



Středoškolská technika 2025

Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT

Využití grafického programu Desmos

Jakub Učík

Gymnázium Zikmunda Wintra

náměstí Jana Žižky 186, 269 01 Rakovník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci vypracoval/a samostatně a použil/a jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze ročníkové práce jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v platném znění.

V Rakovníku dne 11.12.2024 Jakub Učík

Anotace

V mé práci jsem se zabýval grafickým programem Desmos a zkoumal jsem jeho možnosti a funkce. V práci se věnuji funkcím, které se mi zdály zajímavými nebo užitečnými. Část práce jsem věnoval dalším odvětvím programu. Zaměřil jsem se na to, ukázat, co vše program dovede, ukázat, kde má nedostatky a kde naopak vyniká. Jako praktickou část jsem vytvořil obraz podle vzoru pomocí matematických zápisů.

Klíčová slova

Desmos; funkce; využití; 3D objekty

Annotation

In my work, I have been working with the Desmos graphics program and exploring its capabilities and features. In this thesis I discuss the features that I found interesting or useful. I devoted part of the thesis to the beta version of Desmos 3D. In the thesis I focused on showing what the program can do, showing where it has shortcomings and where it excels. As a practical part, I created an image based on a model using mathematical notations.

Keywords

Desmos; functions; use; 3D objects

Obsah

1	Úvod.....	4
2	Program Desmos.....	5
2.1	Základní charakteristika	5
2.2	Historie	5
2.3	Rozhraní programu.....	6
2.4	Využití.....	8
3	2D grafický kalkulátor – početní operace.....	9
3.1	Početní operace	9
3.2	Goniometrie.....	9
3.2.1	Množiny	10
3.3	Číselné operace	11
3.3.1	Nejmenší společný násobek a největší společný dělitel	11
3.3.2	Modulo.....	11
3.3.3	Zaokrouhlování	11
3.4	Speciální funkce	12
4	2D grafický kalkulátor – grafické využití.....	13
4.1	Kartézská soustava	13
4.2	Parametry a posuvníky	13
4.3	Body	13
4.4	Množiny	14
4.5	Funkce – podle tvaru	14
4.5.1	Přímka a její části.....	14
4.5.2	Křivky	14
4.5.3	Goniometrie	15
4.5.4	Polární grafy	16
4.5.5	Rovnice	16
4.6	Nerovnice	17
4.7	Podmínky předpisů.....	17
5	Odvětví programu Desmos - Geometrie	18
5.1	Změny v rozhraní 2D Desmos	18
6	3D grafický kalkulátor	19
6.1	Kartézská soustava	19

6.2	Rozhraní	19
6.3	Grafické znázornění některých těles	19
7	Kalkulátory	20
7.1	Vědecký kalkulator	20
7.2	Kalkulator čtyř funkcí	20
8	Praktická část	21
9	Závěr	26
10	Internetové zdroje	27
11	Seznam obrázků a tabulek	29
12	Zdroje stažených obrázků	30

1 ÚVOD

Desmos je grafický program, který přináší další způsob, jak zpřístupnit matematiku a usnadnit práci s ní studentům, učitelům či dalším uživatelům. Tento program nabízí jednoduché nástroje pro tvorbu grafů funkcí, umožňuje sledovat jejich vlastnosti a objevovat skryté možnosti v matematice.

Cílem této ročníkové práce je představit program Desmos, seznámit s ním čtenáře a ukázat, jak je možné s tímto programem pracovat a jaké má možnosti. Tato práce by zároveň mohla pomoci studentům či učitelům obohatit výuku, řešit matematické úlohy nebo najít alternativní způsoby řešení. Text obsahuje detailní vysvětlení funkcí programu, které jsem považoval za důležité nebo zajímavé, a je doplněn názornými ukázkami, jež usnadňují pochopení dané problematiky.

Praktická část této práce se zaměřuje na aplikaci získaných znalostí v konkrétním projektu, v jehož rámci jsem vytvořil obrázek pomocí grafů funkcí. Tento rozsáhlejší projekt je důkazem toho, že v programu Desmos lze nejen efektivně pracovat, ale také si „hrát“. Projekt je doprovázen postupem tvorby, včetně vysvětlení použitých funkcí. V této části jsem se také zmínil o problémech, které během tvorby nastaly, a o nedostacích programu.

Tato ročníková práce si klade za cíl nejen prezentovat program Desmos jako efektivní nástroj pro práci s matematikou, ale také motivovat k jeho dalšímu využití v praxi. Pevně věřím, že čtenáři této práce ocení přínos programu Desmos a budou mít příležitost obohatit své matematické dovednosti novým a zajímavým způsobem.

