}{1+\cos a - 1} \cdot \sin\ a$$

$$\mathrm{tg}^3 a + \frac{3}{\mathrm{tg}\ a} = 4 \cdot \frac{\sin\ a}{\cos a}$$

$$\mathrm{tg}^3 a + \frac{3}{\mathrm{tg}\ a} = 4 \cdot \mathrm{tg}\ a$$

Substituce $\mathrm{tg}\ a = b$

$$b^3 + \frac{3}{b} = 4b$$

$$b^4 - 4b^2 + 3 = 0$$

$$(b^2 - 3) \cdot (b^2 - 1) = 0$$

$$b^2 = 3$$

$$b_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

$$b^2 = 1$$

$$b_{3,4} = \pm 1$$

$$\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm 1$$
$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$
$$x_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\}.$$

13) $2 \cdot \cos^2 \frac{x}{8} - 2 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin^2 x + 2 \cdot \sin \frac{x}{4} = \sin \frac{x}{2}$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$2 \cdot \cos^2 \frac{x}{8} - 2 \cdot \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) + 2 \cdot \sin \frac{x}{4} = \sin \frac{x}{2}$$
$$2 \cdot \cos^2 \frac{x}{8} - 2 + 2 \cdot \sin \frac{x}{4} = \sin \frac{x}{2}$$

Substituce $\frac{x}{4} = a$

$$2 \cdot \cos^2 \frac{a}{2} - 2 + 2 \cdot \sin a = \sin 2a$$
$$2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}\right)^2 - 2 + 2 \cdot \sin a = \sin 2a$$
$$2 \cdot \frac{1 + \cos a}{2} - 2 + 2 \cdot \sin a = \sin 2a$$
$$\cos a - 1 + 2 \cdot \sin a = \sin 2a$$
$$\cos a - 1 + 2 \cdot \sin a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$
$$2 \cdot \sin a \cdot (\cos a - 1) - \cos a + 1 = 0$$
$$2 \cdot \sin a \cdot (\cos a - 1) - 1 \cdot (\cos a - 1) = 0$$
$$(\cos a - 1) \cdot (2 \cdot \sin a - 1) = 0$$

$A)$

$$\cos a - 1 = 0$$
$$\cos a = 1$$
$$\frac{x}{4} = 2k\pi$$
$$x_1 = 8k\pi$$

$B)$

$$2 \cdot \sin a - 1 = 0$$

$$\sin a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 8k\pi$$

$$\frac{x}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{10\pi}{3} + 8k\pi$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ 8k\pi, \frac{2\pi}{3} + 8k\pi, \frac{10\pi}{3} + 8k\pi \right\}.$$

14) $\sqrt{3} + \cos^2 2x \cdot \left(\operatorname{cotg}^2 2x\right)^{-1} + \left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sin 4x = \sqrt{3} \cdot \sin^2 2x$

Podmínky:

$$\cos^2 2x \neq 0$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Řešení:

Substituce $2x = a$

$$\sqrt{3} + \cos^2 a \cdot \left(\operatorname{cotg}^2 a\right)^{-1} + \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sin 2a = \sqrt{3} \cdot \sin^2 a$$

$$\sqrt{3} \cdot \left(1 - \sin^2 a\right) + \cos^2 a \cdot \left(\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\right) + \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sin 2a = 0$$

$$\sqrt{3} \cdot \cos^2 a + \sin^2 a + \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = 0$$

$$\sqrt{3} + \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\left(-1-\sqrt{3}\right) \cdot \sin a}{\cos a} = 0$$

$$\sqrt{3} + \operatorname{tg}^2 a + \left(-1-\sqrt{3}\right) \cdot \operatorname{tg} a = 0$$

Substituce $\operatorname{tg} a = b$

$$b^2 + \left(-1-\sqrt{3}\right) \cdot b + \sqrt{3} = 0$$

$$(b-1) \cdot \left(b - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$b_1 = 1$$
$$b_2 = \sqrt{3}$$
$$\operatorname{tg} 2x = 1$$
$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$
$$\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$$
$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$
$$x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right\}.$$

15) $\cos^6 x - \left(1 - \cos^2 x\right)^3 = \sin^2 2x + \cos^4 x - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\cos^6 x - \left(\sin^2 x\right)^3 = 4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x$$
$$\cos^6 x - \sin^6 x = \cos^4 x + 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 + \sin^4 x$$
$$\cos^6 x - \sin^6 x = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2$$
$$\cos^6 x - \sin^6 x = 1$$

V této fázi je vidět, že řešením budou hodnoty $k\pi$ a protože je před sinem mínus a je umocněn na sudou mocninu, nikdy nebude roven jedné, takže tento kořen nebudeme řešit.

$$\bigcup_{k \in Z} \{k\pi\}.$$

16) $\sin^6\left(2^{\log_3 \sqrt[6]{9^x}}\right)^3 + \sin^5\left(2^{\log_3 \sqrt[6]{9^x}}\right)^3 - \sin^4\left(5^{x\cdot\log_5 2}\right) - 2\cdot\sin^3\left(2^x\right) - \sin^2\left(2^x\right) + \sin\left(2^x\right) + 1 = 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\sin^6\left(2^{\log_3 3^{\frac{x}{3}}}\right)^3 + \sin^5\left(2^{\log_3 3^{\frac{x}{3}}}\right)^3 - \sin^4\left(5^{\log_5 2^x}\right) - 2\cdot\sin^3\left(2^x\right) - \sin^2\left(2^x\right) + \sin\left(2^x\right) + 1 = 0$$

$$\sin^6\left(2^{\frac{x}{3}}\right)^3 + \sin^5\left(2^{\frac{x}{3}}\right)^3 - \sin^4\left(2^x\right) - 2\cdot\sin^3\left(2^x\right) - \sin^2\left(2^x\right) + \sin\left(2^x\right) + 1 = 0$$

$$\sin^6\left(2^x\right) + \sin^5\left(2^x\right) - \sin^4\left(2^x\right) - 2\cdot\sin^3\left(2^x\right) - \sin^2\left(2^x\right) + \sin\left(2^x\right) + 1 = 0$$

Substituce $\sin\left(2^x\right) = a$

$$a^6 + a^5 - a^4 - 2\cdot a^3 - a^2 + a + 1 = 0$$

Je vidět, že kořenem bude hodnota ± 1.

$$\left(a^6 + a^5 - a^4 - 2\cdot a^3 - a^2 + a + 1\right) \div \left(a^2 - 1\right)$$

Po vydělení polynomu polynomem získáme následující tvar:

$$\left(a^6 + a^5 - a^4 - 2\cdot a^3 - a^2 + a + 1\right) \div \left(a^2 - 1\right) = a^4 + a^3 - a - 1$$

Zde je opět vidět, že kořenem získaného polynomu bude hodnota ± 1.

$$\left(a^4 + a^3 - a - 1\right) \div \left(a^2 - 1\right) = a^2 + a + 1$$

Můžeme tedy rovnici napsat v součinovém tvaru.

$$a^6 + a^5 - a^4 - 2\cdot a^3 - a^2 + a + 1 = \left(a^2 - 1\right)^2 \cdot \left(a^2 + a + 1\right)$$

$$\left(a^2 - 1\right)^2 \cdot \left(a^2 + a + 1\right) = 0$$

$A)$

$$a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 = 1$$

$$a_{1,2} = \pm 1$$

$$\sin\left(2^x\right) = \pm 1$$

$$2^x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Je nutno si uvědomit, že exponenciála bude nabývat pouze kladných hodnot, takže záporné řešení této rovnice nebude možné.

$$x \cdot \log 2 = \log\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$x_1 = \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{\log 2} \wedge k \in Z_0^+$$

$B)$

$$a^2 + a + 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

Diskriminant bude záporný, takže tento kořen nebude řešením.

$$\bigcup_{k \in Z_0^+} \left\{ \frac{\log\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{\log 2} \right\}.$$

17)

$$\frac{(\sin x + \cos x)^{10}}{(1 + \sin 2x)^5} + \left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)^2 - (2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x)^2 = \sin 8x + \frac{2 \cdot \cos 16x}{\cos 8x + \sin 8x} + 1$$

Podmínky:

$$1 + \sin 2x \neq 0 \wedge \cos 8x + \sin 8x \neq 0$$

$$\sin 2x \neq -1 \wedge \sin 8x \neq -\cos 8x$$

$$2x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \wedge 8x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \wedge \frac{3\pi}{32} + \frac{k\pi}{8}$$

Řešení:

$$\frac{(\sin x + \cos x)^{10}}{\left(\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x\right)^5} + \left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)^2 - (2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x)^2 = \sin 8x + \frac{2 \cdot \cos 16x}{\cos 8x + \sin 8x} + 1$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)^{10}}{\left[(\sin x + \cos x)^2\right]^5} + \left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)^2 - (2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x)^2 = \sin 8x + \frac{2 \cdot \cos 16x}{\cos 8x + \sin 8x} + 1$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)^{10}}{(\sin x + \cos x)^{10}} + \left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)^2 - (2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x)^2 = \sin 8x + \frac{2 \cdot \cos 16x}{\cos 8x + \sin 8x} + 1$$

$$1 + \left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)^2 - (2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x)^2 = \sin 8x + \frac{2 \cdot \cos 16x}{\cos 8x + \sin 8x} + 1$$

$$\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)^2 - (2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x)^2 = \sin 8x + \frac{2 \cdot \cos 16x}{\cos 8x + \sin 8x}$$

Substituce $2x = a$

$$\left(\cos^2 a - \sin^2 a\right)^2 - \left(2 \cdot \sin a \cdot \cos a\right)^2 = \sin 4a + \frac{2 \cdot \cos 8a}{\cos 4a + \sin 4a}$$

$$\left(\cos 2a\right)^2 - \left(\sin 2a\right)^2 = \sin 4a + \frac{2 \cdot \cos 8a}{\cos 4a + \sin 4a}$$

Substituce $2a = b$

$$\left(\cos b\right)^2 - \left(\sin b\right)^2 = \sin 2b + \frac{2 \cdot \cos 4b}{\cos 2b + \sin 2b}$$

$$\cos 2b = \sin 2b + \frac{2 \cdot \cos 4b}{\cos 2b + \sin 2b}$$

Substituce $2b = c$

$$\cos c = \sin c + \frac{2 \cdot \cos 2c}{\cos c + \sin c}$$

$$\cos c = \sin c + \frac{2 \cdot \left(\cos^2 c - \sin^2 c\right)}{\cos c + \sin c}$$

$$\cos c = \sin c + \frac{2 \cdot \left(\cos c - \sin c\right) \cdot \left(\cos c + \sin c\right)}{\cos c + \sin c}$$

$$\cos c = \sin c + 2 \cdot \left(\cos c - \sin c\right)$$

$$\cos c - \sin c = 0$$

$$\cos c = \sin c$$

$$8x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{8}$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{8} \right\}.$$

18) $(\sin x)^{2\cdot\sin x} - \sqrt{2}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}\cdot(\sin x)^{\sin x} + (\sin x)^{\sin x}}{2}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Podmínky:

$$\sin x \rangle 0$$
$$x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

Řešení:

Substituce $(\sin x)^{\sin x} = a$

$$a^2 - \sqrt{2}\cdot\left[\frac{a\sqrt{2}+a}{2}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a^2 - \frac{a\sqrt{2}+a}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a^2 - a - \frac{a}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a^2 + \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot a + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$(a-1)\cdot\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$(\sin x)^{\sin x} = 1$$
$$\sin x = 1$$
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$(\sin x)^{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

