Středoškolská technika 2024

Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT

Základy obecné topologie

Helena Boušová

Gymnázium Teplice
Čs. Dobrovolců 530/11, 415 01 Teplice

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor: 1. Matematika a statistika

Základy obecné topologie

Helena Boušová

Teplice 2024

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

ZÁKLADY OBECNÉ TOPOLOGIE

INTRODUCTION TO GENERAL TOPOLOGY

AUTOR	Helena Boušová
ŠKOLA	Gymnázium Teplice
KRAJ	Ústecký
ŠKOLITEL	RNDr. Veronika Pitrová, Ph.D. PhDr. Magdalena Krátká, Ph.D.
OBOR	1. Matematika a statistika

Teplice 2024

Prohlášení

Prohlašuji, že svou práci na téma *Základy obecné topologie* jsem vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Veroniky Pitrové, Ph.D. a PhDr. Magdaleny Krátké, Ph.D. a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Dále prohlašuji, že tištěná i elektronická verze práce SOČ jsou shodné a nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a změně některých zákonů (autorský zákon) v platném změní.

V Teplicích dne: ______________________ ______________________

Helena Boušová

Poděkování

Za veškerý jejich čas, pomoc, podnětné rady a entuziastický přístup děkuji svým skvělým vedoucím, RNDr. Veronice Pitrové, Ph.D. a PhDr. Magdaleně Krátké, Ph.D. Za počáteční pomoc se softwarem děkuji Tadeáši Jirákovi. Nakonec děkuji všem čtenářům.

Anotace

Cílem této práce bylo osvojit si základy moderní matematické disciplíny zvané obecná topologie a skrze tento text předat tyto poznatky dalším čtenářům. Je určena všem začátečníkům v tomto oboru a měla by dokázat, že toto téma může být přístupné i zájemcům z řad středoškoláků.

Klíčová slova

topologie, topologický prostor, množina, spojité zobrazení, homeomorfismus

Annotation

The aim of this work was to learn the basics of the modern branch of mathematics called general topology and pass this knowledge to other readers via this text. It is intended to all beginners in this field and it shall prove that this topic may be accessible to interested high schoolers.

Keywords

topology, topological space, set, continuous mapping, homeomorphism

Obsah

Předmluva

Tato práce má za cíl čtenáři představit matematický obor zvaný topologie a dovést ho k osvojení základních konceptů topologie obecné, neboli množinové.

Je určena úplným začátečníkům v této disciplíně a jedinými prerekvizitami je znalost elementárních množinových operací (průnik, sjednocení, doplněk, rozdíl) a vlastností funkcí. Psaná je formou srozumitelnou všem středoškolákům zajímajících se o matematiku. Jako studijní materiál je tak vhodná pro každého, kdo by měl chuť se s tímto úžasným oborem seznámit.

Práce obsahuje četná cvičení a úlohy, jejichž účelem je pomoci čtenáři s pochopením topologických konceptů a ověřením nově nabytých znalostní. Cvičení jsou zpravidla jednoduchá na vyřešení a slouží ke snadnějšímu pochopení definic, případně doplnění znalostí. Úlohy jsou o něco náročnější, nicméně jsou výborným prostředkem k hlubšímu porozumění představovaných pojmů a nácviku psaní důkazů, jež jsou nezbytnou součástí čisté matematiky. Pro ověření správnosti uvažování jsou pro čtenáře na konci jednotlivých kapitol uvedena autorská řešení veškerých úloh a cvičení. Vybrané koncepty navíc ilustrují obrázky.

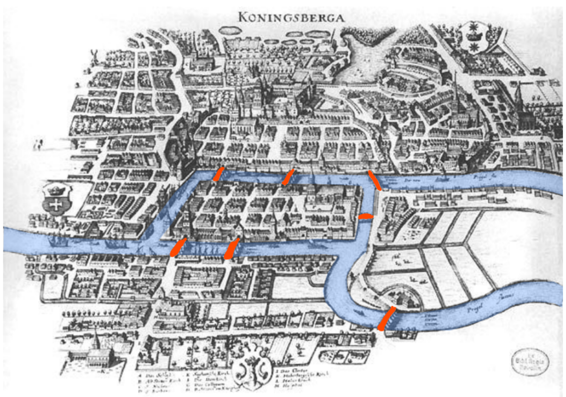
Definice a některé věty byly převzaty převážně z knih *Topology Without Tears* od Sidney A. Morrise a *General Topology* od Ryszarda Engelkinga, úlohy jsou z druhé uvedené knihy. Cvičení byla navržena pro účely této práce a obrázky byly vytvořené pomocí programů Autodesk Fusion 360, SketchBook a GeoGebra, není-li uveden jiný zdroj. Práce byla napsána pomocí systému LaTeX.

Úvod

Topologie je jedna z nejdůležitějších oblastí čisté matematiky. Původně vycházela z geometrie a zábývá se takovými vlastnostmi, které nezávisí na vzdálenostech, úhlech nebo přesném tvaru matematických objektů. Ačkoliv se jedná o axiomatickou disciplínu, tedy teorii odvozenou z určitých axiomů, našla topologie uplatnění v mnoha dalších oblastech lidské činnosti.

0.1 Historie topologie

Za vůbec první topologický výsledek je považováno řešení problému sedmi mostů města Královce, dnes slavné matematické hádanky. Obyvatelé tohoto tehdy pruského města si čas krátili zajímavým způsobem - snažili se najít takovou vycházkovou trasu, při které by přes každý ze sedmi mostů přešli právě jednou. Ať už však zvolili jakoukoliv cestu, nikomu z nich se to nepodařilo.



Obrázek 1: Sedm mostů města Královce [1]

Vysvětlení tohoto fenoménu podal v roce 1736 geniální švýcarský matematik Leonhard Euler.

Ačkoliv se mu problém zprvu jevil jako geometrický, Euler si brzy všimnul, že řešení nezávisí na obvyklých geometrických vlastnostech jako jsou délky mostů nebo vzdálenosti mezi nimi. Podstatné byly pouze relativní polohy mostů a to, které části města spojovaly. Dokázal, že aby šlo mosty přejít požadovaným způsobem, musel by nejvýše ze dvou břehů vést lichý počet mostů, což, jak se můžeme sami přesvědčit, pro sedm mostů v Královci neplatí [2].

Toto novátorské řešení však nebylo jediným Eulerovým příspěvkem topologii.

V roce 1750 objevil vztah, který je dnes považován za jeden z nejkrásnějších matematických vzorců [3]. Stejně jako již velcí matematici starověkého Řecka se zabýval mohostěny, avšak všiml si něčeho, co patrně všem jeho předchůdcům uniklo. Objevil vztah mezi vrcholy V, hranami E a stěnami F, který platí pro všechny konvexní mnohostěny [2].

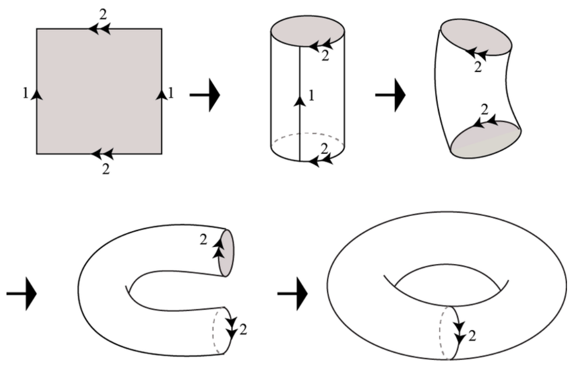
$$V - E + F = 2$$

Tento ztah byl později zobecněn do n dimenzí a je jedním ze základních invariantů v algebraické topologii, známý pod názvem Eulerova charakteristika.

Euler pro topologii používal název *geometria situs*, neboli geometrie polohy, později byl používán název *analysis situs* [2]. Slovo topologie bylo poprvé použito v knize Johanna Benedicta Listinga *Vorstudien zur Topologie*, tento název se však neujal ihned [4].

V roce 1872 přednesl Felix Klein přednášku nazvanou Erlangenský program, ve které mimo jiné definoval topologii jakožto studium vlastností neměnících se při spojitých transformacích [5].

Mimoto byly v této době zkoumány dvojrozměrné plochy. August Möbius a Listing objevili Möbiovu pásku, plochu která má pouze jednu stranu a Felix Klein objevil Kleinovu lahev. Klein rovněž vymyslel metodu konstrukce takových ploch, která spočívala v „lepení“ stran mnohoúhelníků. U mnohoúhelníku bylo vždy dáno, které dvojice stran a s jakou orientací se slepí, přičemž



Obrázek 2: Konstrukce toru ze čtverce [6]

aby k lepení mohlo dojít, mohl se mnohoúhelník libovolně natahovat. Na obrázku 2 vidíme jednu takovou konstrukci toru ze čtverce [2].

Roku 1874 založil Georg Cantor teorii množin, na které je postavena moderní topologie [7]. Definoval také několik pojmů, jimiž se zabývá kapitola 2, avšak poněkud odlišným způsobem, neboť ještě neexistoval pro nás zcela zásadní pojem topologického prostoru [8].

Pevné základy topologie algebraické položil v roce 1895 Henri Poincaré, když definoval pojmy jako je homotopie nebo spojitá deformace [9].[1]

V roce 1906 zavedl Maurice Fréchet metrický prostor, což je jakákoliv množina, na které je definovaná vzdálenost [10].

Na Fréchetovu práci navázal Felix Hausdorff, když roku 1914 definoval ještě obecnější strukturu, které dnes říkáme Hausdorffův prostor. K jejich definici využil otevřených množin, stejně jako tomu je u dnešních topologických prostorů, ty jsou však ještě o něco obecnější.[2]

V následujících letech se matematici předháněli v různých definicích topologických a jim podobných prostorů. Polský matematik Kazimierz Kuratowski přišel v roce 1922 s definicí pomocí uzávěrů množin, která je ekvivalentní s tou dnešní, další přišli s axiomy stavících na otevřených množinách, které se však od nynější mírně lišily.

[1]Poincaré je rovněž autorem slavné topologické úlohy zvané Poincarého domněnka, jednoho ze sedmi problémů tisíciletí.

[2]Více se o Hausdorffově prostoru dočtete v části 3.3.3.

Nakonec se ustálila definice, kterou prvně publikovali Nicolas Bourbaki[3] a John L. Kelley v letech 1940, resp. 1955, a vy ji najdete v kapitole 1 [8].

V současnosti je topologie velmi aktivní a perspektivní oblastí výzkumu, jak se můžete sami přesvědčit v následující části.

0.2 Aplikace topologie

Topologie je věda hojně využívaná v dalších oborech. Její metody se používají jak v odlišných oblastech matematiky, tak v četných jiných disciplínách, a to zejména přírodovědných, technických a informatických.

V této sekci bychom rádi demonstrovali užitečnost topologie v rozličných nematematických disciplínách. Nejedná se o vyčerpávající seznam, spíše o několik příkladů, na které autorka v průběhu psaní práce narazila a které ji zaujaly. Jednotlivé aplikace jsou kategorizované podle oborů, do kterých primárně spadají.

Astrofyzika

Topologie se svojí povahou skvěle hodí ke studiu časoprostoru a struktury vesmíru, především jejích globálních aspektů. K průkopníkům topologických metod ve zkoumání časoprostoru patřil již v 70. letech například Stephen Hawking. Ten prohlásil, že jediné vlastnosti prostoročasu, které jsou z fyzikálního hlediska významné jsou ty, které jsou stabilní ve vhodné topologii. Nalezení vhodné topologie[4] k modelování vesmíru je však nelehký úkol, a ač byly v této oblasti učiněny pokroky, perfektní model zatím nemáme [11].

Od 80. let byla topologie využívána v kvantové teorii pole, což vedlo ke vzniku topologické kvantové teorie pole [12] a dále také k topologickému popisu strun v teorii strun [13].

[3] Pseudonym skupiny francouzských matematiků.

[4] O zavádění topologií na množinu se lze dočíst v kapitole 1.

Fyzika

Od vysvětlení jednoho zvláštního fyzikálního jevu v kvantové mechanice k objevu zcela nových materiálů a Nobelově ceně – tak by se dal shrnout vývoj jedné aplikace topologie do fyziky.

Oním záhadným jevem je zlomkový kvantový Hallův jev. Nebudeme zabředávat do detailů, pro zájemce však nastíníme, o co se jedná: k tomuto jevu dochází pouze ve dvourozměrném prostoru (jakým může být například povrch nějakého materiálu) a týká se skupin elektronů, které se díky vystavení silnému magnetickému poli chovají jako částice jediná. Tyto částice pak vykazují náboj, který se dá vyjádřit zlomkem elementárního náboje. Zlomek je pak podílem počtu elektronů a počtu kvant magnetického toku [14].

Jev byl vysvětlen za použití topologie – už onen zlomek vyjadřující náboj elektronů totiž souvisí s jedním topologickým invariantem (vlastností). Tento objev následně vedl k objevu celé řady tzv. topologických stavů hmoty. K jejich popisu je potřeba spousta topologie, chovají se totiž přesně jako topologické prostory (kterým se budeme věnovat v hlavní části práce) – jejich vlastnosti nezávisí na jejich geometrii, což je dělá velmi stabilní, neboť nejsou náchylné k vnějším vlivům či menším vadám v materiálu. Za teoretický objev topologických stavů hmoty a přechodů mezi nimi byla v roce 2016 udělena Nobelova cena [15].

Jednou skupinou takových materiálů jsou tzv. topologické izolanty, prvně vyrobeny v roce 2007. Jejich název je poněkud nešťastný, neboť jejich potenciál tkví právě v jejich vodivých vlastnostech. Ač izolující uvnitř, povrch topologických izolantů je vodivý a proud může vést dokonce bez odporu – jedná se tedy o supravodiče [16]. Výhodou je i jejich odolnost vůči drobným defektům či například hluku. V současné době probíhá mnoho výzkumu směřujího k tomu, aby topologické izolanty mohly sloužit pro efektivnější přenos energie v elektronických zařízeních a mnozí doufají, že se jednou stanou základem kvantových počítačů [17].

S těmi souvisí ještě jeden objev, objev částic, které byly v roce 1982 pojmenované jako anyony. Anyony jsou částice, které nejsou ani fermiony, ani bosony a vyskytují se pouze ve dvourozměrném prostoru. Jestliže Vám to něco připomíná, máte pravdu – anyony jsou totiž ony částice, které způsobují zlomkový kvantový Hallův efekt. Pokud jsou anyony ve skupině, mají zajímavou vlastnost: „pamatují“ si, jak se jeden kolem druhého pohybovaly, a jejich trajektorie tak vytváří jakési copánky nebo uzly. V matematice takové objekty studuje teorie uzlů – což jen jedna ze součástí topologie. Uzly mohou být velmi komplikované a nést tak v sobě mnoho informací. Toho by se dalo využít právě pro uchovávání informací v počítačích a ke kvantovému počítání. Tohoto nápadu se již ujaly některé velké technologické firmy [18].

Chemie

O syntézu nových materiálů za užití poznatků z topologie se snaží rovněž chemici. Syntezovali například molekuly, které normálně tvoří jakoby prstencovou strukturu a upravili je do tvaru Möbiovy pásky. Zjistili, že takové molekuly se vymykají běžným pravidlům aromaticity – látky, které by měli být aromatické jsou antiaromatické a naopak. Tomuto zvláštnímu typu aromaticity se říká Möbiova aromaticita [19].

Další využití topologie v chemii se týká polymerů. Polymery jsou dlouhé molekulové řetězce, které se mohou různě větvit, cyklit a zamotávat, což ovlivňuje jejich vlastnosti a interakci s ostatními molekulami. Jejich topologickou strukturu a její vliv na vlastnosti polymerů se dají zkoumat pomocí topologické geometrie, teorie uzlů či teorie grafů [20].