2 PROGRAM DESMOS

2.1 Základní charakteristika

Desmos, známý také jako grafický program Desmos, je aplikace zaměřená na práci s funkcemi a jejich grafické zobrazení. Je spravován společností Desmos Studio, což je veřejně prospěšná organizace s cílem pomáhat každému, kdo se učí matematiku. Tým Desmos tvoří 27 členů z 12 zemí, kteří jsou rozděleni do skupin podle různých zaměření.

Desmos je bezplatný pro všechny uživatele a ročně jej využívá více než 75 milionů lidí z celého světa. Tento nástroj pomáhá uživatelům realizovat jejich nápady a vizualizovat je. Na konci práce na projektech nebo výtvorech mohou vznikat skutečná velkolepá díla. Vývojáři spolupracují na tvorbě učebních plánů, výukového softwaru a přijímacích zkoušek pro digitální vysoké školy.

Učebna Desmos je výukový program zaměřený na rozvoj potenciálu studentů prostřednictvím bezplatných digitálních aktivit určených pro školní výuku. Je navržen učiteli pro učitele. Učitelé se mohou zaregistrovat a získat přístup k výukovým materiálům, včetně interaktivních úkolů a ukázek, které mohou využít k přípravě výuky pro své studenty. Mohou také sdílet kód, díky němuž se studenti dostanou k těmto interaktivním úkolům. Program je nabízen pouze v angličtině, jelikož je vyvíjen v Americe.

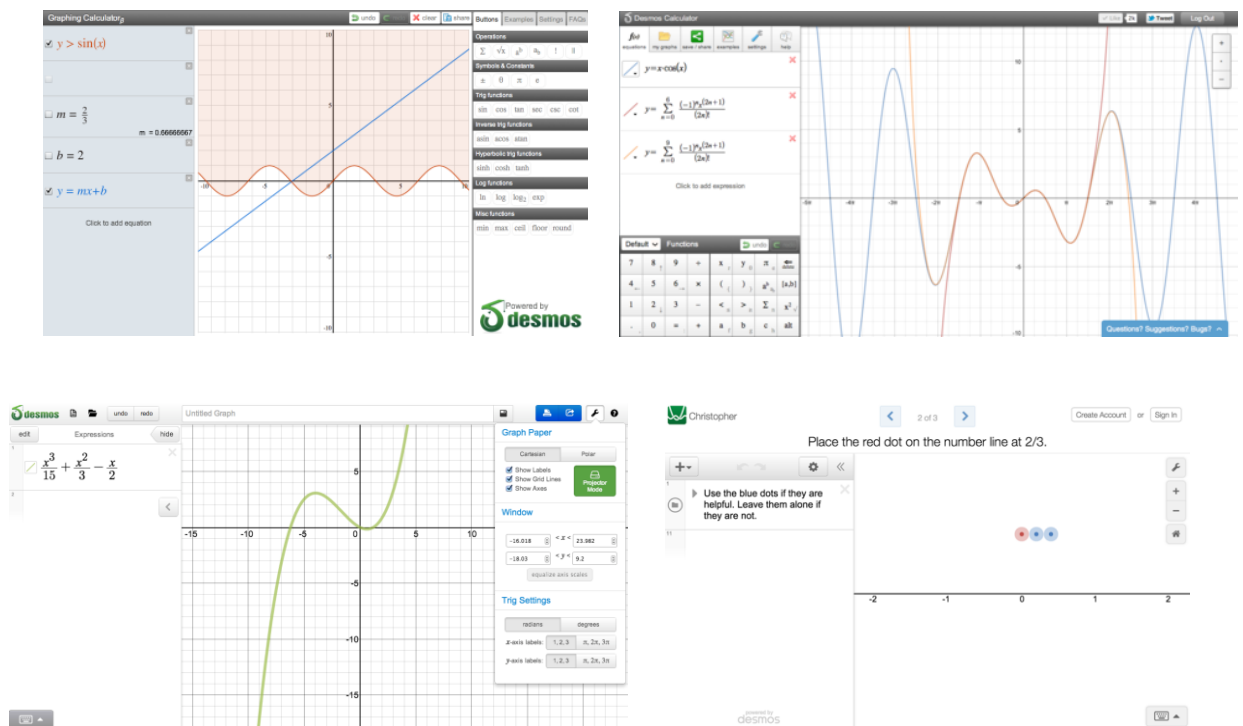
2.2 Historie

Spuštění programu Desmos se datuje na 23. května 2011. Zpočátku byl přístup k programu omezen pouze na uživatele, kteří měli speciální kód. Tento kód bylo možné získat dvěma způsoby. Prvním bylo účastnit se akce TechCrunch – amerického globálního média zaměřeného na nejmodernější technologie a začínající firmy. Druhou možností bylo přihlásit se do zkušební verze programu Desmos, po čemž byl kód zaslán. Už na konci roku 2011 měl program 15 000 uživatelů.