V této fázi jsou zřejmé dva kořeny a to hodnoty $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$. Pro jiné hodnoty tato rovnost platit nebude.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$
$$x_{2,3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\sin x = \frac{1}{4}$$
$$x_{4,5} = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi, \pi - \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi, \pi-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right\}.$$

19) $\left(\sin^3 x\right)\cdot\left(\sin^3 x\right)^{\left(\cos 2x-2\cdot\sin^2 x\right)}+\left[\sin\left(\frac{41\pi}{6}\right)\right]^{-3}=9\cdot\left(\sin^3 x\right)^{(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)}$

Podmínky:

$$\sin x \rangle 0$$
$$x\in\left(2k\pi, \pi+2k\pi\right)$$

Řešení:

$$\left(\sin^3 x\right)\cdot\left(\sin^3 x\right)^{\left(\cos 2x-2\cdot\sin^2 x\right)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=9\cdot\left(\sin^3 x\right)^{(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)}$$

Substituce $\sin^3 x=a$

$$a\cdot a^{\left(\cos 2x-2\cdot\sin^2 x\right)}+8=9\cdot a^{(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)}$$
$$a^{\left(\cos 2x-2\cdot\sin^2 x+1\right)}+8=9\cdot a^{(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)}$$
$$a^{\left(\cos^2 x-\sin^2 x-2\cdot\sin^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x\right)}+8=9\cdot a^{\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)}$$
$$a^{\left(2\cdot\cos^2 x-2\cdot\sin^2 x\right)}+8=9\cdot a^{\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)}$$
$$a^{2\cdot\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}+8=9\cdot a^{-1\cdot\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}$$
$$a^{2\cdot\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}+8=\frac{9}{a^{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}}$$

Substituce $a^{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}=b$

$$b^2+8=\frac{9}{b}$$
$$b^3+8b-9=0$$

Je vidno, že kořenem bude číslo 1.

$$\left(b^3+8b-9\right)\div(b-1)$$

Po vydělení polynomu polynomem získáme následující tvar:

$$b^3+8b-9=(b-1)\cdot\left(b^2+b+9\right)$$
$$(b-1)\cdot\left(b^2+b+9\right)=0$$

$A)$

$b=1$

$\left(\sin^3 x\right)^{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}=1$

$a)$

$\sin x = 1$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$b)$

$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \cap x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$

$x_{2,3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$B)$

$b^2 + b + 9 = 0$

$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2}$

Diskriminant bude záporný, takže tento kořen nebude řešením.

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\}.$$

20)

$$\left[\left(\sin^2 2x + \cos^4 2x\right)^{2 \cdot \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x - 1}\right]^{4(\sin 5x - \sin 3x - \sin x)} + 2 \cdot \left[\left(\sin^2 2x + \cos^4 2x\right)^{2 \cdot \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x - 1}\right]^{(2 \cdot \sin 5x - 2 \cdot \sin 3x - 2 \cdot \sin x)} = 3$$

Podmínky:

$$\sin^2 2x + \cos^4 2x \rangle 0 \wedge \sin x \neq 0 \wedge \cos x \neq 0$$

$$1 - \cos^2 2x + \cos^4 2x \rangle 0 \wedge x \neq k\pi \wedge \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Substituce $\cos^2 2x = a$

$$a^2 - a + 1 \rangle 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

Diskriminant bude záporný, takže tento výraz bude buď vždy kladný, nebo záporný, ale nikdy nedosáhne nulové hodnoty. Po jednoduchém dosazení lze zjistit, že výraz bude nabývat pouze kladných hodnot.

Řešení:

$$\left[\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{2\cdot 1-1}\right]^{4(\sin 5x-\sin 3x-\sin x)}+2\cdot\left[\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{2\cdot 1-1}\right]^{(2\cdot\sin 5x-2\cdot\sin 3x-2\cdot\sin x)}=3$$

$$\left[\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{1}\right]^{4(\sin 5x-\sin 3x-\sin x)}+2\cdot\left[\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{1}\right]^{(2\cdot\sin 5x-2\cdot\sin 3x-2\cdot\sin x)}=3$$

$$\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{4\cdot(\sin 5x-\sin 3x-\sin x)}+2\cdot\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{2\cdot(\sin 5x-\sin 3x-\sin x)}=3$$

Substituce $\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{2\cdot(\sin 5x-\sin 3x-\sin x)}=a$

$$a^2+2a-3=0$$
$$(a-1)\cdot(a+3)=0$$
$$a_1=1$$
$$a_2=-3$$
$$\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{2\cdot(\sin 5x-\sin 3x-\sin x)}=1$$

Druhý kořen (a_2) nebude možný.

$A)$

$$\sin^2 2x+\cos^4 2x=1$$
$$1-\cos^2 2x+\cos^4 2x=1$$
$$\cos^4 2x-\cos^2 2x=0$$
$$\cos^2 2x\cdot\left(\cos^2 2x-1\right)=0$$

$a)$

$$\cos^2 2x=0$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$

$b)$

$$\cos^2 2x-1=0$$
$$\cos^2 2x=1$$
$$\cos 2x=\pm 1$$
$$2x=k\pi$$
$$x_2=\frac{k\pi}{2}$$

Druhý kořen nevyhovuje podmínkám.

$$B)$$
$$2 \cdot (\sin 5x - \sin 3x - \sin x) = 0$$
$$\sin 5x - \sin 3x - \sin x = 0$$
$$2 \cdot \cos \frac{8x}{2} \cdot \sin \frac{2x}{2} - \sin x = 0$$
$$2 \cdot \cos 4x \cdot \sin x - \sin x = 0$$
$$\sin x \cdot (2 \cdot \cos 4x - 1) = 0$$

$$a)$$
$$\sin x = 0$$
$$x_3 = k\pi$$

Třetí kořen též nevyhovuje podmínkám.

$$b)$$
$$2 \cdot \cos 4x - 1 = 0$$
$$\cos 4x = \frac{1}{2}$$
$$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_4 = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$
$$4x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_5 = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right\}.$$

2.7 Goniometrické nerovnice

1) $\sqrt{\sin x} \rangle \cos x$

Podmínky:

$$\sin x \geq 0$$
$$x \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$$

Řešení:

Vzhledem k tomu, že cosinus je již ve druhém kvadrantu záporný, je nutno najít bod, ve kterém se tyto dvě funkce protnou. Od tohoto bodu bude sinus očividně nabývat větších hodnot.

$$\sqrt{\sin x} = \cos x$$
$$\sin x = \cos^2 x$$
$$\sin x = 1 - \sin^2 x$$

Substituce $\sin x = a$

$$a^2 + a - 1 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$
$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$$
$$a_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618$$

Je zřejmé, že druhý kořen nebude možný, takže správným řešením bude $x = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{1}\right)$. Tyto dvě funkce se tedy protnou právě v tomto bodě a od $\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ do hodnoty π bude $\sqrt{\sin x}$ nabývat větších hodnot, než $\cos x$.

$$\bigcup_{k \in Z} \left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right).$$

2) $(\cos 40x)^{100} \geq 1$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

Jediné, co je nutno si uvědomit je, že jde o sudou mocninu a cosinus bude tedy vždy kladný. Protože cosinus dosahuje pouze hodnot v rozmezí $\langle -1;1 \rangle$, podmínku této nerovnice bude splňovat právě v jednom bodě.

$$\begin{aligned} &\cos 40x = \pm 1 \\ &40x = k\pi \\ &x = \frac{k\pi}{40} \end{aligned}$$

$\bigcup\limits_{k \in Z} \left\{ \frac{k\pi}{40} \right\}.$

3) $\sin^8 2x \rangle \sin^5 2x$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\begin{aligned} &\sin^8 2x - \sin^5 2x \rangle 0 \\ &\sin^5 2x \cdot (\sin^3 2x - 1) \rangle 0 \end{aligned}$$

Výraz $\sin^3 2x - 1$ bude vždy záporný, takže řešíme pouze následující nerovnost:

$$\begin{aligned} &\sin^5 2x \langle 0 \\ &2x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ &x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi \right) \end{aligned}$$

$\bigcup\limits_{k \in Z} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi \right).$

4) $\sin x \rangle \operatorname{tg}^2 x$

Podmínky:

$$\cos^2 x \neq 0$$
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Řešení:

Zde bude nejjednodušší užití grafické metody. Dosazením lze jednoduše zjistit, že tangens bude nejprve nabývat nižších hodnot, takže budeme muset zjistit bod, ve kterém se tyto dvě funkce protínají a zbytek již určíme z grafu.

$$\sin x = \operatorname{tg}^2 x$$
$$\sin x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$\sin x \cdot \cos^2 x = \sin^2 x$$
$$\sin x \cdot \left(\sin x - \cos^2 x\right) = 0$$

$A)$

$$\sin x = 0$$
$$x_1 = k\pi$$

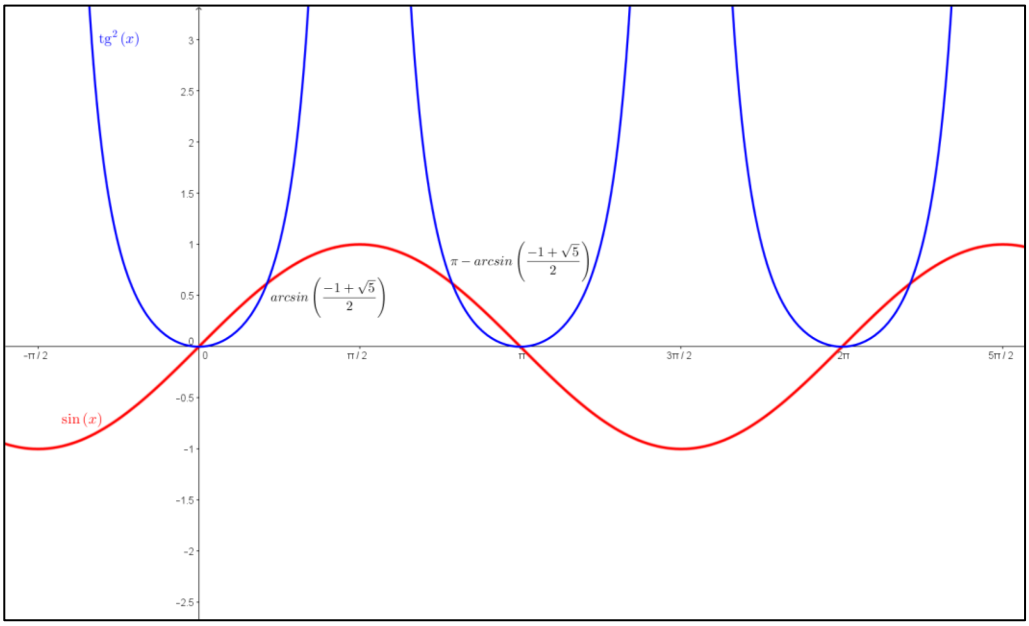
$B)$

$$\sin x - \cos^2 x = 0$$
$$\sin x - 1 + \sin^2 x = 0$$

Substituce $\sin x = a$

$$a^2 + a - 1 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2}$$
$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$$
$$a_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618$$

Je zřejmé, že druhý kořen nebude možný, takže správným řešením bude $\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.



Z grafu je zřejmý výsledek.