Biologie

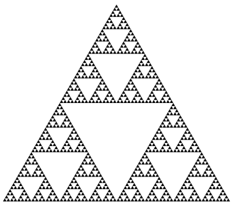
Biologickou strukturou chovající se jako topologický prostor je například DNA. Topologie poskytuje lepší vhled například na mechanismy reakcí DNA s proteiny, což je důležité, neboť na reakcích s proteiny zavisí všechny funkce DNA. Sama o sobě je DNA polymerem a biologové ji tak mohou zkoumat podobně, jako to dělají chemici [21].

Kapitola 1

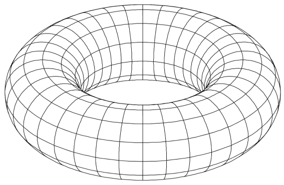
Topologické prostory

Jádrem studia topologie jsou takzvané topologické prostory. Topologický prostor je záměrně definován jako velmi obecná struktura, která tak úplně neodpovídá naší běžné představě o prostoru. Vznikl jako zobecnění prostoru metrického. Obecnost tohoto pojmu umožňuje, že může být aplikován na široké spektrum objektů, což je pro matematiky více než žádoucí. Díky tomu není třeba zkoumat každý jednotlivý objekt zvlášť, ale dozvíme se něco o spoustě z nich najednou.

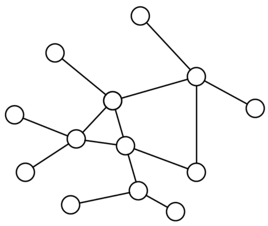
Topologickým prostorem mohou být jak celé n-rozměrné prostory, tak jednotlivé geometrické objekty, fraktály, grafy (z teorie grafů) nebo třeba číselné množiny, jakou je například množina reálných čísel.



Obrázek 1.1: Sierpińského trojúhelník [22]



Obrázek 1.2: Torus [23]



Obrázek 1.3: Graf

1.1 Topologie na množině

Topologickým prostorem může být v podstatě jakákoliv neprázdná množina. Abychom však určitou množinu mohli označit za topologický prostor, musíme na ní nejprve definovat topologii. To znamená, že ke každé množině přiřadíme ještě jednu množinu, které budeme říkat topologie a jež o naší množině ponese další informace. Množiny můžeme zkoumat právě díky zavedení topologie.

Topologie je složena pouze z podmnožin naší množiny. Tyto podmnožiny musí splňovat určitá pravidla, axiomy, které jsou shrnuty do následující definice.

Definice 1.1.1. Mějme neprázdnou množinu X a systém jejích podmnožin τ. Pak τ je *topologií* na množině X, pokud platí:

(i) X a $\emptyset$ jsou prvky τ,

(ii) sjednocení libovolného počtu prvků τ je prvkem τ,

(iii) průnik libovolného konečného počtu prvků τ je prvkem τ.

Dvojici (X, τ) pak nazveme *topologickým prostorem.*

Všimněme si, že na jedné množině může existovat vícero různých topologií. Několika speciálními a často používanými topologiemi se zabývají pozdější části této kapitoly.

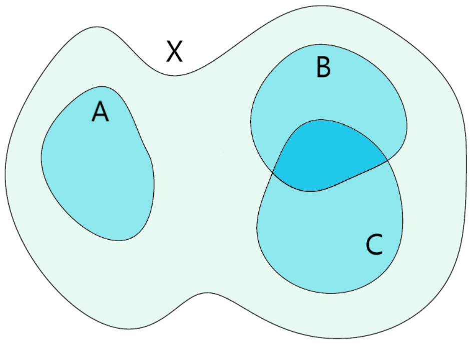
Definici topologie lépe pochopíme na následujících příkladech a cvičeních.

Příklad 1.1.2. Je dána množina X, její podmnožiny A, B, C (viz obrázek 1.4) a množina $\tau = \{X, \emptyset, A, B, C, A \cup B, B \cup C, A \cup C, B \cap C\}$.
Pak τ je topologií na X, neboť se jedná o systém podmnožin X splňující axiomy (i), (ii) a (iii) definice 1.1.1.

Příklad 1.1.3. Nechť $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) $\tau_1 = \{X, \{2\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

τ_1 není topologií na X, neboť $\emptyset$ nenáleží τ_1.



Obrázek 1.4: Množina X s podmnožinami A, B, C

b) $\tau_2 = \{X,\, \emptyset,\, \{1\},\, \{1,\, 2\},\, \{3,\, 4,\, 5\},\, \{1,\, 3,\, 4,\, 5\},\, \{1,\, 6\}\}$.

τ_2 není topologií na X, neboť množina $\{1,\, 6\}$ není podmnožinou X.

c) $\tau_3 = \{X,\, \emptyset,\, \{1,\, 2,\, 4\},\, \{3,\, 4,\, 5\},\, \{4\},\, \{1,\, 3,\, 4,\, 5\}\}$.

τ_3 není topologií na X, neboť $\{1,\, 2,\, 4\} \cap \{1,\, 3,\, 4,\, 5\} = \{1,\, 4\}$ nenáleží τ_3.

Cvičení 1.1.1. [24] Mějme množiny $A = \{a,\, b\}$ a $B = \{a,\, b,\, c\}$. Vypište všechny topologie, které mohou existovat na množině A, a co nejvíce topologií, které mohou být definovány na množině B.

1.2 Otevřená a uzavřená množina

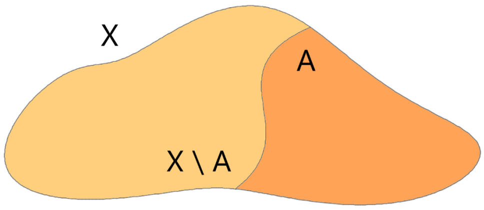
Množiny náležící topologii τ mají svůj název. Říkáme jim otevřené množiny.

Definice 1.2.1. Nechť $(X,\, \tau)$ je topologický prostor. Pak prvky τ nazývame *otevřenými* množinami.

Z této definice přímo vyplývá, že otevřené množiny musí splňovat axiomy (i), (ii), (iii) definice 1.1.1. Tedy otevřené množiny tvoří topologii na množině X.

Protože jsou v topologii velmi podstatné, mají i doplňky otevřených množin svůj název.

Definice 1.2.2. Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subseteq X$. Množinu A nazveme *uzavřenou*, pokud množina $X \setminus A$ je v (X, τ) otevřená.



Obrázek 1.5: Otevřená a uzavřená množina

Podobně jako otevřené množiny splňují axiomy topologického prostoru, uzavřené množiny mají vlastnosti k nim duální, jak si právě dokážeme.

Věta 1.2.3. Jestliže (X, τ) je topologický prostor, pak

(i) X a $\emptyset$ jsou uzavřené množiny,

(ii) sjednocení libovolného konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina,

(iii) průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

Důkaz. Tvrzení (i) vyplývá z faktu, že X a $\emptyset$ jsou doplňky množin $\emptyset$ a X, které jsou otevřené.

Nyní přistupme k tvrzení (ii). Mějme uzavřené množiny $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Abychom dokázali, že $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$ je uzavřená množina, potřebujeme ukázat, že $X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n)$ je množina otevřená. Jelikož $U_1, U_2, \ldots, U_n$ jsou uzavřené, jejich doplňky $X \setminus U_1$, $X \setminus U_2$, $X \setminus U_3, \ldots, X \setminus U_n$ jsou otevřené. Dále platí, že

$$X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n) = (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2) \cap \ldots \cap (X \setminus U_n).$$[1]

Pravá strana rovnosti je konečným průnikem otevřených množin, tedy otevřenou množinou. Proto i levá strana je otevřená a $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$ je uzavřená množina.

[1] Důsledek De Morganových zákonů.

Tvrzení (iii) by se dokázalo obdobně, pomocí rovnosti

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus U_i).$$

□

Jejich pojmenování v nás mohou budit dojem, že uzavřená množina je opakem otevřené, ale není tomu vždy tak. V některých případech může být množina otevřená i uzavřená zároveň, takové množině pak říkáme obojetná.

Definice 1.2.4. Nechť (X, τ) je topologický prostor a množina $A \subseteq X$. Množinu A nazveme obojetnou, pokud je zároveň otevřená i uzavřená.

Také se samozřejmě může stát, že množina není v prostoru ani otevřená, ani uzavřená. Tento typ množin speciální název nemá.

Názvy jsou odvozené od otevřených a uzavřených intervalů reálných čísel. S tím souvisí tzv. eukleidovská topologie, kterou se budeme zabývat v části 1.4.1 . V této topologii jsou skutečně všechny otevřené (resp. uzavřené) intervaly otevřenými (resp. uzavřenými) množinami.

Cvičení 1.2.1. Je dána množina $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ a na ní topologie $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c, e\}, \{c, d, f\}, \{a, b, c, e\}, \{b, c, d, f\}, \{a, c, d, e, f\}\}$.
Vypište všechny množiny uzavřené v tomto topologickém prostoru.

Cvičení 1.2.2. Je dán topologický prostor (X, τ), kde $X = \{k, l, m, n\}$ a $\tau = \{X, \emptyset, \{k\}, \{l\}, \{k, l\}, \{k, m\}, \{k, l, m\}, \{k, m, n\}\}$.
U následujících množin určete, zda jsou otevřené, uzavřené, obojetné, nebo ani jedno z uvedeného: $\{l\}$, $\{n\}$, $\{l, m\}$, $\{m, n\}$, $\{k, l, m\}$, $\{k, l, m, n\}$

1.3 Diskrétní a indiskrétní topologie

Už víme, že na stejné množině může být definováno více topologií. V této části se podíváme na dvě nejvýznačnější z nich – první obsahuje nejvíce možných otevřených množin, druhá nejméně. Díky tomu mají tyto topologie určité speciální vlastnosti.

Definice 1.3.1. Nechť $(X,\, \tau)$ je topologický prostor, kde všechny podmnožiny X jsou otevřené. Pak τ je *diskrétní topologie* a (X, τ) *diskrétní prostor.*

Jelikož jsou v diskrétní topologii otevřené všechny množiny, které daný prostor má, splňují tyto otevřené množiny jistě všechny tři axiomy topologie z definice 1.1.1 (tedy X, $\emptyset$, libovolná sjednocení a konečné průniky otevřených množin jsou otevřené).

Se znalostí definice topologického prostoru můžeme o diskrétním prostoru navíc vyslovit následující větu. Její platnost se může zdát intuitivní, pro úplnost však uvádíme důkaz.

Věta 1.3.2. Jestliže $(X,\, \tau)$ je topologický prostor takový, že pro každý prvek $x \in X$ jednoprvková množina $\{x\} \in \tau$, pak je τ diskrétní topologie.

Důkaz. Každá množina je sjednocením svých jednoprvkových podmnožin, tedy to platí i pro každou množinu $P \subseteq X$, lze zapsat jako $P = \bigcup_{x \in P} \{x\}$. Protože každé $\{x\} \in \tau$, podle axiomu (ii) definice topologického prostoru i každé $P \in \tau$. □

Definice 1.3.3. Nechť $(X,\, \tau)$ je topologický prostor, kde $\tau = \{X,\, \emptyset\}$. Pak τ nazýváme *indiskrétní* neboli *triviální topologie* a (X, τ) *indiskrétní (triviální) prostor.*

Čtenář snadno ověří, že otevřené množiny X a $\emptyset$ indiskrétní topologie rovněž splňují axiomy definice 1.1.1.

Pro oba tyto prostory, diskrétní i indiskrétní, platí, že všechny jejich otevřené množiny jsou zároveň uzavřené.

Cvičení 1.3.1. Ověřte, že všechny otevřené množiny diskrétních a indiskrétních prostorů jsou také uzavřené.

Cvičení 1.3.2. Kolik otevřených množin obsahuje diskrétní topologie na množině o n prvcích?

1.4 Eukleidovská topologie

Další významnou topologií je již zmíněná eukleidovská topologie. Eukleidovská topologie může být zavedena na množině reálných číslech, na rovině, klasickém trojrozměrném prostoru nebo i na vícerozměrných prostorech – na všech eukleidovských prostorech. Eukleidovské prostory budeme značit $\mathbb{R}^n$, kde n značí dimenzi prostoru. Tedy $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel, $\mathbb{R}^2$ je rovina, $\mathbb{R}^3$ trojrozměrný eukleidovský prostor atd. Každý bod v prostoru $\mathbb{R}^n$ je jednoznačně určen n-ticí reálných čísel.

Pokud pracujeme s eukleidovskými prostory (a objekty v nich), užíváme k tomu nejčastěji právě eukleidovskou topologii. Jedná se o nejpřirozenější nástroj, kterým může topolog zkoumat reálná čísla a geometrické objekty. Je proto také často označována jako standardní či přirozená topologie. Též je zvykem, že pokud uvažujeme nějaký eukleidovský prostor a explicitně neuvádíme, jakou topologii používáme, máme na mysli topologii eukleidovskou.

1.4.1 Eukleidovská topologie na $\mathbb{R}$

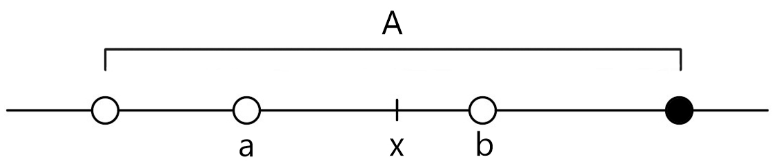
Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je speciálním, a v jistém smyslu nejzákladnějším, případem eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, kterému se proto budeme věnovat zvlášť. Pokud nejprve pochopíme eukleidovskou topologii na reálných číslech, bude pak také jednodušší pochopit ji na obecném eukleidovském prostoru.

Definice 1.4.1. Nechť A je podmnožina reálných čísel. Pak A nazveme otevřenou v *eukleidovské topologii na* $\mathbb{R}$, pokud platí, že pro každé $x \in A$ existují a, $b \in \mathbb{R}$, přičemž $a < b$, taková, že $x \in (a, b) \subseteq A$.

Neboli aby byla množina A otevřená, musí být všechny její prvky obsaženy v otevřených intervalech, které celé leží v množině A.

Cvičení 1.4.1. Je množina A na obrázku 1.6 otevřená?

Lehko nyní odvodíme, že každý otevřený interval bude otevřenou množi-



Obrázek 1.6: Otevřený interval $(a,\, b)$ a bod x v množině A

nou, neboť nám stačí za $(a,\, b)$ zvolit celý uvažovaný interval, jež tak bude obsahovat všechny své body.

Věta 1.4.2. Všechny otevřené intervaly reálných čísel jsou otevřené množiny v eukleidovské topologii na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Mějme otevřený interval $(p,\, q)$ a reálné číslo x z tohoto intervalu. Zvolme $a = p$ a $b = q$. Pak jistě platí, že $x \in (a,\, b) \subseteq (p,\, q)$ a $(p,\, q)$ je tak otevřená množina v $\mathbb{R}$. $\square$

Podle axiomů topologie (definice 1.1.1) pak otevřené musí být i každé sjednocení (a průnik) otevřených intervalů.

Dále každý uzavřený interval je doplňkem nějakého sjednocení otevřených intervalů, což nás vede k následující větě.

Věta 1.4.3. Všechny uzavřené intervaly reálných čísel jsou uzavřené množiny v eukleidovské topologii na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Mějme uzavřený interval $\langle p,\, q\rangle$. Doplňkem tohoto intervalu v $\mathbb{R}$ je $(-\infty,\, p) \cup (q,\, \infty)$, což je sjednocení dvou otevřených intervalů a tedy je to otevřená množina v $\mathbb{R}$. Interval $\langle p,\, q\rangle$ je tak uzavřená množina v $\mathbb{R}$. $\square$

Sjednocení konečného počtu uzavřených intervalů je pak uzavřená množina podle věty 1.2.3.