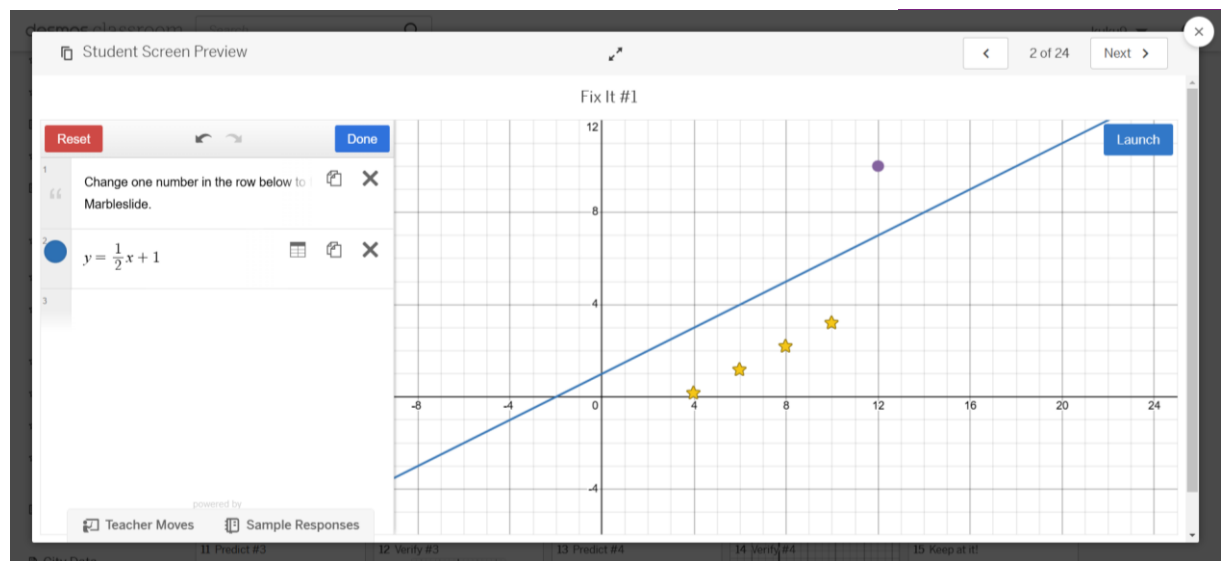
Design programu Desmos se časem měnil (obr. 1). V lednu 2012 získal Desmos nový vzhled, který měl usnadnit ovládání programu a zároveň lépe uspořádat přibývající funkce. Dne 4. ledna 2013 byl představen další nový design, který se již velmi podobá současnému vzhledu. V roce 2015 proběhla poslední zásadní designová úprava, po které následovaly už jen drobné změny.

V témže roce, konkrétně 15. prosince 2015, byla v na webových stránkách programu Desmos vytvořena interaktivní hra nazvaná **Marbleslides** (obr. 5). Ve hře, kde jsou kuličky, je úkolem hráče vytvořit pomocí grafů funkci dráhu, která umožní kuličkám cestou sbírat hvězdičky.

Historie programu Desmos je uchována v archivu na webu Desmos, kam se ve formě blogových příspěvků ukládají všechny důležité milníky a události.