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\left(2k\pi, \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+2k\pi\right)\cup\left(\pi-\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+2k\pi, \pi+2k\pi\right)\right\}.$$

5) $\operatorname{cotg}^5 x \rangle |\operatorname{tg} x|$

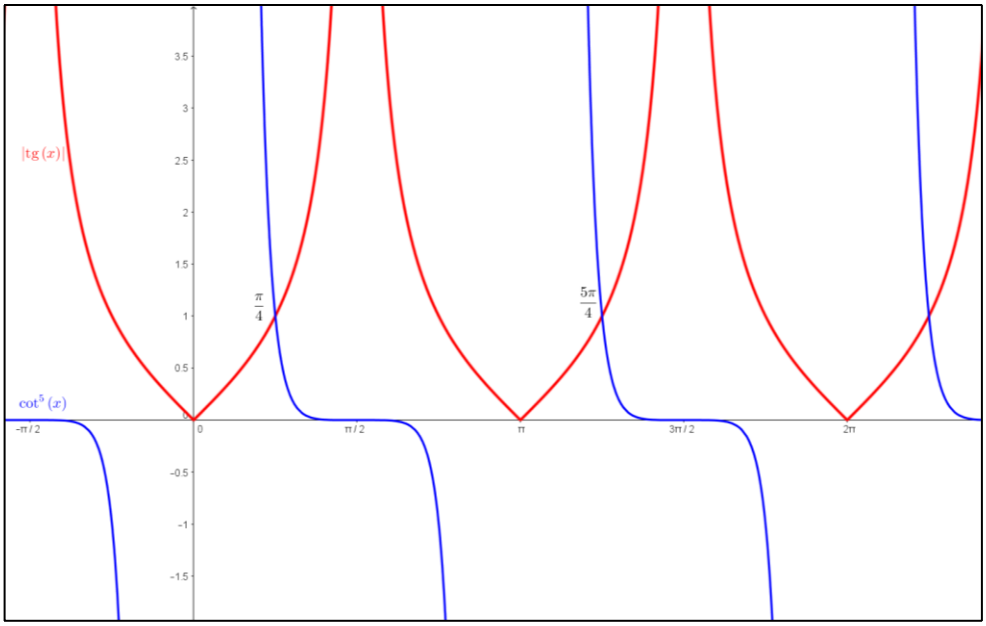
Podmínky:

$$\cos x \neq 0 \wedge \sin^5 x \neq 0$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq k\pi$$

Řešení:

Zde bude nejjednodušší užití grafické metody. Z definice víme, že tyto funkce budou nabývat stejné hodnoty v bodě $\frac{\pi}{4}$.



Z grafu je zřejmý výsledek.

$\bigcup_{k \in Z} \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right)$.

6) $\sin\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \rangle 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

Nutno si uvědomit, že má-li sinus být větší než 0, pak musí platit $\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle 0$.

$$\cos x \rangle \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right).$$

7) $\mathrm{tg}(\sin(\cos x))\geq 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

Aby platilo, že $\mathrm{tg}\, x\geq 0$, tak musí platit $\sin(\cos x)\geq 0$. Aby platila i tato rovnost, musí být $\cos x\geq 0$

$$\cos x\geq 0$$
$$x\in\left\langle-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle$$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\langle-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle.$$

8) $\sin(\sin 2x)-\sin(\cos x)\rangle 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\sin(\sin 2x)\rangle\sin(\cos x)$$

Aby platila tato nerovnost, musí platit $\sin 2x\rangle\cos x$, neboť čím větší výsledek z intervalu $\langle -1;1\rangle$ u argumentu sinu, tím větší hodnotu získáme.

$$\sin 2x\rangle\cos x$$

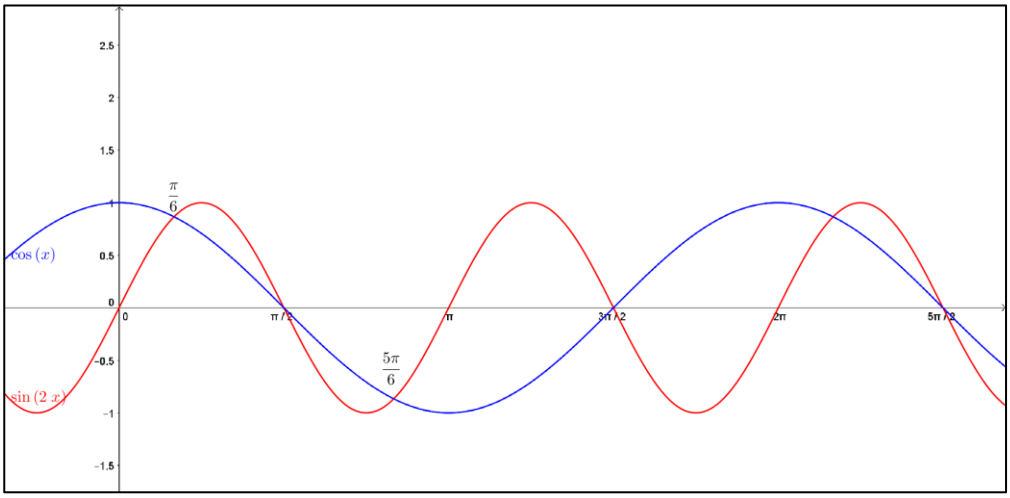
Tato nerovnice bude nejlépe řešitelná graficky. Z grafu určíme intervaly, kdy je $\sin 2x$ větší a spočteme si body, kde se protínají.

$$\sin 2x=\cos x$$
$$2\cdot\sin x\cdot\cos x=\cos x$$
$$\cos x\cdot(2\cdot\sin x-1)=0$$

$A)$

$$\cos x=0$$
$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$B)$$
$$2 \cdot \sin x - 1 = 0$$
$$2 \cdot \sin x = 1$$
$$\sin x = \frac{1}{2}$$
$$x_{2,3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$



Z grafu je zřejmý výsledek.

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) \right\}.$$

9) $\sin x \rangle \sin^2 x \wedge \sin x \rangle \sin \frac{x}{2}$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

Zde bude nejjednodušší užití grafické metody. Druhá mocnina sinu bude růst pomaleji, neboť umocňujeme čísla v intervalu $\langle -1;1 \rangle$ a poloviční argument naopak pomaleji. Je tedy nutné spočítat, kdy se následující funkce protnou.

$$\sin x = \sin \frac{x}{2}$$

Substituce $\frac{x}{2} = a$

$$\sin 2a - \sin a = 0$$
$$2 \cdot \sin a \cdot \cos a - \sin a = 0$$
$$\sin a \cdot (2 \cdot \cos a - 1) = 0$$

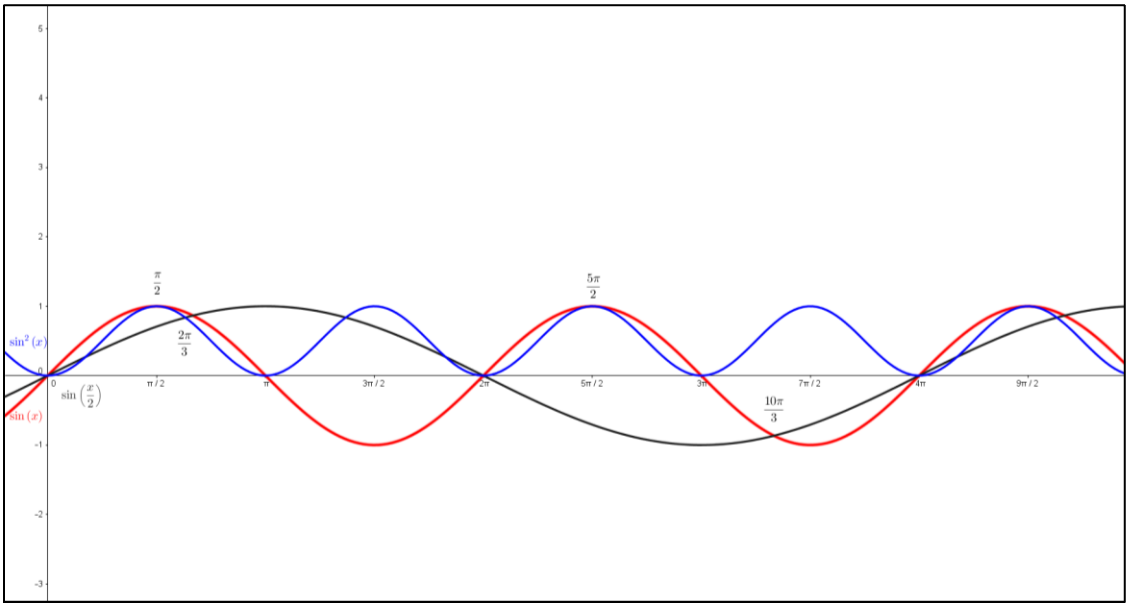
$A)$

$$\sin a = 0$$
$$\frac{x}{2} = k\pi$$
$$x_1 = 2k\pi$$

$B)$

$$2 \cdot \cos a - 1 = 0$$
$$\cos a = \frac{1}{2}$$
$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$$
$$\frac{x}{2} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_3 = \frac{10\pi}{3} + 4k\pi$$

Je zřejmé, že $\sin x$ a $\sin^2 x$ se protnou v hodnotách $k\pi$ a $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.



Z grafu je zřejmý výsledek.

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\left(4k\pi,\frac{2\pi}{3}+4k\pi\right)\cup\left(2\pi+4k\pi,3\pi+4k\pi\right)-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\right\}$$

10) $\sin 2x \rangle \sin x \rangle \dfrac{1}{\sin x}$

Podmínky:

$$\sin x \neq 0$$
$$x \neq k\pi$$

Řešení:

Zde bude nejjednodušší užití grafické metody a je tedy nutno spočítat, kdy se následující grafy protnou.

$A)$

$$\sin 2x = \sin x$$
$$2\cdot\sin x\cdot\cos x-\sin x=0$$
$$\sin x\cdot(2\cdot\cos x-1)=0$$

$a)$

$$\sin x = 0$$
$$x_1 = k\pi$$

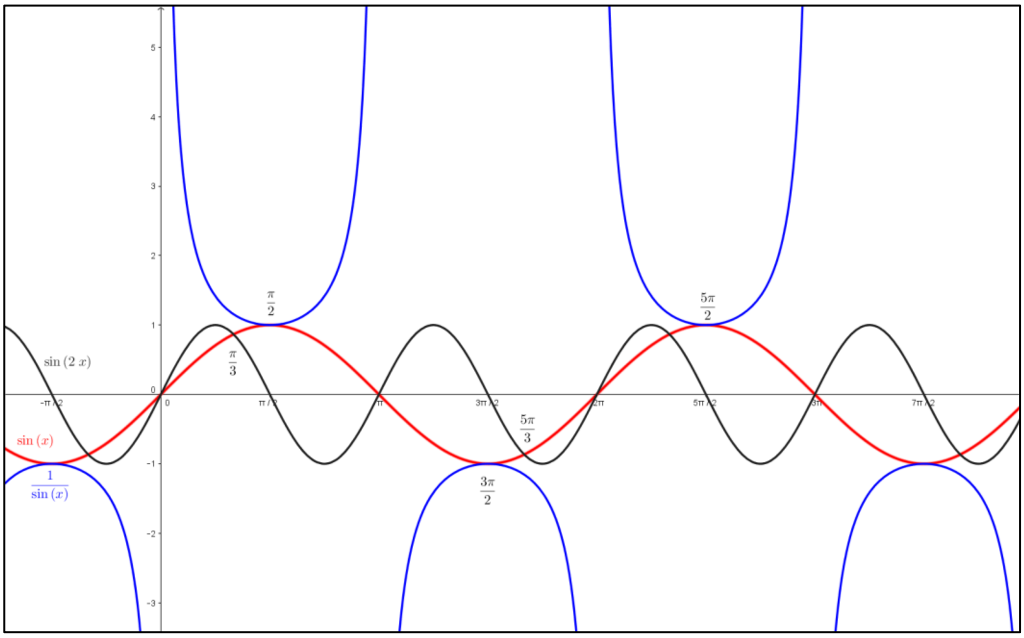
$b)$

$$2\cdot\cos x-1=0$$
$$\cos x=\frac{1}{2}$$
$$x_{2,3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$

$B)$

$$\sin x=\frac{1}{\sin x}$$
$$\sin^2 x=1$$
$$\sin x=\pm 1$$
$$x_4=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Protože ve výrazu $\dfrac{1}{\sin x}$ dělím hodnotami z intervalu $\langle -1;1\rangle$, budeme dostávat pouze hodnoty větší nebo rovno 1, a aby platila nerovnost, musíme se pohybovat v intervalu, kde je tato funkce záporná. Jde o interval $(\pi+2k\pi,2\pi+2k\pi)$.