Cvičení 1.4.2. Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou následující množiny v eukleidovské topologii otevřené nebo uzavřené:

a) jednoprvková množina $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$,

b) množina celých čísel $\mathbb{Z}$,

c) množina kladných čísel (bez nuly),

d) množina nezáporných čísel,

e) zleva uzavřený interval $\langle p, q)$.

Cvičení 1.4.3. Může být některá podmnožina $\mathbb{R}$ v eukleidovské topologii obojetná?

1.4.2 Eukleidovská topologie na $\mathbb{R}^n$

V obecném eukleidovském prostoru je eukleidovská topologie definována pomocí otevřených koulí.

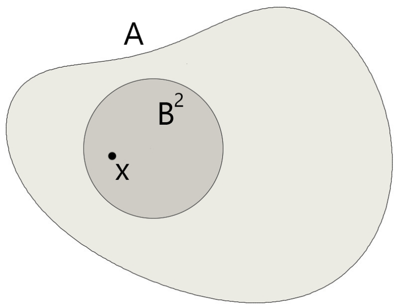
Otevřená koule v eukleidovském prostoru je určena svým středem a poloměrem. Jedná se o množinu bodů, které jsou od středu vzdálené méně, než je daný poloměr.

Definice 1.4.4. Mějme eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$, v něm bod S a dále reálné číslo $r > 0$. *Otevřenou koulí* v prostoru $\mathbb{R}^n$ pak rozumíme množinu $B^n(S, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - S| < r\}$.

Otevřenou koulí v $\mathbb{R}^3$ je tak koule bez svého pláště, značíme ji B^3. Otevřenou dvourozměrnou koulí B^2 je kruh bez své ohraničující kružnice.

Otevřenou jednorozměrnou koulí B není nic jiného než otevřený interval. Díky tomu si jistě všimneme spojitosti mezi již vyslovenou definicí eukleidovské topologie na $\mathbb{R}$ a následující definicí. Definice na $\mathbb{R}$ je totiž jen speciálním případem definice na $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.4.5. Nechť A je podmnožina eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$. Pak A nazveme otevřenou v *eukleidovské topologii na* $\mathbb{R}^n$, pokud platí, že pro každé $x \in A$ existuje otevřená koule $B^n(S, r)$ se středem v bodě S a poloměrem r taková, že $x \in B^n(S, r) \subseteq A$.



Obrázek 1.7: Otevřený kruh B^2 s bodem x v množině A

Tedy A je otevřená v $\mathbb{R}^n$, pokud jsou všechny její prvky obsaženy v otevřených koulích dimenze n, které jsou všechny podmnožinou A. Jinak řečeno množina A je sjednocením otevřeých n-dimenzionálních koulí (které se mohou překrývat).

Ověřme, že eukleidovská topologie je topologií dle definice 1.1.1. V celém prostoru $\mathbb{R}^n$ jistě kolem každého bodu najdeme otevřenou kouli a pro $\emptyset$, jelikož neobsahuje žádné body, nemáme žádné omezující podmínky, tedy X a $\emptyset$ jsou otevřené. Pokud máme sjednocení libovolného počtu otevřených množin, víme o každém jeho bodě, že byl prvkem nějaké otevřené koule v jedné z původních množin, a musí tak být i nyní. Nakonec každý průnik konečného počtu otevřených množin je nějaká množina bez své hranice.[2] Pro každý bod v takovém průniku můžeme vybrat otevřenou kouli se středem v tomto bodě a poloměrem takovým, jaká je nejmenší vzdálenost k hranici průniku a ten je tak jistě otevřený.

Cvičení 1.4.4. Vyberte množiny, které jsou v příslušné eukleidovské topologii otevřené:

a) bod x v $\mathbb{R}^3$,

b) přímka v $\mathbb{R}^2$,

c) čtverec bez své hranice v $\mathbb{R}^2$,

[2] Hranici formálně definujeme v kapitole 2.5, v eukleidovských prostorech se však jedná o intuitivní pojem.

d) množina bodů s kladnou x-ovou souřadnicí v $\mathbb{R}^2$.

Kupříkladu v $\mathbb{R}^2$ jsou otevřené všechny dvojrozměrné útvary bez křivky, která je ohraničuje. Kolem bodů na hraniční křivce totiž nemůžeme umístit kružnice, které by byly celé v našem útvaru. Podobné je to s útvary nižších dimenzí – jednorozměrnými a osamělými body.

V $\mathbb{R}^3$ jsou pak otevřené trojrozměrné útvary bez dvourozměrného povrchu, který je ohraničuje. Obdobně ve vyšších rozměrech by platilo, že v $\mathbb{R}^n$ může být otevřený pouze n-rozměrný objekt bez $(n-1)$-rozměrného útvaru, který jej ohraničuje.

1.5 Podprostorová topologie

Další velmi užitečnou topologií je topologie podprostorová. Používá se pokud pracujeme s podmnožinami jiných prostorů. Pro práci s konkrétními objekty v eukleidovských prostorech eukleidovskou topologii často kombinujeme s topologií podprostorovou.

Podprostorová topologie jednoduchým způsobem vytváří novou topologii z již existující. Pokud máme prostor X s topologií τ a chceme zavést podprostorovou topologii na nějaké podmnožině $Y \subseteq X$, prostě z otevřených množin prostoru X vynecháme všechny body, které do Y nepatří. Tedy pro podprostorovou topologii uvažujeme pouze ty body původní topologie, které náleží podprostoru.

Definice 1.5.1. Nechť (X, τ) je topologický prostor a Y je podmnožina X. Pak množina $\tau_Y = \{O \cap Y \mid O \in \tau\}$ podmnožin Y je topologie na Y, kterou nazveme *podprostorovou topologií.* Topologický prostor (Y, τ_Y) nazveme *podprostorem* prostoru (X, τ).

Příklad 1.5.2. Mějme množinu $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, na ní topologii $\tau = \{X, \emptyset, \{e\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}, \{c, d, e\}, \{c, d, e, f\}, \{a, b, c, d, e\}\}$ a množinu $Y = \{b, c, f\}$.

Pak podprostorovou topologií na podprostoru Y je $\tau_Y = \{\{b, c, f\}, \emptyset, \{b\}, \{c, f\}, \{c\}, \{b, c\}\}$.

Podprostorová topologie splňuje definici topologie 1.1.1, neboť „vynechávané“ odebíráme vždy ze všech otevřených množin (takže body odebrané ze skupiny otevřených množin jsou odebrané i z jejich sjednocení a průniku).

Cvičení 1.5.1. V následujících případech je vždy dán topologický prostor (X, τ) a množina $Y \subseteq X$. Jak vypadají otevřené množiny podprostorové topologie na Y?

a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$, $Y = \{1, 3, 5\}$.

b) $X = \mathbb{R}$, eukleidovská topologie, $Y = \mathbb{Z}$.

c) $X = \mathbb{R}$, eukleidovská topologie, $Y = (-\infty, 0) \cup \langle 1, 5 \rangle$.

Bonus: Furstenbergův důkaz nekonečnosti prvočísel

Bonusová část této kapitoly prezentuje jedno nečekané využití topologie v jiné oblasti matematiky. Předvedeme důkaz Eukleidovy věty o prvočíslech, což je známé tvrzení z teorie čísel. Čtení této části není pro pochopení dalšího materiálu nutné, důkaz nicméně uvádíme jakožto zajímavost.

Topologický důkaz Eukleidovy věty o prvočíslech poprvé publikoval tehdy dvacetiletý student matematiky Hillel Furstenberg, a to v roce 1955. Furstenbergův důkaz sice není prvním důkazem této věty,[3] pro nás je však zajímavý tím, že využívá pouze nejzákladnějších topologických pojmů a aplikuje je v naprosto odlišné části matematiky.

Věta 1.6.1 (Eukleidova věta o prvočíslech)**.** Existuje nekonečně mnoho prvočísel.

[3]Klasický důkaz poskytl ve 4. století před naším letopočtem sám Eukleidés.

Furstenbergův důkaz je postaven na vhodném definování topologie, a to na množině celých čísel $\mathbb{Z}$. Samotnou větu pak dokážeme sporem, přičemž využijeme vlastností zavedené topologie.

Důkaz. Mějme aritmetickou posloupnost $P(a, b)$ danou předpisem $P(a, b) = \{an + b \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Každá posloupnost $P(a, b)$ tedy vznikne tak, že vezmeme množinu celých čísel $\mathbb{Z}$, každý její prvek n vynásobíme číslem a a k výslednému číslu přičteme b.

Topologii na množině $\mathbb{Z}$ definujeme následovně: každá otevřená množina je buď libovolným sjednocením posloupností $P(a, b)$, kde $a \neq 0$, nebo se jedná o prázdnou množinu.

Pro náš důkaz budou důležité dvě vlastnosti této topologie:

1. Každá posloupnost $P(a, b)$ je zároveň otevřená i uzavřená.

   Doplněk do množiny celých čísel lze totiž pro libovolnou posloupnost $P(a, b)$ zapsat jako sjednocení jiných otevřených posloupností následujícím způsobem:

$$P(a, b) = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{k=1}^{a-1} P(a, b + k)$$

2. Doplněk konečné neprázdé množiny nemůže být uzavřená množina.

   Každá neprázdná otevřená množina je totiž nekonečnou posloupností čísel a konečná množina tak nemůže být otevřená.

Nyní nechť p značí libovolné prvočíslo. Uvažme všechny $P(p, 0)$, tedy posloupnosti sestávající ze všech celočíselných násobků prvočísel. Jelikož jedinými celými čísly, které nepatří mezi celočíselné násobky prvočísel jsou 1 a -1, platí rovnost:

$$\bigcup_{p} P(p, 0) = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$$

Pokud by existovalo pouze konečné množství prvočísel, byla by levá strana rovnice sjednocením konečného počtu množin, které jsou podle 1. vlastnosti uzavřené, a tedy by byla uzavřená. Podle 2. vlastnosti však pravá strana rovnice naopak nemůže být uzavřená, čímž jsme došli ke sporu. □

Řešení cvičení

Cvičení 1.1.1.

Řešení. Topologie na množině $A = \{a, b\}$: $\tau_1 = \{X, \emptyset\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$, $\tau_3 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$, $\tau_4 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$.

Topologie na množině $B = \{a, b, c\}$: $\tau_1 = \{X, \emptyset\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$,
$\tau_3 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$, $\tau_4 = \{X, \emptyset, \{c\}\}$, $\tau_5 = \{X, \emptyset, \{a, b\}\}$, $\tau_6 = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$,
$\tau_7 = \{X, \emptyset, \{a, c\}\}$, $\tau_8 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\tau_9 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$,
$\tau_{10} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}\}$, $\tau_{11} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$,
$\tau_{12} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$, $\tau_{13} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$,
$\tau_{14} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{15} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}$,
$\tau_{16} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{17} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,
$\tau_{18} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$, $\tau_{19} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$,
$\tau_{20} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{21} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$,
$\tau_{22} = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{23} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$,
$\tau_{24} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{25} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$,
$\tau_{26} = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$, $\tau_{27} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$,
$\tau_{28} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$,
$\tau_{29} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$.

Cvičení 1.2.1.

Řešení. $\emptyset$, X, $\{a, c, d, e, f\}$, $\{a, b, d, e, f\}$, $\{a, d, e, f\}$, $\{b, d, f\}$, $\{a, b, e\}$, $\{d, f\}$, $\{a, e\}$, $\{b\}$

Cvičení 1.2.2.

Řešení. $\{l\}$ - obojetná, $\{n\}$ - uzavřená, $\{l, m\}$ - ani otevřená, ani uzavřená, $\{m, n\}$ - uzavřená, $\{k, l, m\}$ - otevřená, $\{k, l, m, n\}$ - obojetná

Cvičení 1.3.1.

Řešení. Začněme diskrétním topologickým prostorem. Jelikož diskrétní topologie obsahuje všechny podmnožiny prostoru, doplněk jakékoliv podmnožiny topologického prostoru musí být otevřený. Všechny podmnožiny diskrétního prostoru jsou tak musí být uzavřené.

Indiskrétní topologický prostor obsahuje jen dvě otevřené množiny - celý topologický prostor a prázdnou množinu. Tyto dvě množiny jsou si navzájem svými doplňky, tedy jsou zároveň uzavřené.

Cvičení 1.3.2.

Řešení. Tento počet je z definice roven počtu podmnožin n-prvkové množiny. Pokud vybíráme podmnožiny z n-prvkové množiny, máme pro každý z jejích n prvků dvě možnosti - buď ji vybereme, nebo ne. Tento počet je tak 2^n.

Cvičení 1.4.1.

Řešení. Není, neboť její pravý krajní bod nemůže být prvkem žádného otevřeného intervalu, který by byl podmnožinou A.

Cvičení 1.4.2.

Řešení.

a) Uzavřená množina - doplňkem je sjednocení dvou otevřených intervalů $(-\infty, x) \cup (x, \infty)$.

b) Uzavřená množina - doplňkem je sjednocení otevřených intervalů.

c) Otevřená množina - $(0, \infty)$ je otevřený interval.

d) Uzavřená množina - $\langle 0, \infty)$ je uzavřená množina.

e) Ani otevřená, ani uzavřená - není otevřená, neboť p není prvkem žádné otevřené podmnožiny $\langle p, q)$, jmenovitě $p \notin (p, q)$ a není uzavřená, neboť q není prvkem žádné otevřené podmnožiny doplňku $\langle p, q)$, tedy množiny $(-\infty, p) \cup \langle q, \infty)$ jmenovitě $q \notin (-\infty, p) \cup (q, \infty)$.

Cvičení 1.4.3.

Řešení. Obojetné jsou pouze $\mathbb{R}$ a $\emptyset$, pokud je totiž jiná podmnožina $\mathbb{R}$ otevřená, je sjednocením jednoho či více otevřených intervalů a jejím doplněk je vždy sjednocení uzavřených intervalů, což je vždy jedině uzavřená množina.

Cvičení 1.5.1.

Řešení.

a) $\tau_Y = \{\{1, 3, 5\}, \emptyset, \{1\}, \{3, 5\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$.

b) V podprostorové topologii musí být otevřená každá množina $\{x\}$, $x \in \mathbb{Z}$, neboť průnik apříklad každého intervalu $(x - 1, x + 1)$ s $\{x\}$ je $\{x\}$. Podprostorová topologie na $\mathbb{Z}$ je tak topologie diskrétní, podle věty 1.3.2.

c) Na intervalu $(-\infty, 0)$ jsou otevřené všechny otevřené intervaly. Všechny otevřené intervaly jsou otevřené rovněž v rámci intervalu $(1, 5)$. Dále jsou otevřené všechny zleva uzavřené intervaly $\langle 1, a)$, kde $1 < a \leq 5$ a všechny zprava uzavřené intervaly $(b, 5\rangle$, kde $1 \leq b < 5$. Otevřené jsou samozřejmě také libovolná sjednocení popsaných intervalů.

   Podmnožiny $\langle 0, 1) \cup (5, \infty)$ být otevřené nemohou, neboť nenáleží podprostoru.

Kapitola 2

O množinách

Teď, když jsme obeznámeni s tím, co vlastně topologické prostory jsou, je na čase naučit se s nimi pracovat.

Jak jsme si již stačili všimnout, k topologickým prostorům neodmyslitelně patří množiny – každý topologický prostor je množinou. V této kapitole se proto zblízka podíváme právě na ně. Naučíme se množiny popisovat a seznámíme se s některými jejich (topologicky) důležitými vlastnostmi a součástmi. Budeme se na ně dívat očima topologa.