Obrázek 1: Podoba programu Desmos v letech 2011, 2012, 2013, 2015



Obrázek 2: Interaktivní hra Marbleslides vytvořená na webu Desmos Classroom

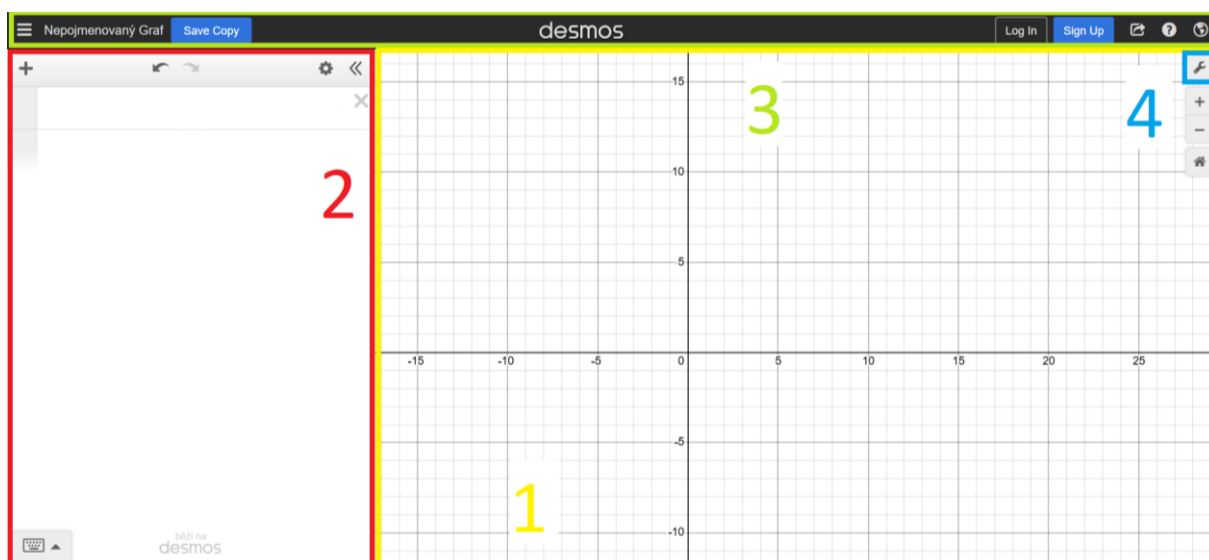
2.3 Rozhraní programu

Nezáleží na tom, zda používám program Desmos v prohlížeči, nebo jako staženou aplikaci. Rozložení programu je naprosto stejné. Největší část plochy zabírá grafické okno s kartézskou soustavou (obr. 6, číslo 1), kde se nachází vše generované programem. Pomocí tlačítek „+“ a „-“ lze přibližovat a oddalovat náhled. Ikona „domeček“ přesune pohled do středu soustavy.

V levé části obrazovky se nachází okno pro zápis předpisů (na obrázku číslo 2), kde se zadávají všechny příkazy. Je možné zapisovat výrazy, vlastní poznámky (např. vysvětlivky, výpočty mimo), tabulky (např. pro zapsání bodů, informace z dat), vytvořit složku (kterou lze sbalit, čímž je možné zjednodušit složitý zápis a přehledně uspořádat více řádků), a jako poslední možnost lze do zápisu vložit obrázek (jakýkoliv obrázkový soubor, který je stažený v zařízení). V horní části obrazovky se nachází ikona nastavení, kde lze upravit vlastnosti příkazů, ať už jde o body nebo přímky. Lze měnit barvu (pro širší spektrum barev lze definovat vlastní odstíny pomocí funkce **rgb**, kterou zmiňuji v kapitole 3.4), sytost, přidávat popisky a duplikovat objekty. Toto okno je možné sbalit.

V nastavení (ikona klíče v pravém horním rohu, číslo 4) lze upravit vlastnosti kartézské soustavy. Možnosti nastavení zahrnují: nastavení velikosti písma a mřížek (velké a malé), obrácení kontrastu barev, přepnutí písma na Braillovo písmo (užitečné pouze pro speciální displeje), zapnutí a vypnutí mřížky, číslování osy, přepínání mezi kartézskou a polární mřížkou, přepínání mezi lineárním a logaritmickým měřítkem os, zapnutí komplexního módu, a nakonec přepínání jednotek úhlu – stupně a radiány. (viz obrázek nastavení)

Nad programem se nachází černá lišta (na obrázku číslo 3). Úplně vpravo lze nastavit jazyk programu, dále se nachází nápověda. Následuje logo pro sdílení výtvorů – to je umožněno na všech zařízeních kromě telefonu. Ke konci roku se objeví logo hvězdiček – soutěž pořádaná každoročně, kde může kdokoli sdílet své výtvořky a vyhrát věcné odměny. Aby bylo možné výtvořky ukládat, je nutné se do programu bezplatně přihlásit. Poté stačí projekty pojmenovat a uložit. Všechny uložené projekty se nacházejí v záložce úplně vlevo.



Obrázek 3: Rozhraní programu Desmos – 1. Grafické okno, 2. Okno pro zápis předpisů, 3. Horní lišta, 4. Nastavení

2.4 Využití

Program Desmos má široké spektrum využití. Lze ho používat jako grafický kalkulátor, který zobrazuje předpisy funkcí v grafickém poli. Díky tomu můžeme sledovat vlastnosti funkcí, jejich umístění a charakter chování. To je jeho hlavní disciplína. Může také sloužit jako kalkulačka, která dokáže spočítat aritmetické operace, algebraické příklady a další. Tato funkce je dostupná ve standardní verzi programu Desmos, nebo je možné využít specifický nástroj – vědecký kalkulátor nebo kalkulátor čtyř operací (+, −, ×, ÷).