Z grafu je zřejmý výsledek.

$$\bigcup_{k\in Z}\left(\pi+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right).$$

11) $\left(\cos^2 x-\cos 2x\right)^{-1}+4\cdot\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x\cdot\cos x}\right)^{-1}\rangle\left(\operatorname{cotg}^2 x-1\right)$

Podmínky:

$$\cos^2 x-\cos 2x\wedge\cos x\neq 0\wedge\sin^2 x\neq 0$$

$$x\neq k\pi\wedge x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Řešení:

$$\frac{1}{\cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x}+4\cdot\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x\cdot\cos x}}\right)\rangle\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-1\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}+4\cdot\left(\frac{\sin x\cdot\cos x}{\operatorname{tg} x}\right)\rangle\left(\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}+4\cdot\left(\frac{\sin x\cdot\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}\right)\rangle\left(\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}+4\cdot\left(\frac{\sin x\cdot\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}\right)\rangle\left(\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}+4\cdot\left(\frac{\sin x\cdot\cos^2 x}{\sin x}\right)\rangle\left(\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} + 4 \cdot \cos^2 x \rangle \left(\frac{\cos 2x}{\sin^2 x} \right)$$

$$1 + 4 \cdot \cos^2 x \cdot \sin^2 x \rangle \cos 2x$$

$$1 + \sin^2 2x \rangle \cos 2x$$

Substituce $2x = a$

$$1 + \sin^2 a \rangle \cos a$$

$$1 + 1 - \cos^2 a \rangle \cos a$$

Substituce $\cos a = b$

$$2 - b^2 \rangle b$$

$$0 \rangle b^2 + b - 2$$

$$(b+2) \cdot (b-1) \langle 0$$

Nulové body	$(-\infty;-2)$	$(-2;1)$	$(1;\infty)$
$b+2$	$-$	$+$	$+$
$b-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$b \rangle -2 \wedge b \langle 1$$

$A)$

$$\cos 2x \rangle -2$$

$$x \in R$$

$B)$

$$\cos a \langle 1$$

$$a \in R \wedge \cos a \neq 1$$

$$a \neq 2k\pi$$

$$2x \neq 2k\pi$$

$$x \neq k\pi$$

Řešením budou teda všechna reálná čísla až na podmínky.

$$x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$$

12) $(\mathrm{tg}\ x)\cdot(\sin^2 2x)\cdot(\cos x-1)\cdot(\sin x)\cdot(\mathrm{cotg}\ x)\langle 0$

Podmínky:

$$\sin x\neq 0 \wedge \cos x\neq 0$$

$$x\neq k\pi \wedge x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$$

Řešení:

$$(\sin^2 2x)\cdot(\cos x-1)\cdot(\sin x)\langle 0$$

Je zřejmé, že $\sin^2 2x$ bude vždy kladný, takže řešíme zjednodušenou nerovnost. Je však ještě nutné zjistit, kdy bude $\sin^2 2x$ dosahovat nuly, neboť tyto hodnoty nebudou řešením.

$$\sin^2 2x\neq 0$$

$$2x\neq k\pi$$

$$x\neq \frac{k\pi}{2}$$

$$(\cos x-1)\cdot(\sin x)\langle 0$$

Výraz $\cos x-1$ bude vždy záporný, až na hodnotu $\frac{\pi}{2}+k\pi$, tam bude dosahovat nuly, což naší nerovnosti nevyhovuje. Hledáme tedy interval, kdy je sinus kladný, aby byla nerovnost splněna.

$$\sin x\rangle 0$$

$$x\in(2k\pi,\pi+2k\pi)$$

Nutno však započítat hodnoty $\frac{\pi}{2}+k\pi$, kde bude cosinus nulový a hodnoty $\frac{k\pi}{2}$, kde bude $\sin^2 2x$ nulový a nerovnost nebude platit.

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{(2k\pi,\pi+2k\pi)-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\right\}.$$

13) $\dfrac{|\cos x|\cdot\sqrt{\sin^7 x}}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}-\dfrac{3}{2}\cdot(\sin x)^{\sqrt[3]{\frac{27}{8}}}\rangle-\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\sin x}}$

Podmínky:

$$\sin x\rangle 0\wedge \sin x\neq \pm 1$$

$$x\in(2k\pi,\pi+2k\pi)\wedge x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$$

Řešení:

$$\frac{|\cos x|\cdot\sqrt{\sin^7 x}}{\sqrt{(1-\sin x)\cdot(1+\sin x)}}-\frac{3}{2}\cdot(\sin x)^{\frac{3}{2}}\rangle-\frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin x}}$$

$$\frac{|\cos x|\cdot\sqrt{\sin^7 x}\cdot\sqrt{\sin x}}{\sqrt{(1-\sin^2 x)}}-\frac{3}{2}\cdot(\sin x)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\sin x}\rangle-\frac{1}{2}$$

$$\frac{|\cos x|\cdot(\sin x)^{\frac{7}{2}}\cdot(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\cos^2 x}}-\frac{3}{2}\cdot(\sin x)^{\frac{3}{2}}\cdot(\sin x)^{\frac{1}{2}}\rangle-\frac{1}{2}$$

$$\frac{|\cos x|\cdot(\sin x)^{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}}{|\cos x|}-\frac{3}{2}\cdot(\sin x)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\rangle-\frac{1}{2}$$

$$\sin^4 x-\frac{3}{2}\cdot\sin^2 x\rangle-\frac{1}{2}$$

$$2\cdot\sin^4 x-3\cdot\sin^2 x\rangle-1$$

Substituce $\sin^2 x=a$

$$2a^2-3a+1\rangle 0$$

$$a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{4}$$

$$a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}$$

$$a_{1,2}=\frac{3\pm 1}{4}$$

$$a_1=1$$

$$a_2=\frac{1}{2}$$

$$2\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot(a-1)\rangle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$(1;\infty)$
$a-\frac{1}{2}$	$-$	$+$	$+$
$a-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a\langle\frac{1}{2}\vee a\rangle 1$$

$$A)$$

$$\sin^2 x \langle \frac{1}{2}$$

Substituce $\sin x = c$

$$c^2 \langle \frac{1}{2}$$

$$\left(c - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(c + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \langle 0$$

Nulové body	$\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$
$c + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	$+$	$+$
$c - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$c \rangle -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge c \langle \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x \rangle -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin \langle \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$B)$$

$$\sin^2 x \rangle 1$$

Tato nerovnost nebude nikdy platit, takže nám zbývá pouze udělat průnik našeho prvního výsledku s podmínkami.

$$\left[\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)\right] \cap \left[(2k\pi, \pi + 2k\pi) \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{\left(2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right)\right\}.$$

14) $\cos 3x \rangle \cos x$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\cos 3x - \cos x \rangle 0$$

$$-2 \cdot \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3x-x}{2}\right) \rangle 0$$

$$-2 \cdot \sin 2x \cdot \sin x \rangle 0$$

$$-2 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \rangle 0$$

$$-4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \rangle 0$$

Protože $\sin^2 x$ bude vždy kladný, hledáme pouze interval, kdy je cosinus záporný, aby nerovnost platila.

$$\cos x \langle 0$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

Je však ještě zřejmé, že v tomto intervalu bude nabývat sinus nulové hodnoty, takže jí musíme z výsledku vyloučit.

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) - \{\pi + 2k\pi\} \right\}.$$

15) $\cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x + (\sin x - \cos x) \cdot (\sin x + \cos x) \geq 0$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\cos(3x + x) + (\sin x - \cos x) \cdot (\sin x + \cos x) \geq 0$$

$$\cos 4x + \sin^2 x - \cos^2 x \geq 0$$

$$\cos 4x - (\cos^2 x - \sin^2 x) \geq 0$$

$$\cos 4x - \cos 2x \geq 0$$

Substituce $2x = a$

$$\cos 2a - \cos a \geq 0$$

$$\cos^2 a - \sin^2 a - \cos a \geq 0$$

$$\cos^2 a - (1 - \cos^2 a) - \cos a \geq 0$$

$$\cos^2 a - 1 + \cos^2 a - \cos a \geq 0$$

$$2 \cdot \cos^2 a - \cos a - 1 \geq 0$$

Substituce $\cos a = b$

$$2b^2 - b - 1 \geq 0$$

$$b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -1}}{4}$$

$$b_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$
$$b_1 = 1$$
$$b_2 = -\frac{1}{2}$$
$$2 \cdot (b-1) \cdot \left(b + \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

Nulové body	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$	$(1; \infty)$
$b + \frac{1}{2}$	$-$	$+$	$+$
$b - 1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

Při návratu do substituce je nutné započítat i nulové body.

$$b \leq -\frac{1}{2} \vee b \geq 1$$

$A)$
$$\cos a \leq -\frac{1}{2}$$
$$a \in \left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$$
$$2x \in \left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle$$
$$x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\rangle$$

$B)$
$$\cos a \geq 1$$
$$a = 2k\pi$$
$$2x = 2k\pi$$
$$x = k\pi$$

Výsledky pouze sjednotíme do jednoho intervalu.

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \left\langle \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\rangle + \{k\pi\} \right\}.$$

16) $\sin^{10} x + 2\cdot\sin^{6} x - 2\cdot\sin^{4} x \langle \cos^{2} x + \sin^{2^{3}} x$

Podmínky nejsou žádné.