Některá z následujících pojmenování, jež se množin týkají, nám mohou, ne náhodou, být povědomá z jiných oblastí matematiky.

2.1 Limitní body aneb derivace množiny

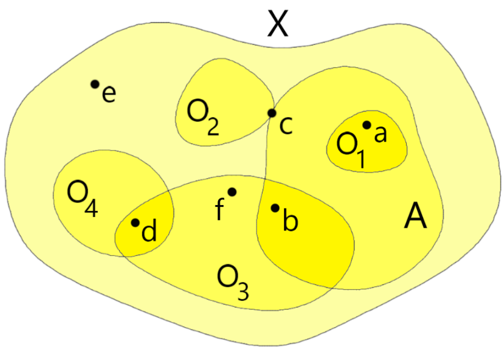
Na reálných číslech je definován vcelku intuitivní pojem limity. Mějme například posloupnost čísel začínající jedničkou a každý další člen vytvoříme jako polovinu předešlého. Pak každý další člen této posloupnosti se více a více blíží nule, avšak žádný člen posloupnosti se nule rovnat nemůže. Nulu bychom nazvali limitou takové posloupnosti.

Limitní body jsou obdobou limit posloupností. Jelikož se jedná o zobecnění na mnohem širší skupinu objektů, na libovolný topologický prostor, jejich význam již tak jasný není. Dají se však pomocí nich definovat další pojmy, čehož budeme chtít dosáhnout.

Dodejme, že prvkům topologického prostoru X se říká *body*.

Definice 2.1.1. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Bod $x \in X$ nazveme *limitním bodem* množiny A, pokud každá otevřená množina obsahující x obsahuje bod $y \in A$ různý od x.

Cvičení 2.1.1. V rovině je dán topologický prostor X, kde otevřenými množinami jsou právě množiny O_1, O_2, O_3, O_4 spolu se všemi jejich sjednoceními a průniky, dále množina $A \subseteq X$ a body a, b, c, d, e, f, viz obrázek 2.1. Poznamenejme ještě, že c je jediný společný bod množin A a O_2. Které ze zmíněných bodů jsou limitními body množiny A?



Obrázek 2.1: Prostor X s body a, b, c, d, e, f

Z posledního cvičení je patrné, že limitní bod množiny může, ovšem nemusí, být prvkem této množiny.

Definice 2.1.2. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Pak *derivací* množiny A rozumíme množinu všech jejích limitních bodů. Značíme A'.

Cvičení 2.1.2. Mějme množinu $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a na ní topologii $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{4, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$. Určete derivaci množiny $A = \{1, 2, 3\}$.

Cvičení 2.1.3. Jaká by byla derivace množiny A z obrázku 2.1?

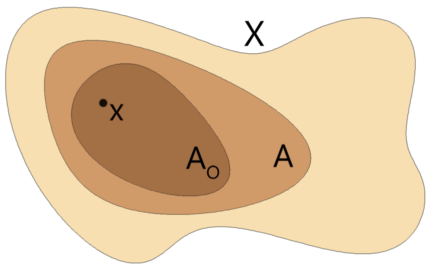
Cvičení 2.1.4. Dokažte, že body diskrétního prostoru nejsou nikdy limitní.

2.2 Okolí bodu

S limitními body úzce souvisí pojem okolí.

Zatímco u některých množin je očividné, kdy jsou si dva prvky „blízké“ (číselné množiny, geometrie), u některých už to tak jasné být nemusí. Proto topologové přišli s termínem okolí. Okolí nám udává, kdy jsou si „blízké“ nějaké body topologického prostoru, konkrétně které body jsou v okolí jiného. Jelikož topologické prostory obecně nenesou informaci o vzdálenostech svých bodů, využíváme k tomu otevřených množin.

Definice 2.2.1. Nechť (X, τ) je topologický prostor, A je podmnožina X a $x \in A$. Množinu A nazveme *okolím* bodu x, pokud existuje otevřená podmnožina A obsahující x.
Pokud je okolí A zároveň otevřenou množinou, říkáe mu *otevřené okolí*.



Obrázek 2.2: Okolí A a otevřené okolí A_O bodu x

Zřejmě tak každá otevřená množina je otevřeným okolím pro všechny body, které obsahuje. To se dá využít v důkazu následující věty.

Věta 2.2.2. Nechť (X, τ) je topologický prostor a $A \subseteq X$. Množina A je otevřená, právě když každé $x \in A$ má otevřené okolí $N_x \subseteq A$.

Důkaz. Tvrzení rozdělíme na dvě implikace, které dokážeme zvlášť.

Pokud je A otevřená množina, můžeme za okolí N_x každého $x \in A$ zvolit právě množinu A, tedy první implikace platí.

Pokud má každé $x \in A$ otevřené okolí N_x, pak A je sjednocení všech N_x, což je jakožto sjednocení otevřených množin otevřená množina. $\square$

Cvičení 2.2.1. Mohou v topologickém prostoru existovat body bez okolí?

Cvičení 2.2.2. Přeformulujte definici limitního bodu 2.1.1 tak, abyste použili pojem (otevřené) okolí.

2.3 Uzávěr množiny

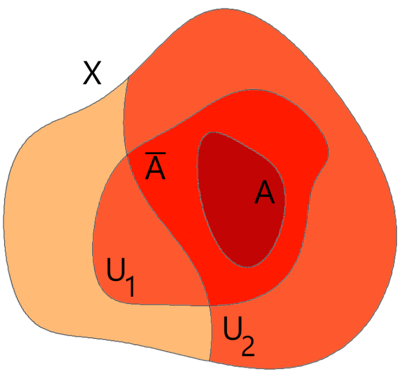
Jedním z nejvíce frekventovaných pojmů v obecné topologii je uzávěr množiny. Snad proto má uzávěr, stejně jako četné další matematické pojmy, několik ekvivalentních definic. My si uvedeme dvě z nich, jednu pomocí derivace množiny, druhou využívající uzavřených množin.

Definice 2.3.1. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Pak množinu $A \cup A'$ nazýváme *uzávěrem* množiny A, značíme $\overline{A}$.

Vraťme se ještě jednou k definici limitního bodu. Snadno nahlédneme, že pokud v této definici povolíme, aby se y rovnalo x, získáme bod uzávěru.

Lze dokázat, že množina $A \cup A'$ je vždy uzavřená, my tak však činit nebudeme, neboť to přímo plyne z naší druhé, ekvivalentní definice.

Definice 2.3.2. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Pak *uzávěrem* množiny A rozumíme průnik všech uzavřených množin, které A obsahují.



Obrázek 2.3: Uzávěr množiny (U_1, U_2 jsou uzavřené množiny)

Z toho hned vyplývá, že $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující A. Zřejmě tak platí, že každá množina je podmnožinou svého uzávěru, $A \subseteq \overline{A}$, přičemž rovnost nastává právě, když je A uzavřená množina.

Abychom byli úplně korektní, dokažme ještě, že naše dvě definice skutečně popisují tu samou věc, tedy že jsou ekvivalentní.

Věta 2.3.3. Definice 2.3.1 je ekvivalentní s definicí 2.3.2.

Důkaz. Uzavřené nadmnožiny A označíme B_i, jejich průnik je pak $\bigcap_{i\in I} B_i$ pro nějakou množinu indexů I.

Tvrzení dokážeme nepřímo, neboli budeme dokazovat ekvivalenci $x \notin A \cup A' \iff x \notin \bigcap_{i\in I} B_i$. Předvedeme důkaz implikace $x \notin \bigcap_{i\in I} B_i \implies x \notin A \cup A'$, přičemž obrácená implikace by se dokázala tak, že celý důkaz obrátíme a budeme postupovat opačně.

Pokud $x \notin \bigcap_{i\in I} B_i$, musí existovat nějaké B_0, které neobsahuje x, $x \notin B_0$. Bod x tak jistě náleží doplňku B_0, $x \in X \setminus B_0$. Jelikož B_0 je z definice 2.3.2 uzavřená nadmnožina A, je $X \setminus B_0$ otevřená množina, která je disjunktní s A. Víme tedy, že existuje otevřené okolí bodu x, které neobsahuje nic z A a z definice limitního bodu tak $x \notin A \cup A'$. □

Cvičení 2.3.1. Mějme množinu $X = \{a, b, c, d, e\}$ s topologií $\tau = \{X, \emptyset, \{c\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, c, d, e\}$. Najděte uzávěry následujících množin: $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, d, e\}$, $\emptyset$.

Pro řešení úloh v této práci je velmi užitečná následující implikace.

Věta 2.3.4. Pro každé dvě podmnožiny A, B topologického prostoru platí:

$$A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}.$$

Důkaz. Víme, že $B \subseteq \overline{B}$, tedy určitě $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$. Uzávěrem množiny A tak zřejmě musí být buď $\overline{B}$ nebo nějaká její uzavřená podmnožina, takže $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. □

Zde je třeba zdůraznit, že obrácená implikace pravdivá není. Přesvědčme se na příkladu.

Příklad 2.3.5. Mějme množiny $A = (1;3\rangle$ a $B = (1;3\rangle \setminus \{2\}$ s běžnou topologií. Uzávěry obou množin jsou rovny $\langle 1;3\rangle$ a splňují tak podmínku $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Zřejmě však $A \not\subseteq B$.

Věta 2.3.6. Pro každé dvě množiny A, B libovolného topologického prostoru platí $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Důkaz. Dokážeme zvlášť tvrzení $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ a $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Pokud platí obě zároveň, dokazovaná věta musí platit.

Protože $A \subseteq A \cup B$ a $B \subseteq A \cup B$, zřejmě $\overline{A}$ i $\overline{B}$ jsou podmnožinami $\overline{A \cup B}$. Pak i pro jejich sjednocení $\overline{A} \cup \overline{B}$ musí platit $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Dále víme, že $A \subseteq \overline{A}$ a $B \subseteq \overline{B}$, proto $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. $\overline{A} \cup \overline{B}$ je sjednocení dvou uzavřených množin, je tedy také uzavřenou množinou. Uzávěr množiny $A \cup B$ je pak z definice buď $\overline{A} \cup \overline{B}$ nebo její podmnožina, z čehož plyne $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Tedy $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$. □

Dalšími vlastnostmi uzávěru se zabývá následující úloha. Její řešení je oproti cvičením, která jsme zatím potkali, o něco náročnější, přesto vřele doporučujeme se o řešení pokusit, případně si alespoň přečíst autorské řešení na konci kapitoly.

Úloha 2.3.2. [25] Dokažte, že pro všechny podmnožiny A, B libovolného topologického prostoru platí:

a) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$,

b) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

Ukažte na příkladu, že inkluze nemohou být nahrazeny rovnostmi.[1]

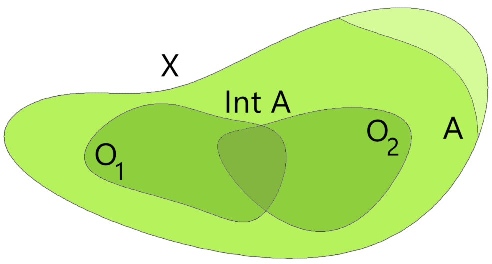
[1]Pro řešení části b) doporučujeme využít definici okolí.

2.4 Vnitřek množiny

Narozdíl od uzávěru je vnitřek pojem relativně dobře známý, konkrétně z geometrie. Tam označuje část roviny, kterou nějaká uzavřená křivka odděluje od zbytku roviny. Například vnitřkem kružnice rozumí geometr kruh bez této kružnice. Avšak topolog vidí situaci docela jinak. V topologii je definice vnitřku oproti geometrii posunuta a vyžaduje, aby byl vnitřek množiny její částí. Topolog by mohl říct, stejně jako geometr, že vnitřkem kruhu je celý kruh bez kružnice, která jej ohraničuje.[2] Samotná kružnice s běžnou topologií by pak měla vnitřek prázdný.

O uzávěru a vnitřku můžeme uvažovat jako o jakýchsi aproximacích množin. Zatímco uzávěr k tomuto účelu využívá uzavřené množiny, vnitřek hovoří o množinách otevřených.

Definice 2.4.1. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Pak *vnitřkem* množiny A rozumíme největší otevřenou množinu, kterou množina A obsahuje. Značíme $Int\, A$.[3]



Obrázek 2.4: Vnitřek množiny (O_1, O_2 jsou otevřené množiny)

Očividně každá množina je nadmnožinou svého vnitřku, $Int\, A \subseteq A$, přičemž množina je rovna svému vnitřku právě, když je otevřená.

Obdobná implikace jako z části 2.3 o uzávěrech platí i o vnitřcích množin.

[2]Tuto kružnici bychom nazvali hranicí kruhu. Více o hranici v kapitole 2.5.

[3]Z anglického *interior*.

Věta 2.4.2. Pro každé dvě podmnožiny A, B libovolného topologického prostoru platí:

$$A \subseteq B \Longrightarrow Int\,A \subseteq Int\,B.$$

Důkaz. Víme, že $Int\,A \subseteq A$, tedy určitě $Int\,A \subseteq A \subseteq B$. Vnitřkem množiny B tak zřejmě musí být buď $Int\,A$ nebo nějaká jeho otevřená nadmnožina, takže $Int\,A \subseteq Int\,B$. □

Obecně opět platí, že obrácená implikace pravdivá není. Dokážete takovou implikaci vyvrátit?

Cvičení 2.4.1. Najděte konkrétní příklad dvou množin A, B, pro které $Int\,A \subseteq Int\,B$ a zároveň $A \nsubseteq B$.

Dále o vnitřku můžeme vyslovit podobnou větu jako o sjednocení uzávěrů (věta 2.3.6). Avšak pozor, narozdíl od uzávěrů, u vnitřku pojednává o průniku.

Věta 2.4.3. Pro každé dvě množiny A, B libovolného topologického prostoru platí $Int\,A \cap Int\,B = Int\,(A \cap B)$.

Důkaz. Dokážeme postupně inkluze $Int\,A \cap Int\,B \subseteq Int\,(A \cap B)$ a $Int\,(A \cap B) \subseteq Int\,A \cap Int\,B$.

Z definice vnitřku $Int\,A \subseteq A$ a $Int\,B \subseteq B$. Pak jistě $Int\,A \cap Int\,B \subseteq A \cap B$. Vnitřek $A \cap B$ je tak buď $Int\,A \cap Int\,B$ nebo nějaká její nadmnožina, proto $Int\,A \cap Int\,B \subseteq Int\,(A \cap B)$.

Nyní protože $A \cap B \subseteq A$ a $A \cap B \subseteq B$, pak podle věty 2.4.2 také $Int\,(A \cap B) \subseteq Int\,A$ a $Int\,(A \cap B) \subseteq Int\,B$. Neboť $Int\,(A \cap B)$ je podmnožinou obou množin $Int\,A$ i $Int\,B$, pak rovněž $Int\,(A \cap B) \subseteq Int\,A \cap Int\,B$.

Obě inkluze dohromady dávají rovnost $Int\,A \cap Int\,B = Int\,(A \cap B)$. □

Pokud bychom průniky nahradili sjednoceními, rovnost by neplatila ve všech případech.

Cvičení 2.4.2. Právě jedna z následujících inkluzí je obecně pravdivá. Rozhodněte, o kterou se jedná.

a) $Int\, A \cup Int\, B \subseteq Int\,(A \cup B)$.

b) $Int\,(A \cup B) \subseteq Int\, A \cup Int\, B$.

Mezi vnitřkem a uzávěrem existuje ještě jedna souvislost. Lze si všimnout, že pokud vezmeme uzávěr doplňku nějaké množiny, je vzniklá uzavřená množina doplňkem k vnitřku původní množiny.