Dále je možné řešit geometrii, a to buď v klasickém grafickém kalkulátoru, nebo pro více možností využít nástroj specifický pro geometrii. Dalším nástrojem je Desmos 3D, který je podobný klasickému Desmos, avšak pracuje s dalším rozměrem, tzv. třetím prostorem, a proto je nazýván 3D. Posledním nástrojem, který Desmos nabízí, je maticový kalkulátor. Ten jako jediný dokáže pracovat s maticemi.

Program Desmos má využití v matematice, ale může mít i aplikace v umění – jak výtvarném, tak například hudebním. Pomocí čar a ploch lze vytvářet obrazce, s nimiž se můžete účastnit soutěží pořádaných týmem Desmos a vyhrát různé ceny. Pomocí křivek lze také popsat zvuk. Díky tomu je možné zapsat noty jako spojitou funkci, kterou lze interpretovat jako tóny.

Ve spodní části obrázku (obr. 5) jsou loga všech nástrojů programu Desmos. Pro nové uživatele programu je k dispozici příručka nebo návody, jak s programem pracovat.



Obrázek 4: Nástroje programu Desmos

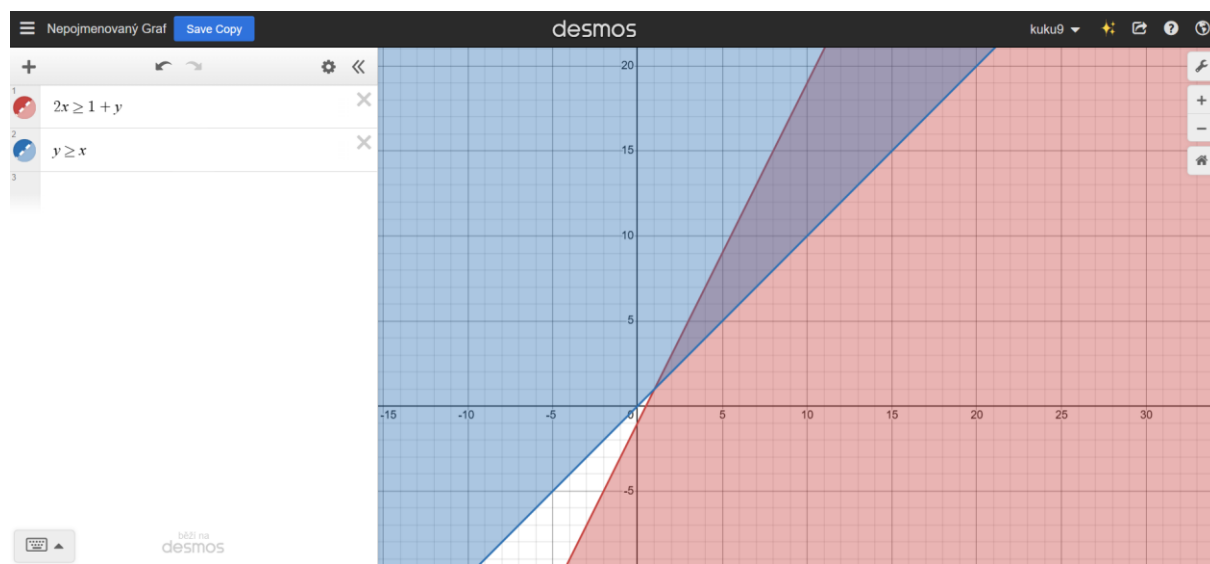
3 2D GRAFICKÝ KALKULÁTOR – POČETNÍ OPERACE

Desmos dokáže víc než jen tvořit grafy, jeho funkce nabízejí i různé výpočty. Umí provádět jednoduché výpočty, řešit rovnice, některé operace z kalkulu, statistiku, ale i jednodušší úkoly z geometrie. V této kapitole bych chtěl ukázat, co všechno Desmos dokáže, názorně to předvést a vysvětlit, jak to využít. Nevýhodou je, že Desmos vypisuje výsledky pouze z množiny racionálních čísel, což znamená ve formě desetinných čísel nebo zlomků. Čísla z množiny iracionálních čísel jsou zobrazena jako desetinná čísla.