Řešení:

$$\sin^{10} x + 2\cdot\sin^{6} x - 2\cdot\sin^{4} x \langle \cos^{2} x + \sin^{8} x$$
$$\sin^{10} x - \sin^{8} x + 2\cdot\sin^{6} x - 2\cdot\sin^{4} x \langle 1 - \sin^{2} x$$
$$\sin^{10} x - \sin^{8} x + 2\cdot\sin^{6} x - 2\cdot\sin^{4} x - 1 + \sin^{2} x \langle 0$$
$$\sin^{8} x\cdot\left(\sin^{2} x - 1\right) + 2\cdot\sin^{4} x\cdot\left(\sin^{2} x - 1\right) + \sin^{2} x - 1 \langle 0$$
$$\left(\sin^{2} x - 1\right)\cdot\left(\sin^{8} x + 2\cdot\sin^{4} x + 1\right)\langle 0$$

Výraz $\sin^{2} x - 1$ bude vždy záporný, až na hodnotu $\frac{\pi}{2} + k\pi$, kde bude nulový a nerovnost nebude platit, takže hledáme, kdy druhý výraz bude kladný.

$$\sin^{8} x + 2\cdot\sin^{4} x + 1 \rangle 0$$
$$\left(\sin^{4} x + 1\right)^{2} \rangle 0$$

Je zřejmé, že tento výraz bude vždy kladný a zároveň nikdy nulový, takže nerovnost bude splněna pro všechna reálná čísla až na $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

$x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

17) $\cos 2x \cdot \frac{\left(\sin^{5} x - 1\right)\cdot\left(\sin^{5} x + 1\right)}{\sin x} \rangle 0$

Podmínky:

$$\sin x \neq 0$$
$$x \neq k\pi$$

Řešení:

$$\cos 2x \cdot \frac{\sin^{10} x - 1}{\sin x} \rangle 0$$

Výraz $\sin^{10} x - 1$ bude vždy záporný, až na hodnotu $\frac{\pi}{2} + k\pi$, kde bude nulový a nerovnost nebude splněna. Hledáme tedy taková x, pro která platí:

$$\frac{\cos 2x}{\sin x} \langle 0$$

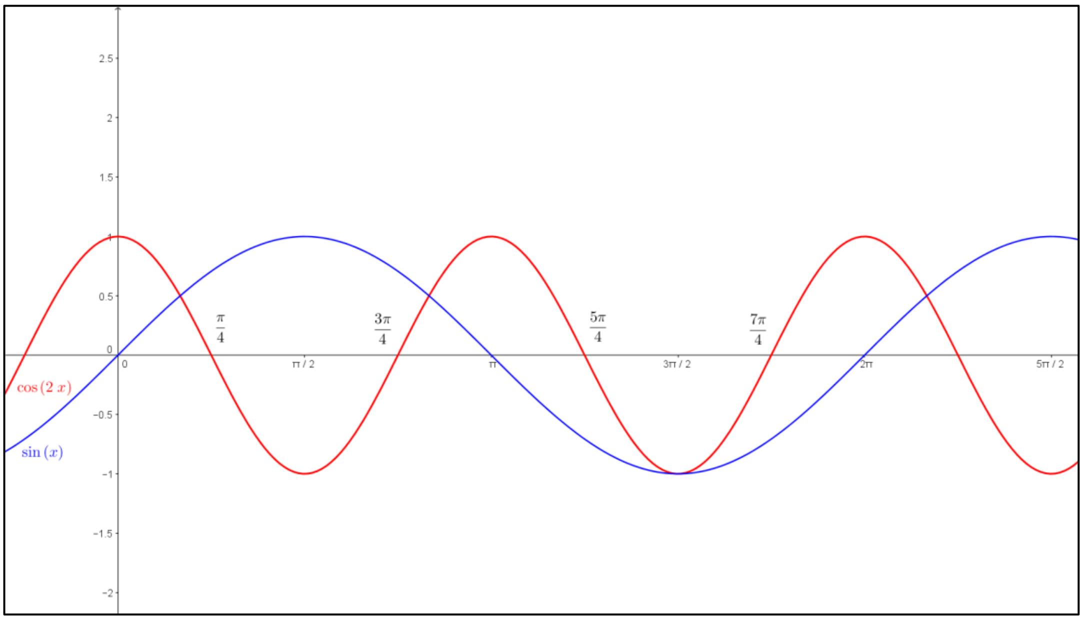
Nejlepší bude použít grafickou metodu. Musíme tedy určit, kdy $\cos 2x$ protne osu x.

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Z grafu určíme intervaly, kde budou obě funkce v odlišných znaménkách, neboť právě tehdy bude výsledek zlomku záporný.



$$\bigcup_{k \in Z}\left\{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right) - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}\right\}.$$

18) $(\sin x)^{\cos x} \geq 1$

Podmínky:

$$\sin x \rangle 0$$

$$x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

Řešení:

$$\log(\sin x)^{\cos x} \geq \log 1$$

$$\cos x \cdot \log(\sin x) \geq 0$$

Výraz $\log(\sin x)$ bude vždy záporný, takže řešíme pouze následující nerovnost

.

$$\cos x \leq 0$$

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$$

Nyní již uděláme pouze průnik řešení s podmínkami.

$$\left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi \right\rangle \cap \left(2k\pi, \pi+2k\pi\right)$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi, \pi+2k\pi \right).$$

19) $\left[\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} \right]^2 \langle \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}$

Podmínky:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \rangle 0 \wedge \cos x \neq 0 \wedge \sin x \neq 0$$

$$\text{tg } x \rangle 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \wedge x \neq k\pi$$

$$x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi \right)$$

Řešení:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^{2 \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} \langle \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}$$

Substituce $\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} = a$

$$a^2 \langle a$$

$$a^2 - a \langle 0$$

$$a \cdot (a-1) \langle 0$$

Nulové body	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;\infty)$
a	$-$	$+$	$+$
$a-1$	$-$	$-$	$+$
Výsledné znaménko	$+$	$-$	$+$

$$a \rangle 0 \wedge a \langle 1$$

$A)$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} \rangle 0$$

Tato nerovnost bude vždy splněna.

$B)$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} \langle 1$$

$$\log\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} \langle \log 1$$

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 \cdot \log\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \langle 0$$

$$(\operatorname{cotg} x)^2 \cdot \log(\operatorname{tg} x) \langle 0$$

Je zřejmé, že pokud tangens bude v intervalu $(0;1)$, bude výsledek logaritmu záporný a vzhledem k tomu, že $(\operatorname{cotg} x)^2$ bude vždy kladný, je i toto naším řešením.

$$\operatorname{tg} x \rangle 0 \wedge \operatorname{tg} x \langle 1$$

$$x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \wedge x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$$

Průnikem těchto dvou intervalů a podmínek získáme konečný výsledek.

$$\left[\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cap \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right] \cap \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\bigcup_{k \in Z}\left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

20) $[\sin x + \cos x]^{\sin x} \rangle 1$

Podmínky:

$$\sin x + \cos x \rangle 0$$

$$\cos x \rangle -\sin x$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Řešení:

V tomto případě je nutno řešení rozdělit na několik intervalů. Tato nerovnost bude platit:

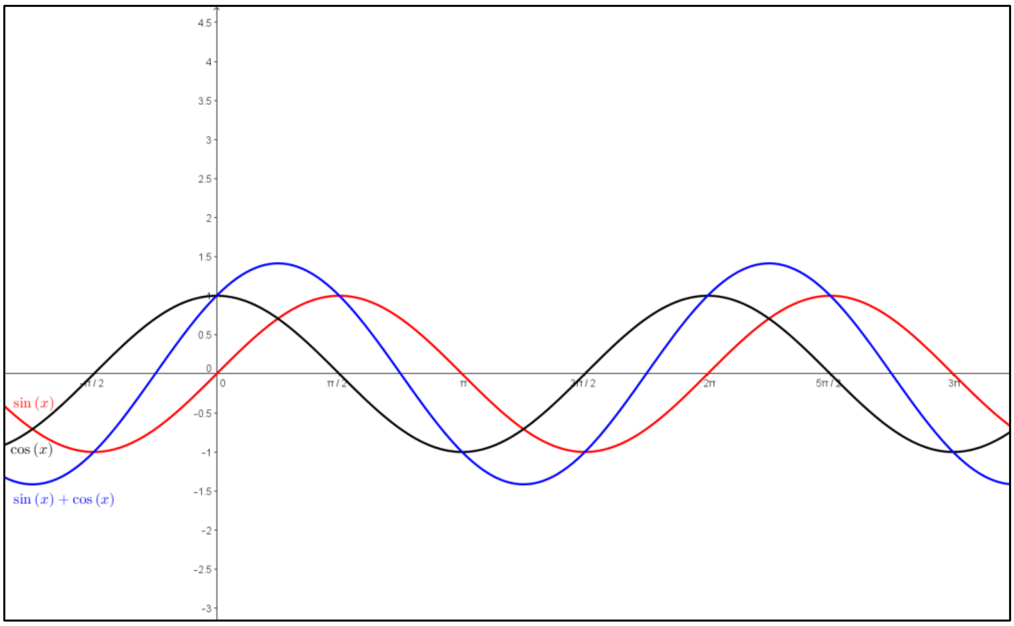
Základ exponentu	Exponent
$(1;\infty)$	$(0;\infty)$
$(0;1)$	$(-\infty;0)$

Je to tedy nutno rozdělit dle těchto kritérií.

$$A)$$

$$\sin x + \cos x \rangle 1$$

Pakliže složíme graf těchto dvou funkcí, bude tam nerovnost krásně vidět.



$$x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

Nyní stačí pouze zjistit, jak se v daném intervalu bude chovat $\sin x$. Funkce $\sin x$ bude v intervalu $\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ nabývat hodnot v rozmezí $(0;1)$, takže je podmínka splněna.

$$B)$$

$$\sin x + \cos x \rangle 0 \wedge \sin x + \cos x \langle 1$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Funkce $\sin x$ bude v intervalu $\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, 2k\pi\right)$ nabývat záporných hodnot, takže nerovnost bude splněna. V intervalu $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$ pak hodnot v rozmezí $\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, takže nerovnost splněna nebude.

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - \{2k\pi\} \right\}.$$

Diskuse

Pro některé je to možná těžko uvěřitelné, ale skutečně existují lidé, kteří matematiku milují. Tak, jako někteří hudebníci milují hudbu, přestože vědí, že se z nich nikdy nestanou druzí Beatles. Tak, jako někteří autoři milují psaní, přestože vědí, že z nich nikdy nebude druhý Hemingway. I já patřím mezi ty, kteří mají matematiku rádi. A protože už mi nestačily příklady, které jsem našel ve sbírkách a matematických knihách, rozhodl jsem se, že si vymyslím příklady vlastní. Pro začátek jsem si vybral problematiku exponenciálních, logaritmických a goniometrických rovnic a nerovnic, kterou jsme ve škole v hodinách matematiky právě probírali. Ke každému tématu jsem vymyslel 20 příkladů a rozhodl se je uspořádat do sbírky s tím, že časem takto zpracuji i další tematické celky středoškolské matematiky.

Zmatek, někdy frustrace. To jsou pocity, které určitě každý z nás prožíval při řešení náročné matematické rovnice. Stojí před vámi problém, který je potřeba vyřešit, ale vůbec netušíte, jak začít. První kroky vás mohou přivést blíže k cíli, ale pokud zvolíte nesprávný postup, mohou vás od něj i oddálit. Aby ta cesta k cíli, byla co nejjednodušší, rozhodl jsem se ke každému příkladu podrobně rozepsat i řešení.

Příklady jsem koncipoval tak, aby při jejich řešení nešlo pouze o mechanický dril, ale ke zdárnému vyřešení je často nutné krom mechanických postupů použít i logickou úvahu. Proto je sbírka určena spíše studentům, kteří se nad daným problémem rádi zamýšlí a hledají i jiné cesty řešení. Přesto si myslím, že tuto sbírku mohou využívat jak studenti k procvičení dané problematiky, tak studenti, kteří se chtějí připravit k maturitě či k přijímacím zkouškám na VŠ a určitě si zde na své přijdou i vysokoškolští studenti. Učitelé mohou příklady z této sbírky využít při tvorbě písemek či samostatných prací, zvolit je jako problémové úlohy do vyučovacích hodin nebo je využít jako náplň do matematického semináře.