Věta 2.4.4. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Pak $Int\, A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

Důkaz. Větu rozdělíme na dvě tvrzení, $X \setminus \overline{X \setminus A} \subseteq Int\, A$ a $Int\, A \subseteq X \setminus \overline{X \setminus A}$, jejichž platnost ověříme zvlášť.

Z definice uzávěru platí, že $X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A}$, z toho $X \setminus \overline{X \setminus A} \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A$. Protože $\overline{X \setminus A}$ je uzavřená množina, je $X \setminus \overline{X \setminus A}$ množina otevřená. Pak vnitřkem A je buď $X \setminus \overline{X \setminus A}$ nebo nějaká její nadmnožina, tedy platí, že $X \setminus \overline{X \setminus A} \subseteq Int\, A$.

Mějme libovolnou otevřenou množinu O, která je podmnožinou A. Pak $X \setminus A \subseteq X \setminus O$. $X \setminus O$ je uzavřená množina, proto uzávěrem $X \setminus A$ je právě množina $X \setminus O$ nebo nějaká její podmnožina, tedy $\overline{X \setminus A} \subseteq X \setminus O$. Pro doplňky posledních dvou množin tak musí platit $O \subseteq X \setminus \overline{X \setminus A}$. To platí pro jakoukoliv množinu O, tedy specielně i pro $Int\, A$, takže $Int\, A \subseteq X \setminus \overline{X \setminus A}$.

Platí tak zároveň $X \setminus \overline{X \setminus A} \subseteq Int\, A$ i $Int\, A \subseteq X \setminus \overline{X \setminus A}$, proto $Int\, A = X \setminus \overline{X \setminus A}$. □

Cvičení 2.4.3. Vyberte pravdivá tvrzení o vnitřku množiny v prostoru (X, τ):

a) $Int\, A \subseteq A$.

b) $Int\, X = \emptyset$.

c) $X \setminus \overline{A} = Int\,(X \setminus A)$.

d) Průnik vnitřků dvou množin A, B je uzavřená množina.

Úloha 2.4.4. [25] Podmnožina A topologického prostoru, která splňuje podmínku $A = Int\,\overline{A}$ se nazývá otevřená doména.

a) Ověřte, že vnitřek uzavřené množiny je otevřená doména.[4]

b) Dokažte, že průnik dvou otevřených domén je otevřená doména. (Všimněte si, že sjednocení dvou otevřených domén nemusí být otevřená doména. Kupříkladu pokud $A = (1,\, 2)$ a $B = (2,\, 3)$, pak $Int\,\overline{(1,\, 2) \cup (2,\, 3)} = (1,\, 3)$ a $A \cup B \neq Int\,\overline{A \cup B}$.)

c) Ukažte, že pro otevřené domény A a B platí, že $A \subseteq B$ právě když $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

2.5 Hranice množiny

Vzpomínáte ještě na hranici kruhu?

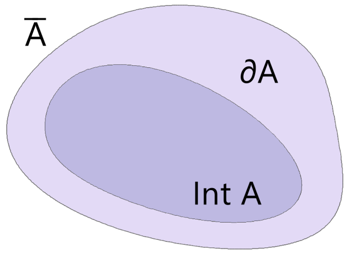
Koncepty uzávěru a vnitřku množiny nám nadále vhodně spojuje právě hranice. Jak již název napovídá, hranice představuje body, které leží jakoby „na okraji“ množiny. Například pokud si vezmeme uzavřený interval $\langle 1,\, 2\rangle$ s běžnou topologií, jeho hranicí budou právě jeho krajní body 1, 2. To samé by platilo i pro otevřený interval $(1,\, 2)$.

Formálně se jedná o všechny body, které sice leží v uzávěru množiny, ale ne v jejím vnitřku. Body hranice tak mohou, ale nemusí být součástí původní množiny, tak jako tomu je se zmíněnými intervaly.

Definice 2.5.1. Nechť A je podmnožina topologického prostoru $(X,\, \tau)$. Pak *hranicí* množiny A rozumíme rozdíl jejího uzávěru a vnitřku, $\overline{A} \setminus Int\,A$. Značíme $\partial\, A$.

Díky větě 2.4.4 se hranice dá popsat i jako průnik uzávěrů dvou komplementárních množin. Následující věta ukazuje, že taková definice by byla ekvivalentní s naší původní definicí 2.5.1.

[4] Tzn. A z definice v zadání nahradíme $Int\,U$, kde U je uzavřená množina.



Obrázek 2.5: Hranice množiny

Věta 2.5.2. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Pak $\overline{A} \setminus Int\, A = \partial\, A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Důkaz. Nechť $x \in \overline{A} \setminus Int\, A$. Pak zřejmě $x \in \overline{A}$ a $x \notin Int\, A$. Protože $x \notin Int\, A$, jistě $x \in X \setminus Int\, A$. Z věty 2.4.4 ovšem víme, že $X \setminus Int\, A = \overline{X \setminus A}$. Tedy x je zároveň prvkem $\overline{A}$ a $\overline{X \setminus A}$, načež $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Proto $\overline{A} \setminus Int\, A \subseteq \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Opačnou inkluzi bychom získali pouhým obrácením argumentu. □

Občas se hodí uvažovat o hranici právě takto. Navíc z tohoto tvrzení hned vyplývá, že hranice je vždy uzavřená množina, neboť je průnikem dvou uzavřených množin.

Cvičení 2.5.1. Mějme prostor (X, τ) a v něm množinu A. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá a která nikoliv.

a) $Int\, A = \partial\, A \setminus A$.

b) Množina A je obojetná, právě když $\partial\, A = \emptyset$.

c) $(X \setminus A) \cup \overline{A} = \partial\, A$.

d) $\partial\, (X \setminus A) = \partial\, A$.

Úloha 2.5.2. [25] Ověřte, že pokud množiny A a B splňují podmínku $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$, pak $\partial\, (A \cup B) = \partial\, A \cup \partial\, B$.[5]

[5]Pokuste se dokázat alespoň inkluzi $\partial\, (A \cup B) \subseteq \partial\, A \cup \partial\, B$. K důkazu opačné inkluze lze dobře použít důkaz sporem.

2.6 Hustá a řídká množina

Některé množiny mohou být doslova husté.

Definice 2.6.1. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Množinu A nazveme v X *hustou*, pokud je jejím uzávěrem celý prostor X, $\overline{A} = X$.

Hustá je například množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ s eukleidovskou topologií.

Věta 2.6.2. Množina $\mathbb{Q}$ je v $\mathbb{R}$ hustá.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$. Pak existuje bod x takový, že $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. Množina $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ je v $\mathbb{R}$ otevřená, takže existují reálná čísla a, b, kdy $a < b$, pro která platí, že $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. V každém intervalu (a, b) však existuje racionální číslo q, tedy $q \in (a, b)$. Jistě tak $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ a protože $\mathbb{Q} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, pak $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. To je spor, neboť $q \in \mathbb{Q}$. Tedy $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

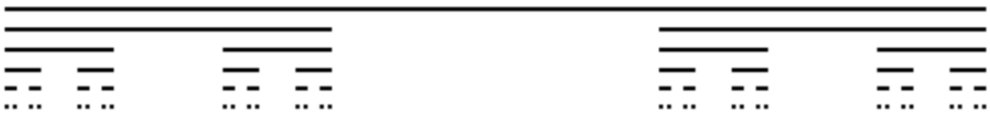
Opakem hustých množin jsou množiny řídké, navzdory svému názvu neméně zajímavé.

Definice 2.6.3. Nechť B je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Množinu B nazveme v X *řídkou*, pokud vnitřkem jejího uzávěru je prázdná množina, $Int\,\overline{B} = \emptyset$.

Pozoruhodným příkladem řídké množiny je fraktální množina známá jako Cantorovo diskontinuum. Fraktály obecně vznikají tak, že pořád dokola opakujeme nějaký většinou jednoduchý krok, čímž ovšem mohou vznikat velmi složitě vypadající struktury.

K vytvoření Cantorova diskontinua začneme s uzavřenou úsečkou dané délky (řekněme délky jedna) a následně odebereme její otevřenou prostřední třetinu. V dalších krocích (iteracích) provedeme to samé s každou další vzniklou úsečkou. Tento proces opakujeme do nekonečna.

Právě nekonečnost tohoto procesu zaručuje, že Cantorovo diskontinuum je v $\mathbb{R}$ řídké.



Obrázek 2.6: Prvních šest iterací Cantorova diskontinua [26]

Věta 2.6.4. Cantorovo diskontinuum je v $\mathbb{R}$ řídká množina.

Důkaz. Snadno nahlédneme, že po každém jednotlivém kroku vznikají úsečky třetinové délky, po n krocích tak máme úsečky délky $\frac{1}{3^n}$. Jelikož však proces opakujeme nekonečněkrát, pro každou délku úsečky d jistě najdeme přirozené číslo k takové, že $\frac{1}{3^k} < d$, z čehož můžeme vyvodit, že Cantorovo diskontinuum neobsahuje žádné intervaly. Aby byl jeho vnitřek neprázdný, muselo by Cantorovo diskontinuum obsahovat otevřenou podmnožinu, což dle definice 1.4.1 nemůže právě z důvodu absence intervalů. Jeho vnitřek je tak prázdný.

Zároveň je Cantorovo diskontinuum jistě uzavřenou množinou, neboť jeho doplňkem je sjednocení všech otevřených intervalů které jsme odebrali a těch dvou, jež byly doplňkem výchozího intervalu do $\mathbb{R}$.

Cantorovo diskontinuum je tedy rovno svému uzávěru, jehož vnitřek je proto prázdný, a skutečně se tak jedná o řídkou množinou v $\mathbb{R}$. $\square$

Cvičení 2.6.1. Dokažte, že množina nemůže být hustá a řídká zároveň.

Řešení cvičení a úloh

Řešení cvičení

Cvičení 2.1.1.

Řešení. Limitní body množiny A jsou a, b, e, f.

Zdůvodnění: a, b, f jsou vždy prvky X a jedné z množin O_1, O_3, které mají neprázdný průnik s A; e je prvkem otevřené množiny X, nadmnožiny A; c je prvkem O_2, která však neobsahuje jiný prvek z A; d je prvkem O_4, která má prázdný průnik s A.

Cvičení 2.1.2.

Řešení. $A' = \{2, 3, 5\}$

Cvičení 2.1.3.

Řešení. Všechny body topologického prostoru kromě množiny O_4 a bodu c.

Cvičení 2.1.4.

Řešení. Nechť x je libovolný bod v diskrétním topologickém prostoru. Jednoprvková množina $\{x\}$ je v něm jistě otevřená a jelikož neobsahuje žádný jiný bod, x nemůže být limitním bodem žádné množiny.

Cvičení 2.2.1.

Řešení. Z definice by to byl takový bod, který není prvkem žádné otevřené množiny. Takový bod však neexistuje, neboť celý topologický prostor je vždy otevřená množina. Tedy každý bod má nějaké okolí.

Cvičení 2.2.2.

Řešení. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Bod $x \in X$ nazveme limitním bodem množiny A, právě když každé (otevřené) okolí bodu x obsahuje bod z A různý od x.

Cvičení 2.3.1.

Řešení. $\overline{\{b\}} = \{b\}$, $\overline{\{a,\, b\}} = \{a,\, b,\, e\}$, $\overline{\{a,\, c\}} = X$, $\overline{\{b,\, d,\, e\}} = \{a,\, b,\, d,\, e\}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$

Cvičení 2.4.1.

Řešení. Existuje nekonečně mnoho správných řešení, uveďme jeden příklad.

Nechť $A = \langle 1,\, 3\rangle$ a $B = (1,\, 3\rangle$. Pak $Int\, A = Int\, B = (1,\, 3)$, tedy inkluze $Int\, A \subseteq Int\, B$ je pravdivá, ovšem $A \not\subseteq B$.

Cvičení 2.4.2.

Řešení. Obecně platí a) $Int\, A \cup Int\, B \subseteq Int\, (A \cup B)$. Protože ze zadání víme, že platí právě jedna inkluze, stačí nám buď ukázat, že platí $Int\, A \cup Int\, B \subseteq Int\, (A \cup B)$, nebo najít protipříklad k $Int\, (A \cup B) \subseteq Int\, A \cup Int\, B$. My uvedeme oba způsoby.

Jelikož $A \subseteq A \cup B$ a $B \subseteq A \cup B$, pak jistě $Int\, A \subseteq Int\, (A \cup B)$ a $Int\, B \subseteq Int\, (A \cup B)$. Sjednocení $Int\, A \cup Int\, B$ je pak určitě podmnožinou $Int\, (A \cup B)$.

Inkluze b) $Int\, (A \cup B) \subseteq Int\, A \cup Int\, B$ neplatí například, pokud vezmeme $A = \langle 0,\, 1\rangle$ a $B = \langle 1,\, 2\rangle$. V tomto případě $Int\, (A \cup B) = (0,\, 2)$ a $Int\, A \cup Int\, B = (0,\, 1) \cup (1,\, 2)$. Zřejmě tedy $Int\, (A \cup B) \not\subseteq Int\, A \cup Int\, B$.

Cvičení 2.4.3.

Řešení.

a) Pravda.

b) Nepravda. Správně je $Int\, \emptyset = \emptyset$ nebo $Int\, X = X$.

c) Pravda. Dle věty 2.4.4 $Int\, (X \setminus A) = X \setminus \overline{X \setminus (X \setminus A)} = X \setminus \overline{A}$.

d) Obecně nepravda. Průnik každých dvou vnitřků je jistě otevřená množina, pokud jsou však obě množiny obojetné, může být i množinou uzavřenou.

Cvičení 2.5.1.

Řešení.

a) Nepravda. Správně je $Int\, A = A \setminus \partial\, A$.

b) Pravda. Hranice je totiž prázdná v případě, že $Int\, A = \overline{A}$, což platí právě když množina A je obojetná.

c) Nepravda. Správně je $(X \setminus A) \cap \overline{A} = \partial A$.

d) Pravda. Z definice hranice a podle věty 2.4.4 platí $\partial\,(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \setminus Int\,(X \setminus A) = (X \setminus Int\, A) \setminus (X \setminus \overline{A}) = \overline{A} \setminus Int\, A = \partial\, A$.

Cvičení 2.6.1.

Řešení. Stačí ověřit, že pokud je množina hustá, nemůže být řídká. Topologický prostor značme X, jeho hustou podmnožinu A.

Pokud je množina A hustá v X, je jejím uzávěrem celý prostor X. Ten je však z definice otevřený, proto $Int\,\overline{A} = X$ a A není řídká.

Řešení úloh

Úloha 2.3.2.a

Řešení. Z definice uzávěru platí, že všechny prvky množiny náleží svému uzávěru, neboli $A \subseteq \overline{A}$ a $B \subseteq \overline{B}$. Pak jistě i všechny prvky průniku $A \cap B$ náleží průniku svých uzávěrů, tedy $A \cap B \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. $\overline{A} \cap \overline{B}$ je průnik dvou uzavřených množin, takže musí být také uzavřený. $\overline{A \cap B}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující $A \cap B$, je to tedy buď $\overline{A} \cap \overline{B}$ nebo nějaká její uzavřená podmnožina, jistě tak platí $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Nyní uveďme příklad $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Mějme množinu $X = \{a, b, c\}$ a na ní topologii $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\}$. Uvažujme množiny $A = \{b\}$

a $B = \{a, c\}$. V tomto topologickém prostoru pak platí $\overline{A} = X$, $\overline{B} = \{a, c\}$, z toho $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ a $\overline{A} \cap \overline{B} = \{a, c\}$. Existuje tedy případ, kdy $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, jak jsme chtěli ukázat.