3.1 Početní operace

Program Desmos dokáže počítat příklady, které zadám do okna na předpisy. Umí pracovat se sčítáním, odčítáním, násobením a dělením. Prakticky dokáže spočítat vše, co lze přepsat jako konkrétní číslo. Nedokáže však pracovat s výrazy nebo mnohočleny, protože ty nemají pevně stanovenou hodnotu.

Další možností, kterou nabízí, jsou rovnice a nerovnice. 2D Desmos dokáže počítat rovnice a nerovnice o 1 až 2 neznámých, kde jako neznámé musí figurovat „ x “ nebo „ y “. U rovnice o 1 neznámé je výsledkem hodnota souřadnice (souřadnice, kterou jsem v rovnici použil) přímky, kterou Desmos vygeneruje v grafickém okně. U rovnice o 2 neznámých je výsledkem průsečík 2 funkcí, které vzniknou (Desmos tyto 2 rovnice považuje za funkce). U nerovnic je výsledkem vybarvená plocha, přičemž u nerovnic o 2 neznámých je výsledkem společně



vybarvená plocha.

Obrázek 5: Výsledkem soustavy 2 nerovnic je plocha vybarvená oběma barvami – modrou i červenou

3.2 Goniometrie

Desmos dokáže počítat goniometrické příklady pouze přibližně. Jestliže vyžadují, aby spočítal hodnotu funkce a zadám určitý úhel, např. $\sin(\pi/2)$, spočítá, že se to rovná 1. Může však nastat problém, který jsem zmínil na konci úvodu kapitoly 3. Všechny hodnoty, které nejsou

1 nebo 1/2, Desmos vypíše jako zaokrouhlené desetinné číslo. Tyto hodnoty fungují pro radiány a rovněž by fungovaly pro stupně, ale s jinými čísly.

Když chci, aby mi spočítal úhel pro danou hodnotu, např. $\sin(x) = 0.5$, vygeneruje všechny svislé čáry (program neví, jakou souřadnici „y“ přiřadit každému „x“, a tak vygeneruje všechna „y“ – proto vznikají přímky), pro které platí zadaný příklad. Avšak program nedokáže vypsát souřadnice (ani přibližné) „x“.

Desmos nabízí velkou škálu možností goniometrických funkcí:

	Goniometrické funkce	Značení v Desmos
Elementární goniometrické funkce	Sinus	sin
	Kosinus	cos
	Tangens	tan

Tabulka 1: Prakticky využitelné goniometrické funkce

3.2.1 Množiny

Množina je souhrn objektů – čísel, která jsou chápána jako celek. Množinu v programu Desmos vytvoříme pomocí hranatých závorek „[“ a „]“. Tyto množiny si můžeme pojmenovat, abychom s nimi následně mohli pracovat. Když chci, aby se množina nazývala množinou „**M**“, stačí napsat, že písmeno M je rovno dané množině: $M = [...]$ (za „...“ můžeme dosadit jakákoli čísla, která musí být oddělená čárkami). První možnost, jak definovat množinu, je vypsání všech čísel, které v ní chci mít, např. $M = [1, 2, 3, 4, 5]$. Druhá možnost je vypsání první dvě hodnoty množiny, poté napsat „...“ (tři tečky, které nemusí být oddělené čárkami) a napsat poslední číslo množiny. Například, pokud chci mít množinu M, která obsahuje přirozená čísla od 1 do 10, můžu to napsat jako: $M = [1, 2 ... 10]$. Pro množiny se dají využít některé funkce ze statistiky:

mean()	Průměr	Průměr všech hodnot množiny
median()	Medián	Hodnota prostředního čísla
min()	Minimum	Nejmenší číslo množiny
max()	Maximum	Největší číslo množiny
count()	Počet prvků	Spočítá počet prvků množiny
total()	Součet hodnot	Součet všech hodnot množiny

3.3 Číselné operace

3.3.1 Nejmenší společný násobek a největší společný dělitel

Nejmenší společný násobek (NSN) je nejmenší číslo, které je dělitelné všemi zadanými čísly neboli nejmenší číslo, které je násobkem každého z těchto čísel. V programu je tato operace označena jako „**lcm**“, což pochází z anglického výrazu „least common multiple“. Do programu se zadá „**lcm**“ a do závorky daná čísla oddělená čárkami, např: **lcm(3,8)**, a výsledek bude 24.

Největší společný dělitel (NSD) je největší číslo, které beze zbytku dělí všechna zadaná čísla neboli největší celé číslo, které je společným dělitelem těchto čísel. V programu je tato operace označena jako „**gcd**“, což pochází z anglického výrazu „greatest common divisor“. Do programu se zadá „**gcd**“ a do závorky daná čísla oddělená čárkami, např. **gcd(6,14)**, a výsledek bude 2.