Abych měl pro svou práci i zpětnou vazbu, nabídl jsem příklady z této sbírky učitelům matematiky na našem gymnáziu, aby ji mohli ve svých hodinách při výuce matematiky a matematického semináře využít. O cenné rady a připomínky jsem též požádal proděkana pro vzdělávání a vnitřní vztahy Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové, *PhDr. Michala Musílka, Ph.D.*, didaktika katedry matematiky a informatiky a předsedu výboru pobočného spolku Jednoty českých matematiků a fyziků. Jejich postřehy s touto sbírkou uvádím v příloze (příloha B).

Současně se sbírkou jsem vytvořil i webové stránky (www.matematikus.net), kde jsou příklady i s výsledky dostupné v elektronické podobě. Touto formou je možné příklady zpřístupnit většímu množství učitelů a žáků, kteří mají tak možnost své řešení konzultovat s autorem práce či připojit své připomínky a návrhy, které by vedly ke zkvalitnění další autorovy práce.

Závěr

Cíl práce, vytvořit vlastní sbírku originálních příkladů z vybraných celků učiva středoškolské matematiky, byl splněn. Protože neustále roste oblíbenost internetu, jakožto zdroje informací, byly vytvořeny i webové stránky, které tyto příklady zpřístupňují širší veřejnosti a stejně jako tištěná sbírka, by měly posloužit jako doplňkový výukový materiál ke stávajícím gymnaziálním učebnicím.

Sbírku mohou využívat studenti středních škol jako zajímavé úlohy k procvičování dané problematiky, k přípravě na maturitní zkoušku či k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Vysokoškolákům by mohla posloužit jako materiál k procvičení středoškolského učiva a v nespolední řadě ji mohou využít i učitelé k přípravě svých hodin.

Sbírka je studentům i učitelům přístupná jednak v elektronické verzi a díky laskavosti agentury, *We Make Media*, s.r.o., která umožnila tisk a vydání sbírky, i ve formě tištěné.

Jak jsem již zmínil v úvodu, rád bych ve své práci dále pokračoval a vytvořil další sbírku příkladů z vybraných tematických celků učiva středoškolské matematiky. V současné době se věnuji tvorbě příkladů tematicky zaměřených na problematiku limit, diferenciálního a integrálního počtu.

Seznam použité literatury

1. BALADA, Jan. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*: *RVP G*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, c2007, 100 s. ISBN 978-808-7000-113.
2. BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. Vyd. 4., V nakl. Academia 1. (reprint). Praha: Academia, 2006. ISBN 80-200-1448-9.
3. BOČEK, Leo, Jana BOČKOVÁ a Jura CHARVÁT. *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice*. 2. doplněné vydání. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-001-2
4. BRONŠTEJN, I. N. a Konstantin Adoľfovič SEMENDJAJEV. *Príručka matematiky pre inžinierov a pre študujúcich na vysokých školách technických*. 3. vyd. (prekl. 8. rus. vyd.). Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1964. Edícia teoretickej literatúry (Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry).
5. BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-140-X.
6. CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. ISBN 80-7015-444-6.
7. DRÁBEK, Pavel. Zamyšlení nad matematikou. In: *Centrum pro teoretická studia* [online]. Praha: Akademie věd ČR, 2015 [cit. 2016-12-27]. Dostupné z: http://www.cts.cuni.cz/ctvrtecni-seminare/Pavel-Drabek-Zamysleni-nad-matematikou.html
8. Eduard Fuchs - Dag Hrubý. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu na čtyřletém gymnáziu.* 1. vyd. Prometheus, Praha: 2006. ISBN 80-7196-325-9.
9. Eduard Fuchs - Josef Kubát a kol. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
10. Exponenciální rovnice. *Aristoteles.cz* [online]. Praha: Ing. Petr Schuhmeier EduWeb, 2016 [cit. 2016-12-28]. Dostupné z: http://www.aristoteles.cz/matematika/rovnice/exponencialni/exponencialni-rovnice.php
11. FOLTA, Jaroslav. *Dějiny matematiky I*. Praha: Národní technické muzeum, 2004. Práce z dějin techniky a přírodních věd. ISBN 80-239-4031-7.
12. HEJKRLÍK, Pavel. *Matematika: sbírka řešených příkladů: rovnice a nerovnice*. Opava: Nakladatelství SSŠP, 2006. ISBN 80-903861-0-5.
13. JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-807-1963-608.
14. KOVÁČIK, Ján. *Řešené příklady z matematiky pro střední školy: k maturitě : k přijímacím zkouškám na vysokou školu*. Praha: ASPI, 2004. ISBN 80-7357-005-x.
15. ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: funkce*. Praha: Prometheus, c1993. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-85849-09-7.
16. ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: goniometrie*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-000-4.
17. POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2

18. PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 9788071960997.
19. ROBOVÁ, Jarmila. *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-445-2.
20. *Školní vzdělávací program 1. soukromého jazykového gymnázia*. Hradec Králové, 2016.
21. ZUZÁKOVÁ, Jana. *Mocniny a logaritmy ve školské matematice* [online]. Brno, 2014 [cit. 2016-12-27]. Dostupné z: https://www.muni.cz/vyzkum/publikace. Diplomová práce. Masarykova univerzita, přírodovědecká fakulta

Seznam použitých obrázků

1. NEZNÁMÝ. *Logaro.cz* [online]. 2013 [cit. 22.1.2017]. Dostupný na WWW: http://logaro.cz/logaritmicke-pravitko-sberatel/

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Přílohy

Příloha A

Exponenciální rovnice

1) $2^{|x|} + 2^{|x+1|} + 2^{|x-1|} = 7 \qquad K = \{-1;1\}$

2) $2^{\frac{x}{4}+3} - 2^{\frac{x}{4}+1} - 2^3 = 2^{\frac{x}{2}} \qquad K = \{4;8\}$

3) $3 \cdot 6^{4x+1} - 81 \cdot 4^{2x} = 324^{2x} \qquad K = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

4) $3 \cdot 3^{4x^2-4x-21} - \frac{7}{9} \cdot 3^{2x^2-2x-8} = 18 \qquad K = \{-2;3\}$

5) $15^x - 10 \cdot 3^x = 5^{x+\frac{\log 3}{\log 5}} - 30 \qquad K = \left\{1; \frac{1}{\log 5}\right\}$

6) $\left(9+4\sqrt{5}\right)^x + 1 = 6 \cdot \left(9-4\sqrt{5}\right)^x \qquad K = \left\{\frac{\log 2}{\log\left(9+4\sqrt{5}\right)}\right\}$

7) $12 \cdot 81^x - 35 \cdot 36^x + 18 \cdot 16^x = 0 \qquad K = \left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

8) $\sqrt[(x+1)]{\sqrt[(x-1)]{\sqrt[(x^2+x+1)]{3}}} \cdot \sqrt[3\cdot(x^2-1)]{27} = \sqrt[(x+1)]{\sqrt[(x^3-1)]{3}} \cdot \sqrt[(x-1)(x^3+1)]{3} \qquad K = \{0\}$

9) $\frac{4^x-4}{4^x-16} + 4 \cdot \sqrt[3]{\frac{4^x-16}{4^x-4}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{4^x-4}{4^x-16}}$

$K = \left\{\frac{1}{\log 4}; \frac{\log 132 - \log 9}{\log 4}; \frac{\log 124 - \log 7}{\log 4}\right\}$

10) $x \cdot \left[e^{\left(\ln\left(x^2\right)-12+\frac{12}{\ln(x)}\right)}\right]^{\ln(x)} - x^2 \cdot \left[e^{\left(\ln(x)-6+\frac{6}{\ln(x)}\right)}\right]^{\ln(x)} + x = \left[e^{\left(\ln(x)-6+\frac{6}{\ln(x)}\right)}\right]^{\ln(x)}$

$K = \{e; e^2; e^3; e^6\}$

11) $2^{8x} - 8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{7x} + 2^{6x} - 4 \cdot (2^{5x} - 2 \cdot 2^{4x} + 2^{3x}) + 4^{x+1} - 4 \cdot 2^{x+1} + 4 = 0 \qquad K = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$

12) $\frac{4^{\left[\left(2^{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}+6\cdot 2^x-20\right)+1\right]}}{2} + 4^{\left[(4^x+3\cdot 2^x-10)+2\right]} = 18 \qquad K = \{1\}$

13) $9 \cdot x^{\log_8 x} - 8 = 8^{2\cdot\log_8^2 x} \qquad K = \left\{\frac{1}{8};1;8\right\}$

14) $x^{x^2} - \left(\sqrt[4]{x}\right)^x = 0 \qquad K = \left\{\frac{1}{4};1\right\}$

15) $x^{\log^3 x+3} = 10000 \cdot x^3 \qquad K = \left\{\frac{1}{10^{\sqrt{2}}}; 10^{\sqrt{2}}\right\}$

16) $\dfrac{\dfrac{4^x+3^x}{4^x-3^x}-\dfrac{4^x-3^x}{4^x+3^x}}{1+\dfrac{16^x+9^x}{16^x-9^x}}=1 \qquad K=\left\{\dfrac{\log 2}{\log 4-\log 3}\right\}$

17) $x^{\log^2 64^{\left(\frac{\sin x+\cos x}{3}\right)}}=x^{\left[-2\cdot\log 4\cdot\log\left(\frac{1}{2^{(2\sin x+2\cos x)}}\right)-\log^2 4\right]} \qquad \bigcup_{k\in Z_0^+}\left\{1;\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right\}$

18) $\dfrac{4^{\sin^2 x+3}}{2^{2\sin^2 x+3}}-4^{\frac{\log 6}{\log 4}}\cdot\left(4^{2\cdot\cos^2 x}\right)^{2\cdot\sin^2 x}+256^{2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=0 \qquad \bigcup_{k\in Z}\left\{\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}$

19) $3^{\left[3\cdot\log(x+1)+9\cdot\log_{(x+1)}10\right]}+531441\cdot 3^{\left[\left(\log_2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10\right)\right]}=6642\cdot 3^{\left[\log(x+1)+3\cdot\log_{(x+1)}10\right]}$

$K=\{9;999\}$

20) $8^{\log_2\left[\sqrt[3]{4^{2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}}\right]}-\sqrt[3]{8}\cdot 64^{\frac{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{4}+\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}\right)}{3}}=-\sin^2 x-\cos^2 x \qquad \bigcup_{k\in Z}\{4k\pi\}$

Exponenciální nerovnice

1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} \rangle 3^{x+2} + 3^{x+1} \qquad K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$

2) $256^x - 33 \cdot 8^x \rangle -32 \cdot \left(2^x \cdot 8^{-x}\right) \qquad K = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$

3) $\sqrt[|x^2-1|]{\left(\frac{1}{6}\right)^{|x|}} \langle \frac{1}{36} \cdot 216^{-\frac{1}{3}}$

$K = \left(\frac{-1-\sqrt{37}}{6}; -1\right) \cup \left(-1; \frac{1-\sqrt{37}}{6}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{37}}{6}; 1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$

4) $2^{2^{\left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{|2x|}}\right)}} \rangle 4 \qquad K = (-2; 2) - \{0\}$