Úloha 2.3.2.b

Řešení. Nechť x je libovolným prvkem $\overline{A} \setminus \overline{B}$. Budeme chtít dokázat, že $x \in \overline{A \setminus B}$. Využijeme k tomu pojmu okolí.

Pokud $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$, jistě $x \in \overline{A}$. Pak pro každé okolí N bodu x platí, že $N \cap A \neq \emptyset$ (neboť pro každý bod uzávěru $x \in \overline{A}$ z definice musí platit, že každá otevřená množina, a tedy i všechna otevřená okolí bodu x a jejich nadmnožiny N, obsahuje bod z A). Dále když $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$, zřejmě x nemůže být v $\overline{B}$, tedy existuje okolí N_0 bodu x takové, že $N_0 \cap B = \emptyset$, neboli $N_0 \subseteq X \setminus B$.

Protože $N_0 \subseteq X \setminus B$, nutně $N_0 \cap N \subseteq X \setminus B$. Všechna N, tedy speciálně i N_0, mají neprázdný průnik s A, proto $(N_0 \cap N) \cap A \neq \emptyset$.

Z posledních dvou vztahů vyplývá, že $(N_0 \cap N) \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$ ($N_0 \cap N$ má neprázdný průnik s A a prázdný průnik s B). Protože $N_0 \cap N \subseteq N$, dostáváme, že $N \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$ pro všechna okolí N bodu x. Bod x je tak buď prvkem množiny $A \setminus B$ nebo je jejím limitním bodem (neboť pak obsahuje bod množiny $A \setminus B$ různý od x, viz definice 2.1.1), tedy určitě $x \in \overline{A \setminus B}$.

Každé $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$ je i prvkem $\overline{A \setminus B}$, proto $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

Následuje příklad $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$. Zachovejme stejný topologický prostor (X, τ) a jeho podmnožiny A, B jako v příkladu z řešení úlohy 2.3.1a. Opět v něm platí, že $\overline{A} = X$, $\overline{B} = \{a, c\}$, z toho pak $\overline{A} \setminus \overline{B} = \{b\}$ a $\overline{A \setminus B} = X$. Tedy existuje případ, kdy $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$, což jsme chtěli ukázat.

Úloha 2.4.4.a

Řešení. Označme uzavřenou množinu U. Chceme dokázat, že $Int\, U = Int\, \overline{Int\, U}$.

$Int\, U$ je otevřená množina, proto $Int\, U = Int\, (Int\, U)$. Triviálně $Int\, U \subseteq \overline{Int\, U}$. Z těchto dvou tvrzení pak $Int\, U = Int\, (Int\, U) \subseteq Int\, \overline{Int\, U}$, takže $Int\, U \subseteq Int\, \overline{Int\, U}$.

Pro dokázání opačné inkluze vycházejme z toho, že $Int\,U \subseteq U$. Pak $\overline{Int\,U} \subseteq \overline{U}$. Jelikož U je uzavřená množina, $U = \overline{U}$. Tedy $\overline{Int\,U} \subseteq U$. Z toho $Int\,\overline{Int\,U} \subseteq Int\,U$.

Dohromady tyto dvě inkluze dávají požadovanou rovnost $Int\,U = Int\,\overline{Int\,U}$.

Úloha 2.4.4.b

Řešení. Mějme otevřené domény A a B. Chceme ukázat, že $A \cap B = Int\,\overline{A \cap B}$.

Jelikož A a B jsou otevřené množiny, je i jejich průnik $A \cap B$ otevřená množina a $A \cap B = Int\,(A \cap B)$. Z definice $A \cap B \subseteq \overline{A \cap B}$ a proto $Int\,(A \cap B) \subseteq Int\,\overline{(A \cap B)}$. Tedy $A \cap B \subseteq Int\,\overline{A \cap B}$.

Nyní dokážeme opačnou inkluzi, tedy $Int\,\overline{A \cap B} \subseteq A \cap B$.

Vycházejme z toho, že $A \cap B \subseteq A$. Pak jistě $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ a $Int\,\overline{A \cap B} \subseteq Int\,\overline{A}$, přičemž $Int\,\overline{A}$ je naše otevřená doména A, takže $Int\,\overline{A \cap B} \subseteq A$. Z obdobných důvodů $Int\,\overline{A \cap B} \subseteq B$. Všechny prvky $Int\,\overline{A \cap B}$ tak náleží zároveň množině A i B, jistě proto náleží i jejich průniku $A \cap B$. Tedy $Int\,\overline{A \cap B} \subseteq A \cap B$.

Platí obě z inkluzí $A \cap B \subseteq Int\,\overline{A \cap B}$ a $Int\,\overline{A \cap B} \subseteq A \cap B$, tudíž $A \cap B = Int\,\overline{A \cap B}$.

(Můžeme vidět, že pokud bychom chtěli stejným způsobem provést důkaz pro sjednocení dvou otevřených domén, druhá část důkazu by selhala, protože $A \cup B \nsubseteq A$.)

Úloha 2.4.4.c

Řešení. Budeme chtít dokázat dvě implikace, $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$ a $\overline{A} \subseteq \overline{B} \implies A \subseteq B$.

Protože A a B jsou konkrétní podmnožiny topologického prostoru, první implikace platí podle věty 2.3.4.

Dále z věty 2.4.2 víme, že pokud $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, pak $Int\,\overline{A} \subseteq Int\,\overline{B}$. Z definice otevřené domény $A = Int\,\overline{A}$ a $B = Int\,\overline{B}$, takže $\overline{A} \subseteq \overline{B} \implies A \subseteq B$.

Platí tedy obě implikace a $A \subseteq B \iff \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Úloha 2.5.2.

Řešení. Dokážeme nejdříve inkluzi $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$, následně opačnou $\partial A \cup \partial B \subseteq \partial(A \cup B)$.

Předpokládejme, že $x \in \partial(A \cup B)$. Pak z definice hranice $x \in \overline{A \cup B}$ a zároveň $x \notin Int(A \cup B)$. Podle věty 2.3.6 pak $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, tedy x je prvkem alespoň jedné z množin $\overline{A}$, $\overline{B}$. Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit, že $x \in \overline{A}$. Ze cvičení 2.4.2 víme, že $Int\, A \cup Int\, B \subseteq Int(A \cup B)$ a jelikož x nenáleží množině $Int(A \cup B)$, nenáleží ani její podmnožině $Int\, A \cup Int\, B$. Z toho $x \notin Int\, A$ a $x \notin Int\, B$. Takže víme, že $x \in \overline{A} \setminus Int\, A = \partial A$, načež $x \in \partial A \cup \partial B$.

Protože x je libovolný prvek $\partial(A \cup B)$, platí že $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.

Nyní naopak nechť $x \in \partial A \cup \partial B$. Pak nutně $x \in \partial A \vee x \in \partial B$, bez újmy na obecnosti nechť $x \in \partial A$. Z definice hranice následně vyplývá, že $x \in \overline{A} \wedge x \notin Int\, A$.

Z toho, že $x \in \overline{A}$ plynou dvě věci. Zaprvé, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ a podle věty 2.3.6 tak také $x \in \overline{A \cup B}$. Zadruhé, ze zadané podmínky $\overline{A} \cap B = \emptyset$ je jasné, že $x \notin B$.

Když už víme, že $x \in \overline{A \cup B}$, stačí nám dokázat, že $x \notin Int(A \cup B)$. To provedeme sporem. Předpokládejme tedy naopak, že $x \in Int(A \cup B)$. Pak určitě $x \in A \cup B$, neboť ta je nadmnožinou $Int(A \cup B)$. Již jsme zjistili, že $x \notin B$, proto musí $x \in A$. Z druhé zadané podmínky, $A \cap \overline{B} = \emptyset$, pak plyne $x \notin \overline{B}$, jinak řečeno x určitě náleží doplňku $\overline{B}$, tedy $x \in X \setminus \overline{B}$ (pokud topologický prostor nazveme X). Protože množina $\overline{B}$ je z definice uzavřená, je její doplněk $X \setminus \overline{B}$ otevřený (jedná se o otevřené okolí bodu x, které neobsahuje nic z B). Uvažme průnik množiny $X \setminus \overline{B}$ s $Int(A \cup B)$. $X \setminus \overline{B}$ a $Int(A \cup B)$ jsou otevřená okolí x, proto i $(X \setminus \overline{B}) \cap Int(A \cup B)$ je otevřené okolí bodu x. Navíc protože $Int(A \cup B)$ je podmnožina $A \cup B$ a $X \setminus \overline{B}$ neobsahuje nic z B, musí $(X \setminus \overline{B}) \cap Int(A \cup B)$ být zároveň podmnožinou A. Z těchto jeho vlastností vyplývá, že $(X \setminus \overline{B}) \cap Int(A \cup B) \subseteq Int\, A$ ($Int\, A$ je buď rovno $(X \setminus \overline{B}) \cap Int(A \cup B)$ nebo tuto množinu obsahuje). To by znamenalo, že $x \in Int\, A$, což je kýžený spor (již jsme totiž ukázali, že

$x \notin Int\, A$).

Tudíž $x \notin Int\,(A \cup B)$, načež $x \in \partial\,(A \cup B)$. Platí tedy rovněž inkluze $\partial\, A \cup \partial\, B \subseteq \partial\,(A \cup B)$.

Za daných podmínek tak $\partial\,(A \cup B) = \partial\, A \cup \partial\, B$.

Kapitola 3

(Ne)homeomorfní prostory

Homeomorfismy jsou jedním z nejzajímavějších konceptů topologie.

Neformálně řečeno, homeomorfismy popisují, jak můžeme topologické prostory deformovat tak, aby si zachovaly své topologické vlastnosti. Pokud mezi dvěma prostory existuje homeomorfismus, jsou tyto prostory z topologického hlediska stejné.

Protože se topologie nezabývá geometrickými vlastnostmi, jako jsou vzdálenosti nebo úhly, můžou navzájem homeomorfní prostory vypadat dosti různě. Podle klasického matematického vtipu topolog například nepozná rozdíl mezi hrnečkem a donutem - v obou případech se jedná v podstatě o torus.

Obrázek 3.1: Homeomorfní deformace hrnečku do koblihy [27]

Díky této vlastnosti se topologii začalo přezdívat „gumová geometrie“.

Vzhledem k tomu, že se topologie nezabývá pouze geometrickými objekty, je však toto označení poněkud nepřesné.

Topologie zkoumá takové vlastnosti prostorů, které jsou zachovávány při homeomorfních deformacích.

3.1 Spojité zobrazení

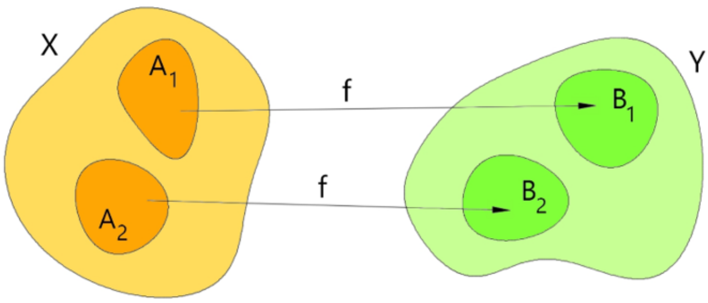
Pro zavedení homeomorfismu je vhodné nejprve znát pojem spojitého zobrazení. Každý homeomorfismus je totiž právě takovým zobrazením.

Pro úplnost uveďme nejprve definici zobrazení obecně.

Definice 3.1.1. Nechť X, Y jsou množiny a každému $x \in X$ je přiřazen právě jeden prvek množiny Y, který budeme značit $f(x)$. Pak řekneme, že f je *zobrazení* z množiny X do množiny Y, což značíme $f : X \to Y$.

Spojité zobrazení následně definujeme s pomocí otevřených množin.

Definice 3.1.2. Nechť (X, τ) a (Y, τ') jsou topologické prostory a f zobrazení z X do Y. Pak $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ nazveme *spojitým zobrazením*, pokud pro každou množinu otevřenou v Y platí, že její vzor je otevřená množina v X.



Obrázek 3.2: Spojitost (A_i, B_i jsou otevřené v X, Y)

Příklad 3.1.3. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = 2x$ pro všechna reálná x. Zřejmě pak vzorem každé otevřené množiny je jiná otevřená množina, například vzorem každého otevřeného intervalu (a, b) by byl otevřený interval $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$. Funkce f je tedy spojitá.

3.2 Homeomorfismus

Formálně je homeomorfismus zobrazení, které jeden topologický prostor zobrazí na druhý způsobem popsaným v následující definici. Prostory, mezi nimiž existuje homeomorfismus, jsou z topologického hlediska shodné a mají stejné topologické vlastnosti.

Definice 3.2.1. Nechť (X, τ) a (Y, τ') jsou topologické prostory. O těchto prostorech řekneme, že jsou *homeomorfní*, pokud existuje zobrazení $f : X \to Y$ s následujícími vlastnosti:

(i) f je bijektivní (každý obraz v Y má právě jeden vzor v X),[1]

(ii) f je spojité,

(iii) f^{-1} je spojité.[2]

Zobrazení f nazveme *homeomorfismem* mezi (X, τ) a (Y, τ'). Zapisujeme $(X, \tau) \cong (Y, \tau')$.

Pokud tedy chceme ukázat, že dva prostory jsou homeomorfní, musíme mezi nimi najít homeomorfismus. Kdybychom chtěli dokázat, že dva prostory homeomorfní nejsou, musíme najít nějakou topologickou vlastnost, kterou nemají společnou. O několika topologických vlastnostech si povíme v části 3.3.

Pokud složíme dva homeomorfismy, získáme opět homeomorfismus, jak dokazuje následující věta.

[1] Neboli body množiny X spárujeme s body množiny Y tak, že žádné nebudou přebývat a žádné nebudou ve vícero párech.

[2] Existence inverzního zobrazení f^{-1} k funkci f vyplývá z bijektivity - body jsou mezi množinami X a Y spárované, proto můžeme zobrazení „obrátit“.

Věta 3.2.2. Nechť (X, τ), (Y, τ') a (Z, τ'') jsou topologické prostory. Pak platí, že pokud $(X, \tau) \cong (Y, \tau')$ a $(Y, \tau') \cong (Z, \tau'')$, pak $(X, \tau) \cong (Z, \tau'')$. [3]

Důkaz. Vycházíme z toho, že mezi prostory (X, τ) a (Y, τ') existuje homeomorfismus f a mezi (Y, τ') a (Z, τ'') homeomorfismus g, tedy f a g mají vlastnosti z definice 3.2.1. Potřebujeme ověřit, že tyto vlastnosti má i složené zobrazení $g \circ f$. [4]

(i) Víme, že každý bod ze Z má právě jeden vzor v Y a každý bod z Y má právě jeden vzor v X, tedy každý bod ze Z má právě jeden vzor v X. Složené zobrazení $g \circ f$ je tedy bijektivní.

(ii) Vzorem každé otevřené množiny ze Z je otevřená množina v Y a vzorem každé otevřené množiny z Y je otevřená množina v X, tedy $g \circ f$ je spojité zobrazení.

(iii) Obrazem každé otevřené množiny z X je otevřená množina v Y a obrazem každé otevřené množiny z Y je otevřená množina v Z, tedy $g \circ f$ má spojité inverzní zobrazení.

□

Dále pokud vezmeme zobrazení inverzní k homeomorfismu f, získáme zřejmě opět homeomorfismus (f^{-1} musí být z definice spojité a bijektivní, $(f^{-1})^{-1} = f$ je spojité).

Cvičení 3.2.1. Vycházejte z definice homeomorfismu. Proč nemohou být množiny $\{1\}$ a $\langle 0, 1\rangle$ homeomorfní?