3.3.2 Modulo

Zbytek po dělení neboli modulo, je početní operace související s celočíselným dělením. V programu je tato operace označena jako „**mod**“. Do programu se zadá „**mod**“ a do závorky daná čísla oddělená čárkami, přičemž záleží na pořadí – první číslo je dělenec a druhé číslo je dělitel, např. **mod(11,7)**, kde výsledek bude 4.

3.3.3 Zaokrouhlování

Existují tři typy zaokrouhlování – nahoru, dolů a aritmetické. Pro každé z nich má program Desmos příslušnou operaci: **ceil**, **floor**, **round**.

Zaokrouhlení nahoru – *ceil* (z anglického *ceiling*) zaokrouhluje všechna desetinná čísla z množiny reálných čísel nahoru. Například **ceil(4.1)** se rovná 5.

Zaokrouhlení dolů – *floor* (z anglického *floor*) funguje stejně jako **ceil**, ale zaokrouhluje čísla dolů. Například **floor(4.1)** se rovná 4.

Aritmetické zaokrouhlení – *round* (z anglického *round*). Pokud desetinné číslo obsahuje číslici 1–4, zaokrouhluje se dolů, pokud obsahuje číslici 5–9, zaokrouhluje se nahoru. Pokud za zaokrouhlované číslo přidáme číslo, tím definujeme, kolikáté desetinné místo má být zaokrouhlováno. Například **round(3.1415,3)** zaokrouhlí číslo na 3 desetinná místa.

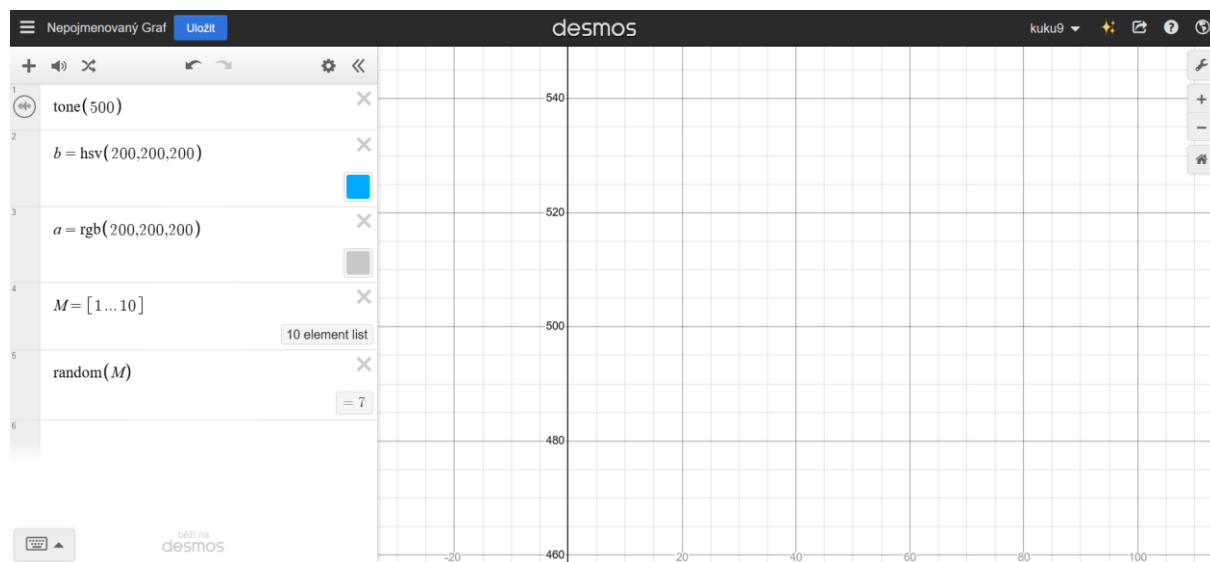
3.4 Speciální funkce

Tone – Funkce, která čte graf a převádí jej na zvukovou formu. Druhou možností je zadání frekvence (jednotka je Hertz – Hz).

Rgb(), **hsv()** – Funkce, které generují odstín barvy na základě vložených hodnot. Funkce **rgb()** pracuje s mícháním tří základních barev: červené, zelené a modré. Funkce **hsv()** funguje na podobném principu, ale s odlišnými hodnotami: odstín, sytost barvy a jas.