5) $6^{|x|} + 6^x \langle 12 \quad K = \left(\frac{\log\left(6-\sqrt{35}\right)}{\log 6}; 1\right)$

6) $\frac{1296^x - 2x^2 + x + 216 - 42 \cdot 6^{2x}}{\frac{x}{2} - x^2} \rangle 2 \qquad K = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

7) $\sqrt[3]{3^x - 3} \cdot \sqrt[6]{x^{12}} \cdot \left[x^4 \cdot 3^x - \frac{1}{3^{-x-4}}\right] \langle 0 \quad K = (-\infty; -3) \cup (1; 3)$

8) $7^x \cdot 5^x + \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{20}{7}\right)^x - \frac{9}{2} \cdot 10^x \rangle 0 \qquad K = (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$

9) $5^{x^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \cdot \left(125^{x^{\left(\log_2 \sqrt{2}\right)}} - 4 \cdot 5^{x^{\left(\log_{16} 4\right)}}\right) \rangle 5 \qquad K = \left(\frac{1}{4}; \infty\right)$

10) $x^x \rangle x^{x^x} \quad K = (0; 1)$

11) $1^x + 1^x \geq 2 \quad x \in R$

12) $99^x + 98^{2x} + 97^{3x} \langle 3 \quad K = (-\infty; 0)$

13) $\log_4 (x+3) + \log_{16} (x+3)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x - \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{\log 4}{\log 8}\right)^x \rangle -1 - \log_{64} (x+3)^3 + \log_4 (x+3)^3$

$K = (-3; -1) \cup (1; \infty)$

14) $\left[\frac{\sqrt[3]{512^x} + 32^x}{8^{x+\frac{1}{3}} - 32^{x+\frac{1}{5}}} - \frac{8^x - 32^x}{2 \cdot 8^x + 2 \cdot 32^x} - \frac{32^{2x+\frac{1}{5}}}{32^{2x} - 8^{2x}}\right] \cdot \left[\frac{1}{32^x} - \frac{1}{8^x}\right] \rangle 8^{\sqrt{x+2}+\frac{1}{3}} \qquad K = \langle -2; -1)$

15) $\sqrt{4^x - 2^x} \rangle 2^x - 2 \qquad K = \langle 0; \infty)$

16) $\sqrt{5^x + 16 - 6 \cdot \sqrt{5^x + 7}} + \sqrt{5^x + 11 + \sqrt{16 \cdot 5^x + 16 \cdot 7}} \rangle 5 \qquad K = \left(\frac{\log 2}{\log 5}; \infty\right)$

17) $6^{\left[\left(\sqrt{3} \cdot \log_x (x+1)\right)^2 - \log_{\sqrt[3]{x}} (x+1)\right]} + 6^{\left[\log_x^2 \left(\frac{1}{x+1}\right) - \log_x (x+1)\right]} \rangle \frac{6^{\left[\log_x (x+1) - \log_x^2 (x+1) + 1\right]}}{3} \qquad K = (0; 1) \cup (1; \infty)$

18) $625^{\left[\frac{\log_{x^2}|\log x|^3}{\log_2 4}\right]} - \frac{1}{\left[\sqrt{5}^{\log_{x^2}\frac{1}{|\log x|^3}}\right]^2} \rangle 0 \quad K = \left(\frac{1}{10};1\right) \cup (10;\infty)$

19) $x^{\log\left(x^{x^2}\right)^2} + 10^{100} \rangle 10^{10} \cdot \left(10^{90} + \frac{1}{100^5}\right) \cdot x^{\log\left(x^{x^2}\right)} \quad K = (10;\infty)$

20) $\left[49^{(6-6\cdot\cos 2x)}\right]^{\sin x} - \frac{25 \cdot \left[7^{\left(\cos^2 x + 7\cdot\sin^2 x - \cos 2x\right)}\right]^{\sin x}}{2^{-1}} \rangle -\frac{49}{\left[7^{\left(\sin^{-3}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x\right)}\right]^{\left(1-\cos^2 x\right)}}$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right) \cup \left(\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right)\right\}$$

Logaritmické rovnice

1) $\log_3\left(81^x - 3^{\sqrt[3]{8x^3}+2} + 9\right) = 2x \qquad K = \{0;1\}$

2) $(\log x)\cdot\left(3^{8x} - \left(\log 10^{10}\right)\cdot 9^{\log_4 16^x} + 2\cdot\log_{\sqrt[5]{2}} 2\right) = \dfrac{\log x^{7\cdot\log\sqrt[7]{x}}}{\log x} \qquad K = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

3) $\left(\log_9 x^4\right)\cdot\left(\log_{4x} 3\right) = 1 \qquad K = \{4\}$

4) $\left(\log_{25} x^2 - 1\right)\cdot\log_{\frac{x}{5}} 5\cdot\log_{125x} 125^{\frac{1}{3}} = 1 \qquad K = \left\{\dfrac{1}{25}\right\}$

5) $-4\cdot\log_{\frac{x}{16}} 4\cdot\log_{64x} 4 = 1 \qquad K = \left\{\dfrac{1}{16};4\right\}$

6) $(\log x)^{\log x^2} - 54\cdot(\log x)^{\log x} + 729 = 0 \qquad K = \{1000\}$

7) $\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right]^5 - 6\cdot\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right]^4 - 40\cdot\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right]^3 + 240\cdot\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right]^2 + 144\cdot\left[\left(\ln^3 x^2\right)!\right] = 864$

$K = \left\{\pm\sqrt{e^{\sqrt[3]{2}}};\pm\sqrt{e^{\sqrt[3]{3}}}\right\}$

8) $\left[\left[\left(\log_{x!}(7x!-6)\right)!\right]^2 - \left(\log_{x!}(7x!-6)\right)!\right]^2\Big]! = 24 \qquad K = \{3\}$

9) $\log_{5^x}\left(\dfrac{6\cdot 5^{x+1} - 5^3}{625^x}\right) = -\dfrac{4}{\log_{5^x}\left(6\cdot 5^{x+1} - 5^3\right)} \qquad K = \{1;2\}$

10) $\log^2_{(x-2)}\sqrt{x} + 2\cdot\log\sqrt[4]{10} = \log_{(x-2)}\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{x} \qquad K = \{4\}$

11) $2\cdot\left[8^{-\frac{1}{3}}\left(\log_2^2\left(x^3 + 2x^2 + x\right)\right) + \log_2\left(\dfrac{1}{x^3 + 2x^2 + x}\right)^2\right] = \log_2 16^{-1} \qquad K = \{1\}$

12) $\log_6\left[\log_4\left[\log_2\left(2x^2 - 12x + 16\right) + \log_{\left(2x^2-12x+16\right)} 8\right]\right] = 0 \qquad K = \left\{3\pm\sqrt{2};3\pm\sqrt{5}\right\}$

13) $\log_5\left[\log^5 x - \log_3 9\cdot\log^4 x + (\log x)^{\left(\frac{\log_2 3}{\log_8 3}\right)} + \log x\cdot\log x - \left(\sqrt[3]{4^{\log_2\sqrt{8}}}\right)\cdot\log x + 2\right] = 0$

$K = \left\{\dfrac{1}{10};10\right\}$

14) $\left(\log_{\left[\log_x 50x + (\log x)\cdot\left(x^5 + \log\log x + \frac{3}{2}\right)\right]} 1\right) + \left(\log_{\left[\log_x \log x^4 + \left(2^x\right)^{\log x} - 99\right]} \log 10\right) = 1 \qquad K = \theta$

15) $5\cdot\left[\log^2_{\sin x}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{\frac{2}{5}}} + \log_2\sqrt[5]{16}\right] = \log_{\sin x}\dfrac{1}{64}$

$\bigcup_{k\in Z}\left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$

16) $\log^2_4\left[\cos^2 x\cdot(1 - 2\operatorname{tg} x) - \sin^2 x\right] = \log_4\left[\sqrt[4]{\cos^2 x\cdot(1 - 2\operatorname{tg} x) - \sin^2 x}\right]$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{k\pi, \frac{3\pi}{4}+k\pi, \frac{7\pi}{8}+k\pi\right\}$$

17) $x^{\frac{1}{\log_{x^5}10}}+2\cdot(\log x)^{\log_{\log x}1}=\dfrac{2}{x^{\log\frac{1}{x^3}}}+\left(10^{\log^2 x}\right)^2 \quad K=\left\{10^{\sqrt{\log\sqrt{2}}}\right\}$

18) $\left(\log_{x^2} x^{\log x}\right)^{\log^5(x-3)}=1 \quad K=\{4;100\}$

19) $\left[\log\left(36^x-9\right)+\log_{\frac{1}{10}}\left(6^x+3\right)+x\cdot\log 6\right]^x=1 \quad K=\left\{\dfrac{\log 5}{\log 6}\right\}$

20) $\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[3\cdot\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]}+2\cdot\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[\sqrt{2}\cdot\log\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]^2}-\left[\log_{\log^2(x)-2}(\log x)\right]^{\left[\log^2\left(x-10^{\sqrt{3}}\right)\right]}=2$

$K=\left\{1+10^{\sqrt{3}};100\right\}$

Logaritmické nerovnice

1) $1\rangle \log_{\frac{1}{2}}(\sin x)\rangle 0 \quad \bigcup_{k\in Z}\left\{\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\right\}$

2) $\log_7 x+\log_{\sqrt{x}}\frac{1}{7}\rangle 1 \quad K=\left(\frac{1}{7};1\right)\cup(49;\infty)$

3) $\log_{\frac{1}{3}} x^{-1}+\log_9 x^4\rangle \log_{\sqrt{3}}\sqrt{x} \quad K=(1;\infty)$

4) $\log_{\frac{1}{4}}\log_5\log_2\left(x^2+14x\right)\le 0 \quad K=(-\infty;-16\rangle\cup\langle 2;\infty)$

5) $\log_{x^2-4x} x\rangle 1 \quad K=(2+\sqrt{5};5)$

6) $\log_{\frac{1}{x}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\rangle 1 \quad K=\left(1;\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$

7) $\log_{\log x} x\langle 1 \quad K=(1;10)$

8) $x^3\cdot\log_x(\log x)\ge\log_x(\log x) \quad K=\langle 10;\infty)$

9) $\log_{\log x}\left(\log^3 x-\log x\right)\ge 1 \quad K=\langle 10^{\sqrt{2}};\infty)$

10) $\log_x 5-\log_{\left[\sqrt[4]{x}+10^{\log_{2x}3x}-\log\log x\right]}1\ge 3 \quad K=(1;\sqrt[3]{5}\rangle$

11) $\log_{(x+1)}(x-3)\cdot\left[\log_x(x+1)-\log_x(x-1)\right]\rangle 0 \quad K=(4;\infty)$

12) $\left(\log_{(x+1)^2}|x-5|\right)\cdot\left(\log^2_{(x+1)^2} 7-\log_{(x+1)^2} 7\right)\rangle 0$

$K=\left(-\sqrt{7}-1;-2\right)\cup\left(0;\sqrt{7}-1\right)\cup(4;6)-\{5\}$

13) $\log(\log x-1)+\log(\log x+1)\rangle 1 \quad K=\left(10^{\sqrt{11}};\infty\right)$

14) $\frac{x\cdot\log_3^2 x-2x\cdot\log_3 x-3x}{x^4-5x^2+4}\rangle 0 \quad K=\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup(1;2)\cup(27;\infty)$

15) $\log_{\frac{2^x}{2}}\left(4^{\log x}\right)\rangle 0 \quad K=(0;\infty)-\{1\}$