3.2.1 Homeomorfní prostory

Podívejme se nyní na konkrétní příklady homeomorfních topologických prostorů. Na nich je dobře vidět, jak můžou homeomorfismy topologické prostory měnit a jaké vlastnosti nezachovávají.

[3] Této vlastnosti říkáme *tranzitivita*.

[4] Zápis $g \circ f$ znamená, že nejdřív provedeme f a potom g.

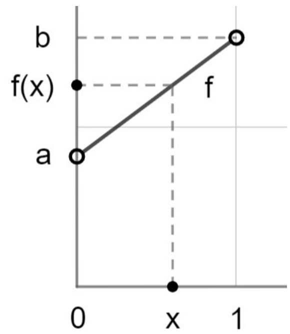
Například následující věta o otevřených intervalech mimo jiné dokazuje, že délka není topologická vlastnost, neboť homeomorfní intervaly mohou být různě dlouhé.

Věta 3.2.3. Každé dva otevřené intervaly (a, b) a (c, d) jsou navzájem homeomorfní.

Důkaz. Dokážeme, že libovolný interval (a, b) je homeomorfní s intervalem $(0, 1)$. To bude k dokázání naší věty stačit, neboť pokud je (a, b) jakýkoliv otevřený interval, pak je s $(0, 1)$ homeomorfní i interval (c, d) a podle věty 3.2.2 tak intervaly (a, b) a (c, d) musí být homeomorfní.

Potřebujeme tedy najít homeomorfismus mezi intervaly $(0, 1)$ a (a, b), konkrétně určíme zobrazení $f : (0, 1) \to (a, b)$, u kterého ověříme, že je skutečně homeomorfní.

Takovým zobrazením může být například $f(x) = (b - a)x + a$. Proč právě tohle zobrazení? Interval (a, b) má délku $b-a$, tedy $(b-a)x$ v předpisu zobrazení nám zaručuje, že interval $(0, 1)$ bude mít po zobrazení požadovanou délku. Začínal by však v 0, proto jej ještě celý musíme posunout o $+a$.



Obrázek 3.3: Zobrazení $f(x) = (b - a)x + a$

Naše zobrazení je lineární funkcí, kde se na sebe zobrazí odpovídající krajní body, je tedy určitě bijektivní. Dále také zřejmě obrazem každého otevřeného intervalu v $(0, 1)$ je otevřený interval v (a, b) (obrazem každého intervalu $(p, q) \subseteq (0, 1)$ je $((b - a)p + a, (b - a)q + a)$). Jelikož všechny otevřené množiny v $(0, 1)$ jsou sjednocením otevřených intervalů, musí každá otevřená množina v $(0,\, 1)$ mít jakožto obraz otevřenou množinu v $(a,\, b)$. Tedy f^{-1} je spojité. Z obdobných důvodů je spojité i f.

Tedy $(a,\, b) \cong (c,\, d)$. □

Identickým způsobem by se dalo dokázat, že všechny uzavřené intervaly jsou homeomorfní.

Typickou ukázkou topologicky shodných prostorů jsou čtverec a kruh. Tento příklad dobře ilustruje, jak lze topologické prostory homeomorfně deformovat.

Pro účely této práce zvolíme čtverec a kruh odpovídajícíh rozměrů, nebylo by však o moc těžší ukázat, že homeomorfní je libovolná dvojice čtverce s kruhem.

Věta 3.2.4. Mějme čtverec a kruh takový, že průměr kruhu je délkou strany čtverce. Takový čtverec a kruh jsou homeomorfní.

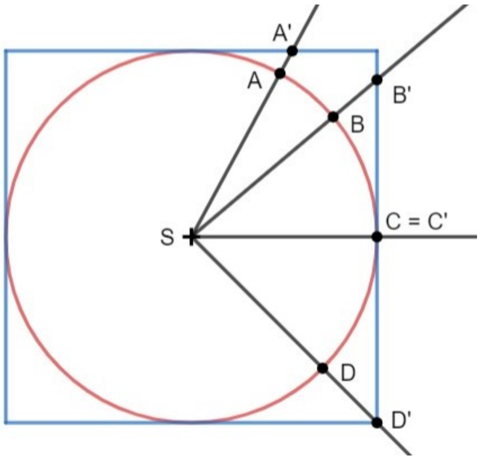
Důkaz. Čtverec a kruh nechť mají společný střed S. Na obou útvarech uvažujeme podprostorovou topologii indukovanou na $\mathbb{R}^2$. Dokažme nejdříve, že jejich hranice jsou homeomorfní.

Zobrazení z kružnice na hranici čtverce zavedeme následovně: každým bodem kružnice vedeme ze středu S polopřímku, obrazem bodu na kružnici je pak bod, ve kterém daná polopřímka protne hranici čtverce, jak je naznačeno na obrázku 3.4.

Nyní ověříme, že takové zobrazení má všechny vlastnosti homeomorfismu z definice 3.2.1.

(i) Je zřejmé, že polopřímky protínají jak kružnici, tak hranici čtverce právě v jednom bodě, zobrazení je tedy určitě bijektivní.

(ii) Každá otevřená množina na kružnici (což jsou množiny bodů kružnice sevřené mezi dvěma jejími body, nebo sjednocení několika takových) se zobrazí do otevřené množiny na hranici čtverce (opět sjednocení množin mezi dvěma body hanice). Můžeme si to představit tak, že body kružnice se jen posunou po polopřímkách do bodů čtverce. Pokud se



Obrázek 3.4: Zobrazení bodů A, B, C, D z kružnice na hranici čtverce

podíváme na obrázek, tak například úsek kružnice mezi body A a B se zobrazí do úseku na hranici čtverce mezi body A' a B'.

(iii) Obdobně bychom ukázali, že každá otevřená množina na hranici čtverce má vzor v otevřené množině na kružnici.

Zobrazení je tedy spojité a má spojité inverzní zobrazení.

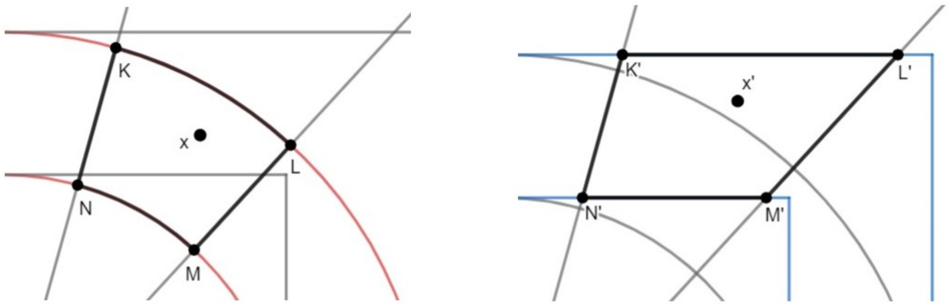
Tedy kružnice je homeomorfní s hranicí čtverce.

Tento výsledek můžeme využít, pokud se podíváme na kruh a čtverec. Ty si totiž můžeme představit tak, že jsou složené z kružnic a hranic čtverce všech možných rozměrů. Zobrazovat budeme vždy z kružnice na hranici čtverce odpovídajícího rozměru.

(i) Protože každá hranice čtverce má vzor na odpovídající kružnici, má i každý bod čtverce svůj vzor v kruhu. Zobrazení je tak bijektivní.

(ii) Ukážeme, že každá otevřená množina v kruhu se zobrazí do otevřené množiny ve čtverci. Pokud x je prvek otevřené množiny v kruhu, musí být z definice obsažen v nějakém otevřeném kruhu. V tomto otevřeném kruhu navíc učitě existuje otevřené okolí bodu x, které je ohraničené dvěma polopřímkami vedoucími z S a částmi dvou kružnic, viz obrázek 3.5. Toto okolí využíváme proto, že víme, že se zobrazí do otevřené množiny ohraničené těmi stejnými polopřímkami z S a částmi odpovídajících hranic čtverce, a bude v ní ležet zobrazený bod x.

Jelikož to platí pro všechna taková x, každá otevřená množina v kruhu se musí zobrazit do otevřené množiny ve čtverci.



Obrázek 3.5: Zobrazení otevřeného okolí bodu x v kruhu

Intuitivně bychom si mohli představit, že otevřené množiny v kruhu zůstanou po zobrazení do čtverce otevřenými množinami, protože se jen „natáhnou“ směrem od středu S.

(iii) Obdobně každá otevřená množina ve čtverci má vzor, který je otevřenou množinou v kruhu.

Čtverec a kruh jsou tak homeomorfní. □

Stejný postup by se dal aplikovat na vícero různých prostorů, například bychom mohli ukázat, že tyto útvary jsou shodné s libovolným pravidelným nebo konvexním mnohoúhelníkem, anebo výsledek se čtvercem a kruhem převést do vyšších dimenzí.

3.3 Topologické vlastnosti

Topologické vlastnosti jsou takové vlastnosti, které jsou zachovávány homeomorfismy. Pokud jsou dva prostory homeomorfní, neexistuje žádná topologická vlastnost, kterou by neměly společnou. Když tak chceme ukázat, že dva prostory nejsou homeomorfní, potřebujeme najít vlastnost, kterou nemají společnou. Několik vybraných topologických vlastností si proto za chvíli představíme.

Dvě topologické vlastnosti již známe - jsou jimi diskrétnost a indiskrétnost prostoru.

3.3.1 Souvislost

Souvislost je pojem, který se krom topologie používá v mnoha dalších oblastech matematiky. V některých těchto odvětvích matematiky (zmiňme například teorii grafů) je souvislost definovaná poněkud specifičtěji s ohledem na konkrétní disciplínu. Pokud je prostor souvislý, vždy to však vyjadřuje, že je nějakým způsobem „v jednom kuse“ a nedá se rozdělit na více částí.

Konkrétnější definice zastřešuje obecnější definice topologická. Ta říká, že prostor je souvislý, pokud se nedá rozdělit na dvě disjunktní otevřené podmnožiny (jiné než X a $\emptyset$, které obsahuje vždy). Jinak řečeno neobsahuje jinou obojetnou podmnožinu než X a $\emptyset$.

Definice 3.3.1. Nechť (X, τ) je topologický prostor. O tomto prostoru řekneme, že je *souvislý*, pokud jedinými obojetnými množinami v tomto prostoru jsou X a $\emptyset$.

Naopak pokud prostor obsahuje i jinou obojetnou podmnožinu, nazýváme jej nesouvislým. Každý prostor je tak vždy buď souvislý, nebo nesouvislý.

Definice 3.3.2. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pokud existuje obojetná množina $A \subseteq X$ taková, že $X \neq A \neq \emptyset$, prostor je *nesouvislý*.

Jedním význačným souvislým prostorem je množina reálných čísel $\mathbb{R}$. Tím, že tento prostor nemá kromě X a $\emptyset$ žádné obojetné podmnožiny, jsme se zabývali již ve cvičení 1.4.3, v této pokročilejší části práce si však dovolíme uvést o něco formálnější důkaz tohoto tvrzení.

Věta 3.3.3. Topologický prostor $\mathbb{R}$ se standardní topologií je souvislý.

Důkaz. Předpokládejme naopak, že existuje množina $A \subseteq \mathbb{R}$, která je obojetná, přičemž $A \neq \mathbb{R}$ a $A \neq \emptyset$. Dále zvolme reálná čísla $a \in A$ a $b \in \mathbb{R} \setminus A$, bez újmy na obecnosti nechť $a < b$.

Uvažme množinu $A \cap \langle a, b\rangle$. Jakožto průnik dvou uzavřených množin je jistě uzavřená. Protože interval $\langle a, b\rangle$ je navíc omezený, musí $A \cap \langle a, b\rangle$ obsahovat svůj největší prvek, který označíme c. Bod c je prvkem průniku dvou množin, musí být obsažen v obou z nich, tedy $c \in \langle a, b\rangle$ a $c \in A$. Pak jistě $c \notin \mathbb{R} \setminus A$ a zároveň $(c, b\rangle \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Protože interval $(c, b\rangle$ je zleva otevřený (neobsahuje svůj limitní bod c), nemůže on ani $\mathbb{R} \setminus A$ být uzavřenou množinou. Množina A tak nemůže být otevřená, což je spor s předpokladem, že je obojetná. $\square$

3.3.2 Kompaktnost

Kompaktnost je vlastnost, která je v topologii skloňována velmi často, některé publikace dokonce tvrdí, že se jedná o vlastnost vůbec nejpodstatnější (např. [24]). Důležitá je například díky svým aplikacím v matematické analýze.

O kompaktnosti hovoří některé slavné topologické věty. Jednou z nich je Poincarého domněnka (teď již věta), jeden ze sedmi tzv. problémů tisíciletí, z těchto zatím jediný vyřešený. Dále například Heine-Borelova věta pak tvrdí, že kompaktní podmnožiny $\mathbb{R}^n$ jsou právě ty, které jsou uzavřené a omezené.

Kompaktnost v jistém smyslu generalizuje pojem konečnosti nebo konečného objemu.

Pro její definici je nejdříve nutné definovat pokrytí otevřenými množinami. To si můžeme představit tak, že nějakou množinu otevřenými množinami opravdu zakryjeme – otevřené množiny se mohou překrývat a jejich sjednocení je nadmnožinou pokrývané množiny.

Definice 3.3.4. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ), I je množina a $\{O_i \mid i \in I\}$ je množina podmnožin X. Množinu $\{O_i \mid i \in I\}$ nazveme *pokrytím* množiny A, pokud $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Pokud je každé O_i otevřená množina, nazveme toto pokrytí *otevřeným*.

Množina je pak kompaktní, pokud z jakéhokoliv takového pokrytí můžeme vybrat konečný počet otevřených množin, které naší množinu stále pokryjí.

Definice 3.3.5. Nechť A je podmnožina topologického prostoru (X, τ). Množinu A nazveme *kompaktní*, pokud lze z každého otevřeného pokrytí vybrat pokrytí konečné.

Cvičení 3.3.1. Dokažte, že množiny $\mathbb{R}$ a $\{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}$ nejsou navzájem homeomorfní, využijte přitom kompaktnost.

3.3.3 Oddělovací axiomy

Existuje spousta vlastností, které sice nemá každý topologický prostor, avšak mají je všechny prostory splňující určitý oddělovací axiom. Oddělovací, nebo také separační, axiomy tak slouží jako dobrý způsob, kterým lze topologické prostory klasifikovat.

Axiom T_0 je z oddělovacích axiomů nejobecnější. Každý další axiom, (s vyšším číselným indexem) pak charakteruzije konkrétnější skupinu topologických prostorů než axiom předchozí. Tedy například prostor, který je T_2, je určitě i T_1 a T_0. Oddělovacích axiomů existuje poměrně mnoho, my si představíme první tři z nich.

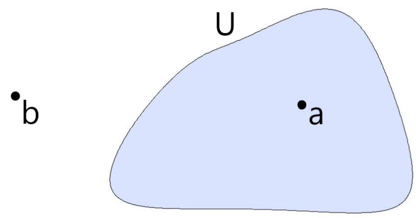
Všechny oddělovací axiomy hovoří o tom, jak mají být body topologického prostoru od sebe oddělené pomocí otevřených množin, uzávěrů apod.

T_0-prostor

V obecném topologickém prostoru může nastat situace, kdy je více jeho bodů obsaženo jen a pouze v těch samých otevřených množinách. Z topologického hlediska pak nemáme možnost mezi takovými body rozlišovat.

Pokud taková situace nenastane a všechny jednotlivé body od sebe odlišit dokážeme, řekneme o takovém prostoru, že je T_0. Jinak řečeno v T_0-prostoru tedy pro každou dvojici bodů musí existovat otevřená množina, která obsahuje jeden z bodů a druhý ne.

Definice 3.3.6. Nechť (X, τ) je topologický prostor. O tomto prostoru řekneme, že je T_0, pokud pro každé dva body $a, b \in X$ existuje otevřená množina U taková, že buď $a \in U$ a současně $b \notin U$, nebo $b \in U$ a současně $a \notin U$.



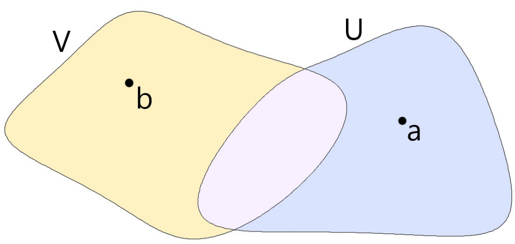
Obrázek 3.6: Body a, b v T_0-prostoru

T_1-prostor

U T_0-prostoru stačilo, aby první bod byl v otevřené množině a druhý kdekoliv mimo ní, v T_1-prostoru musí oba body ležet v různých otevřených množinách, každý právě v jedné.

Definice 3.3.7. Nechť (X, τ) je topologický prostor. O tomto prostoru řekneme, že je T_1, pokud pro každou dvojici bodů $a, b \in X$ existuje otevřená množina U taková, že $a \in U$ a $b \notin U$.

Pokud budeme uvažovat dvojici b, a, z definice rovnou vyplývá, že existuje rovněž otevřená množina V taková, že $b \in V$ a současně $a \notin V$.



Obrázek 3.7: Body a, b v T_1-prostoru

Když se snažíme určit, zda-li je prostor T_1, často se hodí i následjící věta.

Věta 3.3.8. Mějme topologický prostor (X, τ), který je T_1. Pak pro všechna $x \in X$ platí, že $\{x\}$ je uzavřená množina.

Důkaz. Uvažujme všechny body $y \in X$ různé od x. Protože je prostor T_1, musí být každé y prvkem otevřené množiny U_y, která neobsahuje x. Sjednocení všech těchto U_y pak musí obsahovat všechny body topologického prostoru kromě x, jakožto sjednocení otevřených množin se navíc jedná o otevřenou množinu. Její doplněk $\{x\}$ je tak uzavřená množina. $\square$

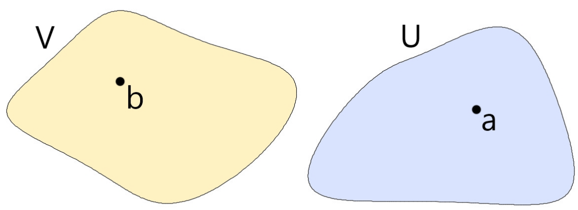
T_2-prostor neboli Hausdorffův

V Úvodu v části 0.1 jsme Hausdorffův prostor již zmínili. Jedná se o prostor, který Hausdorff definoval jakožto topologický, jeho definice však byla později překonána a Hausdorffův prostor tak dnes považujeme za speciální typ topologického prostoru.

Hausdorffovy prostory mají spoustu vlastností, které obecný topologický prostor nemá. Jedná se o nejpoužívanější oddělovací axiom.

V Hausdorffově prostoru jsou různé body oddělené tím, že leží v navzájem disjunktních otevřených množinách.

Definice 3.3.9. Nechť (X, τ) je topologický prostor. O tomto prostoru řekneme, že je T_2, neboli *Hausdorffův*, pokud pro každé dva body $a, b \in X$ existují otevřené množiny U a V takové, že $a \in U$, $b \in V$ a $U \cap V = \emptyset$.



Obrázek 3.8: Body a, b v T_2-prostoru

Cvičení 3.3.2. O následujících prostorech rozhodněte, zda jsou T_0, T_1 či T_2.

a) Množina $X = \{0, 1\}$ s topologií $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$.[5]

b) $\mathbb{R}$ s eukleidovskou topologií.

c) Libovolný diskrétní prostor.

d) $\mathbb{N}$ s topologií, kde uzavřené jsou všechny konečné množiny a $\mathbb{N}$ (otevřené jsou tedy všechny množiny s konečnými doplňky a $\emptyset$).[6]

[5] Tento prostor se nazývá Sierpińského a jedná se o nejmenší netriviální topologický prostor.

[6] Takové topologii se říká kofinitní a dá se definovat na libovolné množině.

Řešení cvičení

Cvičení 3.2.1.

Řešení. Nemůže mezi nimi existovat bijektivní zobrazení. Množina $\{1\}$ obsahuje pouze jediný bod, kdežto interval $\langle 0, 1\rangle$ jich obsahuje nekonečně mnoho. Body z intervalu se tak nemohou zobrazit na různé body množiny $\{1\}$.

Z obdobných důvodů mezi nimi nemůže existovat ani spojité zobrazení - $\langle 0, 1\rangle$ obsahuje nekonečně mnoho otevřených podmnožin, $\{1\}$ má jen jednu, prázdnou.

Neboli problém je v tom, že interval $\langle 0, 1\rangle$ je jednorozměrný a bod $\{1\}$ bezrozměrný.

Cvičení 3.3.1.

Řešení. Ukážeme, že první z množin kompaktní není a druhá je – tím dokážeme, že existuje topologická vlastnost, ve které se liší, a tedy nemohou být homeomorfní.

Abychom ukázali, že $\mathbb{R}$ není kompaktní, stačí nám najít jedno její otevřené pokrytí, ze kterého nelze vybrat konečné pokrytí. Takovým pokrytím je například pokrytí množinami $(n, n+1)$ a $(\frac{2n-1}{2}, \frac{2n+1}{2})$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Toto pokrytí sestává z nekonečně mnoha množin a žádnou nemůžeme odebrat.

Množina $\{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$ obsahuje konečný počet prvků a může tak mít pouze konečný počet otevřených množin. Konečné pokrytí pro ni tak vybereme vždy.

Zjistili jsme tedy, že $\mathbb{R}$ a $\{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$ se liší aspoň v jedné topologické vlastnosti a nejsou tak homeomorfní.

Cvičení 3.3.2.

Řešení.

a) Pouze T_0. Sierpińského prostor má jen dva body a ověření definic je tak snadné. Zřejmě bod 0 je prvkem množiny $\{0\}$, přičemž 1 není, tedy axiom T_0 je splněn. T_1 být tento prostor nemůže, neboť množina $\{0\}$ není uzavřená a axiomem T_2 se tak již zabývat nemusíme.

b) T_0, T_1 i T_2. Nechť a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak můžeme zvolit například otevřené množiny $(a-1, \frac{a+b}{2})$ a $(\frac{a+b}{2}, b+1)$, které jsou disjunktní, přičemž v první uvedené leží a a ve druhé b. Tedy prostor je Hausdorffův, neboli T_2. Nutně tak musí být i T_0 a T_1.

c) T_0, T_1 i T_2. Pro všechny dvojice různých bodů a, b jistě platí, že $\{a\}$ a $\{b\}$ jsou disjunktní otevřené množiny, tedy diskrétní prostor je vždy T_2.

d) T_0 a T_1. Všechny konečné, tedy i všechny jednoprvkové množiny, jsou uzavřené, takže podle věty 3.3.8 je prostor T_1. Abychom ukázali, že prostor není T_2, prozkoumejme zavedenou topologii na $\mathbb{N}$ trochu blíže. Jelikož (kromě $\mathbb{N}$) jsou všechny uzavřené množiny konečné, jejich doplňky musí být vždy nekonečné (resp. $\emptyset$). Každá otevřená množina tak má tvar $\mathbb{N} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Aby byl prostor Hausdorffův, musela by k množině $\mathbb{N} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ existovat disjunktní (neprázdná) otevřená množina - neboli konečná množina $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ by musela mít nekonečnou otevřenou podmnožinu, což jistě mít nemůže.

Závěr

Záměrem práce *Základy obecné topologie* bylo zpřístupnit topologii širšímu publiku.

Motivací byl autorce jednak vlastní zájem o tento fascinující obor, zadruhé také dojem, že je topologie ve stávající literatuře, a to nejen české, bohužel popsána nedostatečně, především pak pro začátečníky. Ve své práci proto cílí právě na ně.

Práce je členěna do několika kapitol. V Úvodu práce informuje o širším kontextu topologie, shrnuje její historii a dále využití v mnoha nematematických disciplínách. V následujících třech kapitolách se zaměřuje na jeden z podoborů topologie, obecnou topologii, která je základem všech ostatních topologických disciplín a tedy dobrým odrazovým můstkem pro další studium topologie. Snaží se srozumitelnou formou představit fundamentální koncepty obecné topologie, přičemž hledá balanc mezi formálními náležitostmi odborné matematické práce a vysvětlováním představovaných pojmů a intuice za nimi schovanou.

Autorka věří, že její cíle byly naplněny a práce tak bude moci sloužit mnoha zájemcům o matematiku jako prvotní seznámení s topologií. Těmi mohou být jak středoškoláci, tak začínající vysokoškoláci, a nakonec v podstatě kdokoliv, koho by toto téma zaujalo. Vedlejším produktem a přínosem práce jsou i nashromážděná cvičení a úlohy s jejich autorskými řešeními.

Přesto práce rozhodně není dokonalá a nemohla obsáhnout vše, co krásný svět topologie nabízí. Naskýtá se tak spousta směrů, kterými by se v práci dalo pokračovat.

Zřejmou cestou k rozšíření této práce by bylo představení další teorie z obecné topologie. Autorka by ráda zpracovala například důkazy některých velkých topologických vět, jmenovitě třeba Heine-Borelovy věty, kterou v práci zmiňuje. Přínosné by mohlo být i vytvoření samostatné sbírky topologických cvičení, ideálně s řešeními.

Nad rámec této práce se lze věnovat četným dalším tématům. Sama autorka hodlá ve studiu topologie v budoucnosti pokračovat. Ráda by se kromě obecné topologie věnovala i jiným topologickým disciplínám, jakými jsou topologie algebraická, diferenciální, původní kombinatorická nebo teorie uzlů. Tato odvětví by mohly být k námětem k jiným pracím. Zaměřit se dá i na aplikace topologie v dalších disciplínách, autorku by zajímalo především propojení topologie s ostatními matematickými obory.

Doufám, že Vás topologie zaujala aspoň z poloviny tak, jako zaujala mě. Pokud máte k práci jakékoliv připomínky, návrhy či jinou zpětnou vazbu, můžete mě kontaktovat skrze email helena.bousovaa@gmail.com.

Literatura a zdroje

1. [online]. [cit. 2023-04-30]. Dostupné z: https://99percentinvisible.org/article/the-seven-bridge-problem-how-an-urban-puzzle-inspired-a-new-field-of-mathematics/.
2. RICHESON, David S. *Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton University Press, 2012.
3. PICKOVER, Clifford A. Eulerův vzorec mnohostěnu. In: *Matematická kniha*. Argo/Dokořán, 2012.
4. O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Johann Benedict Listing - biography*. 2000. Dostupné také z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Listing/.
5. ALBIN, Pierre. 2019. Dostupné také z: https://ghostarchive.org/varchive/XxFGokyYo6g.
6. [online]. [cit. 2023-05-10]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/figure/The-construction-of-a-torus-from-the-unit-square_fig6_304126129.
7. CANTOR, Georg. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Dover Publications, 1915.
8. MOORE, Gregory H. The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology. *Historia Mathematica* [online]. Srpen 2008, roč. 35, č. 3, s. 220–241 [cit. 2023-05-10]. ISSN 03150860. Dostupné z DOI: 10.1016/j.hm.2008.01.001.

9. ALEXANDROV, Pavel S. Poincaré and topology. *Russian Mathematical Surveys* [online]. Únor 1972, roč. 27, č. 1, s. 157–168 [cit. 2023-05-10]. ISSN 0036-0279, ISSN 1468-4829. Dostupné z DOI: 10.1070/RM1972v027n01ABEH001365.

10. FRÉCHET, M. Maurice. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* [online]. Prosinec 1906, roč. 22, č. 1, s. 1–72 [cit. 2023-05-10]. ISSN 0009-725X, ISSN 1973-4409. Dostupné z DOI: 10.1007/BF03018603.

11. PAPADOPOULOS, Kyriakos; SCARDIGLI, Fabio. Spacetimes as Topological Spaces, and the Need to Take Methods of General Topology More Seriously. In: *Current Trends in Mathematical Analysis and Its Interdisciplinary Applications*. Springer International Publishing, 2019, 185–196. ISBN 9783030152420. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-030-15242-0_6.

12. WITTEN, Edward. Topological quantum field theory. *Communications in Mathematical Physics*. 1988, roč. 117, č. 3, s. 353 –386.

13. ASPINWALL, Paul S.; GREENE, Brian R.; MORRISON, David R. Multiple mirror manifolds and topology change in string theory. *Physics Letters B*. 1993, roč. 303, č. 3, s. 249–259. ISSN 0370-2693. Dostupné z DOI: https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91428-P.

14. STORMER, Horst L. Nobel lecture: The fractional quantum hall effect. *Reviews of Modern Physics*. 1999, roč. 71, č. 4, 875–889. Dostupné z DOI: 10.1103/revmodphys.71.875.

15. MOESSNER, Roderich; MOORE, Joel E. *Topological phases of matter*. Cambridge University Press, 2021.

16. ZHANG, Shou-cheng. *Topological states of Quantum matter*. American Physical Society, 2008. Dostupné také z: https://physics.aps.org/articles/v1/6#:~:text=Topological%20quantum%20states%20of%20matter%20are%20very%20rare,initiated%20in%20particle%20physics%20and%20quantum%20field%20theory..

17. HASAN, M. Z.; KANE, C. L. Colloquium: Topological insulators. *Reviews of Modern Physics*. Listopad 2010, roč. 82, č. 4, 3045–3067. ISSN 1539-0756. Dostupné z DOI: 10.1103/revmodphys.82.3045.

18. WILCZEK, Frank. *Physics Today and Tomorrow – Lecture Five – Topology in Physics*. Arizona State University, 2022. Dostupné také z: https://www.youtube.com/watch?v=W0oMJz4X-IA.

19. SOLÀ, Miquel. Aromaticity rules. *Nature Chemistry*. 2022, roč. 14, č. 6, 585–590. Dostupné z DOI: 10.1038/s41557-022-00961-w.

20. SHIMOKAWA, Koya; ISHIHARA, Kai; TEZUKA, Yasuyuki. Topology meets polymers: Introduction. In: *Topology of Polymers*. Tokyo: Springer Japan, 2019, s. 1–5. ISBN 978-4-431-56888-9. Dostupné z DOI: 10.1007/978-4-431-56888-9_1.

21. LEVENE, S. D. Topology in Biology: From DNA Mechanics to Enzymology. In: *Topology in Molecular Biology*. Ed. MONASTYRSKY, Michail Ilych. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, s. 3–21. ISBN 978-3-540-49858-2. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-540-49858-2_2.

22. [online]. [cit. 2023-04-28]. Dostupné z: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ad/Sierpinski-Trigon-7.svg.

23. [online]. [cit. 2023-04-28]. Dostupné z: https://foundation.wikimedia.org/wiki/File:Torus-40-15.svg.

24. MORRIS, Sidney A. *Topology Without Tears*. 1985-2020.

25. ENGELKING, Ryszard. In: *General topology*. Heldermann Verlag, 1989, s. 20.

26. [online]. [cit. 2023-05-06]. Dostupné z: https://physics.ujep.cz/~mlisal/nm_2/sjakoubek/index.html.

27. [online]. [cit. 2023-04-28]. Dostupné z: https://cems.riken.jp/en/laboratory/qmtrt.

Seznam obrázků