16) $\log_{\sqrt{16^x-4^x}}\left(4^x\right)\rangle 2 \quad K=\left(\frac{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log 4};\frac{1}{2}\right)$

17) $\log_{\sin x}\cos x\rangle 1 \quad \bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

18) $\log_{\sqrt{2}\cdot\sin x}\operatorname{tg} x\rangle 2 \quad \bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

19) $(\log x)^{2^{(x+1)}}\langle(\log x)^{4^{\left(\frac{x}{2}\right)}} \quad K=(1;10)$

20) $\left(\log_{\log^2 x} x\right)^{\log^3 x}\rangle 0 \quad K=\left(\frac{1}{10};1\right)\cup(10;\infty)$

Goniometrické rovnice

1) $\sqrt[10]{\sin x} = \sqrt{\sin x}$ $\quad \bigcup_{k\in Z}\left\{k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$

2) $\sqrt[4]{1-\sin^2 x} - \sqrt[5]{\cos^2 x} - \sqrt[10]{\cos x} = -\sin^2 x - \cos^2 x$ $\quad \bigcup_{k\in Z}\{2k\pi\}$

3) $2\cdot \operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{cotg}^3 \frac{x}{4}}{2} - \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{2}$ $\quad \bigcup_{k\in Z}\{\pi+4k\pi, 3\pi+4k\pi\}$

4) $\frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}^{-1}}{\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg} x\cdot\sqrt{3}^{-1}} + \frac{\operatorname{cotg} x\cdot\sqrt{3} + (\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x}{\sqrt{3}-\operatorname{cotg} x} = 2$

$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{5\pi}{12}+k\pi\right\}$

5) $\left[(1-\sin x)\cdot\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + 1 - \sin x\right]\cdot\left[(1-\sin x)\cdot\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}-1\right)\right] = \sin x - 1$

$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right\}$

6) $\sin 10x\cdot\cos 10x\cdot\left[\frac{1}{2-\operatorname{cotg} 10x}\right]^{-1} + \sin^2 10x = 4\cdot\left[\sin\left(\frac{37\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right]\cdot\cos 40x$

$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{80}+\frac{k\pi}{20}, \frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}, \frac{3\pi}{40}+\frac{k\pi}{10}\right\}$

7) $\cos 10x - \cos 8x + \cos 6x = \sin 10x - \sin 8x + \sin 6x + 2\cdot(\cos x + \sin x)\cdot(\cos x - \sin x) - 1$

$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{5\pi}{6}+k\pi, \frac{k\pi}{4}, \frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}\right\}$

8) $\left(\sin\frac{14\pi}{3}\right)^{-1}\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}$

$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$

9) $\cos x\cdot\sqrt{1-\cos^2 x} + \sin\left(\frac{13\pi}{6}\right)\cdot\sin 2x\cdot\left(\operatorname{cotg} x + \sin^{-1} x\right) = \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sqrt{1-\cos^2 x}$

$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

10) $[\sin 7x\cdot\cos 2x - \cos 7x\cdot\sin 2x]^2 + \left[(1-\sin^2 x)\cdot\cos 3x - \sin 2x\cdot\sin 3x - \sin^2 x\cdot\cos 3x\right]^2 = 1$
$x\in R$

11) $\cos x+\cos x\cdot\sin 2x+\sin x+2\sin^2 x\cdot\cos x+\dfrac{6}{\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}=7\cdot\sin x+7\cdot\cos x$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$$

12) $\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{2}+3\cdot\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{x}{2}=4\cdot\left[\left(2\cdot\cos^2\dfrac{x}{4}\right)-1\right]^{-1}\cdot\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\cdot\sin^{-1}\dfrac{x}{2}$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right\}$$

13) $2\cdot\cos^2\dfrac{x}{8}-2\cdot\cos^2 x-2\cdot\sin^2 x+2\cdot\sin\dfrac{x}{4}=\sin\dfrac{x}{2}$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{8k\pi,\frac{2\pi}{3}+8k\pi,\frac{10\pi}{3}+8k\pi\right\}$$

14) $\sqrt{3}+\cos^2 2x\cdot\left(\operatorname{cotg}^2 2x\right)^{-1}+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sin 4x=\sqrt{3}\cdot\sin^2 2x$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\right\}$$

15) $\cos^6 x-\left(1-\cos^2 x\right)^3=\sin^2 2x+\cos^4 x-2\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\sin^4 x$

$$\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$$

16) $\sin^6\left(2^{\log_3\sqrt[6]{9^x}}\right)^3+\sin^5\left(2^{\log_3\sqrt[6]{9^x}}\right)^3-\sin^4\left(5^{x\cdot\log_5 2}\right)-2\cdot\sin^3\left(2^x\right)-\sin^2\left(2^x\right)+\sin\left(2^x\right)+1=0$

$$\bigcup_{k\in Z_0^+}\left\{\frac{\log\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{\log 2}\right\}$$

17) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^{10}}{(1+\sin 2x)^5}+\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)^2-\left(2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x\right)^2=\sin 8x+\dfrac{2\cdot\cos 16x}{\cos 8x+\sin 8x}+1$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{8}\right\}$$

18) $(\sin x)^{2\cdot\sin x}-\sqrt{2}\cdot\left[\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sin x)^{\sin x}+(\sin x)^{\sin x}}{2}\right]=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\pi-\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)+2k\pi\right\}$$

19) $\left(\sin^3 x\right)\cdot\left(\sin^3 x\right)^{\left(\cos 2x-2\cdot\sin^2 x\right)}+\left[\sin\left(\frac{41\pi}{6}\right)\right]^{-3}=9\cdot\left(\sin^3 x\right)^{\left(\sin x-\cos x\right)\cdot\left(\sin x+\cos x\right)}$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$$

20) $\left[\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{2\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{cotg} x-1}\right]^{4\left(\sin 5x-\sin 3x-\sin x\right)}+2\cdot\left[\left(\sin^2 2x+\cos^4 2x\right)^{2\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{cotg} x-1}\right]^{\left(2\cdot\sin 5x-2\cdot\sin 3x-2\cdot\sin x\right)}=3$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right\}$$

Goniometrické nerovnice

1) $\sqrt{\sin x} \rangle \cos x$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left(\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+2k\pi, \pi+2k\pi\right)$

2) $(\cos 40x)^{100} \geq 1$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\frac{k\pi}{40}\right\}$

3) $\sin^8 2x \rangle \sin^5 2x$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \pi+k\pi\right)$

4) $\sin x \rangle \operatorname{tg}^2 x$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\left(2k\pi, \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+2k\pi\right)\cup\left(\pi-\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+2k\pi, \pi+2k\pi\right)\right\}$$

5) $\operatorname{cotg}^5 x \rangle |\operatorname{tg} x|$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left(k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$

6) $\sin\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rangle 0$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$

7) $\operatorname{tg}(\sin(\cos x)) \geq 0$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle$

8) $\sin(\sin 2x)-\sin(\cos x)\rangle 0$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\right\}$

9) $\sin x \rangle \sin^2 x \wedge \sin x \rangle \sin\frac{x}{2}$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\left(4k\pi, \frac{2\pi}{3}+4k\pi\right)\cup(2\pi+4k\pi, 3\pi+4k\pi)-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\right\}$$

10) $\sin 2x \rangle \sin x \rangle \frac{1}{\sin x}$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left(\pi+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$

11) $(\cos^2 x-\cos 2x)^{-1}+4\cdot\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x\cdot\cos x}\right)^{-1}\rangle(\operatorname{cotg}^2 x-1)$ $\quad x\in R-\bigcup\limits_{k\in Z}\left\{k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

12) $(\operatorname{tg} x)\cdot(\sin^2 2x)\cdot(\cos x-1)\cdot(\sin x)\cdot(\operatorname{cotg} x)\langle 0$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left\{(2k\pi, \pi+2k\pi)-\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}\right\}$

13) $\frac{|\cos x|\cdot\sqrt{\sin^7 x}}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}-\frac{3}{2}\cdot(\sin x)^{\sqrt[3]{\frac{27}{8}}}\rangle-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\sin x}}$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\left(2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \pi+2k\pi\right)\right\}$$

14) $\cos 3x \rangle \cos x$ $\quad \bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)-\{\pi+2k\pi\}\right\}$

15) $\cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x + (\sin x - \cos x)\cdot(\sin x + \cos x) \geq 0$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\left\langle \frac{\pi}{3}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+k\pi \right\rangle + \{k\pi\}\right\}$$

16) $\sin^{10} x + 2\cdot\sin^6 x - 2\cdot \sin^4 x \langle \cos^2 x + \sin^{2^3} x$ $\quad x \in R - \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

17) $\cos 2x \cdot \frac{(\sin^5 x - 1)\cdot(\sin^5 x+1)}{\sin x} \rangle 0$

$$\bigcup_{k\in Z}\left\{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\cup\left(\pi+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right)-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\right\}$$

18) $(\sin x)^{\cos x} \geq 1$ $\quad \bigcup_{k\in Z}\left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi, \pi+2k\pi\right)$

19) $\left[\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\right]^2 \langle \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}$ $\quad \bigcup_{k\in Z}\left(k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$

20) $[\sin x + \cos x]^{\sin x} \rangle 1$ $\quad \bigcup_{k\in Z}\left\{\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) - \{2k\pi\}\right\}$

Příloha B

Mgr. Marcela Čehová (učitelka M a Fy na PSJG)
Sbírka příkladů obsahuje úlohy typově velmi různorodé, vyžadující využití komplexních matematických znalostí. Tyto úlohy nejsou řešitelné vždy podle algoritmu, při jejich řešení je třeba nad nimi přemýšlet, je třeba logická úvaha. Sbírka je vhodná pro výuku v matematickém semináři či jako problémová úloha pro nadané studenty.

Mgr. Ondřej Hospodka (učitel M a Fy na PSJG)
Na práci Ondřeje Váši je vidět jeho nadšení do matematiky. Vyzdvihl bych především autorovu kreativitu a hlubší pochopení zpracovaného tématu, které překračuje běžné středoškolské požadavky. Příklady nejsou „typové", ale pro jejich vyřešení je často nutná matematická úvaha. Sbírku bych použil v matematickém semináři, nebo jako rozšiřující materiál pro nadané studenty v běžné výuce.

PhDr. Michal Musílek, Ph.D. (proděkan pro vzdělávání a vnitřní vztahy Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové)

Se zájmem jsem si pročetl rukopis práce studenta Prvního soukromého jazykového gymnázia v Hradci Králové Ondřeje Váši, věnovanou některým z náročnějších partií středoškolské matematiky, konkrétně exponenciálním, logaritmickým a goniometrickým rovnicím. Práce je poměrně rozsáhlá a autor v ní publikuje původní zadání a autorská řešení úloh, které mohou sloužit k hlubšímu procvičení daných témat a ověření pochopení a ovládnutí metod řešení složitějších typů rovnic. Z textu práce a z komentovaných řešení lze vyčíst silnou matematickou intuici autora, ovládnutí teoretického formalismu je pak otázkou jeho budoucího vysokoškolského studia. Věřím, že autor bude v započaté cestě pokračovat a že ho budeme moci brzy přivítat jako kolegu a člena naší odborné společnosti.

PhDr. Michal Musílek, Ph.D.

předseda výboru pobočného spolku

Jednota českých matematiků a fyziků, pobočný spolek Hradec Králové, z.s.