Sgn() – Funkce signum, která určuje, zda je dané číslo záporné, nulové nebo kladné. Pokud je číslo „**a**“ záporné, výsledek bude **sgn(a) = -1** Pokud je číslo „**a**“ nulové, výsledek bude **sgn(a) = 0**, pokud je číslo „**a**“ kladné, výsledek bude **sgn(a) = 1**.

Random() – Funkce, která náhodně vybírá nebo generuje čísla. Může vybírat náhodná čísla, pokud do závorky vložíme množinu obsahující alespoň dva prvky. Při náhodném generování čísel funkce generuje hodnoty v rozmezí 0 a 1.

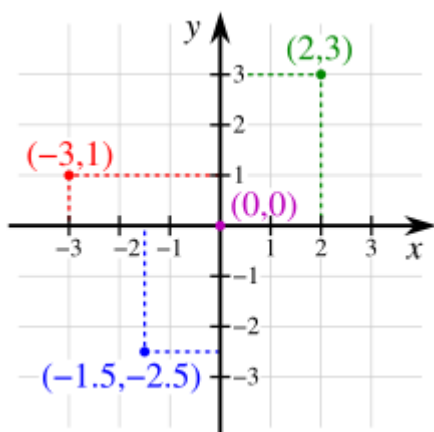


Obrázek 6: Ukázka speciálních funkcí

4 2D GRAFICKÝ KALKULÁTOR – GRAFICKÉ VYUŽITÍ

4.1 Kartézská soustava

Desmos 2D využívá kartézskou soustavu pro 2D prostor. Pracuje se dvěma souřadnicemi (proměnnými): „ x “ a „ y “. Osa x je vodorovná a osa y je kolmá na osu x , tedy umístěná ve svislé poloze.



Obrázek 7: Kartézská soustava 2D

4.2 Parametry a posuvníky

Kromě písmen „ x “ a „ y “, která fungují jako proměnné, může Desmos využívat jakákoliv písmena abecedy pro definování hodnot nebo pojmenování funkce či operace. Parametry a posuvníky se liší tím, že parametry mají jednu hodnotu, která se nemění, zatímco hodnoty posuvníků se mohou měnit (buď automatickým posunem, nebo manuálně tahem).

Existují však písmena, která mají již předem definovanou hodnotu a nelze je používat jako parametry. To se týká písmene „ e “, které je definováno jako Eulerovo číslo, a nelze ho použít pro jinou hodnotu. Při práci v programu Desmos v módu komplexních čísel nelze použít písmeno „ i “.

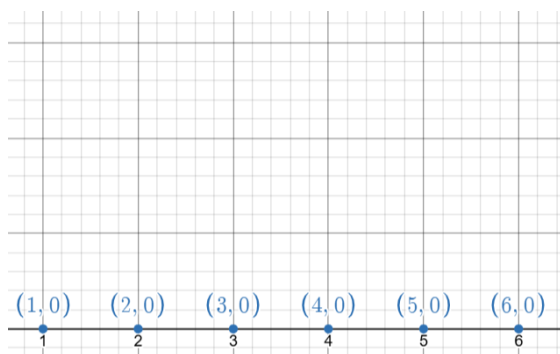
4.3 Body

Pro vložení bodu do programu Desmos je potřeba definovat jeho souřadnice. Zápis bodu se skládá ze závorek, které obsahují dvě hodnoty – souřadnice „ x “ a „ y “, oddělené čárkou. K bodu lze přiřadit také popisek, který je možné nastavit. Lze také umožnit ruční posouvání bodu, kdy můžeme bod vzít a libovolně ho přesunout. Pro další práci s bodem je vhodné bod pojmenovat. Stačí před souřadnice bodu napsat písmeno nebo symbol, kterým chceme bod pojmenovat, např. „ a “: $a = (x, y)$. Poté stačí napsat název bodu, a program ví, že se jedná o tento definovaný bod.

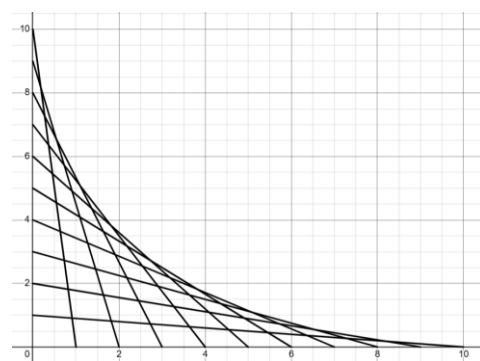
4.4 Množiny

Množiny lze využít i v grafech. Je možné definovat nějakou množinu a pokud název této množiny vložíme například do bodu (může být i ve funkcích), Desmos vykreslí všechny body, které odpovídají číslům v množině. Například můžeme nechat vypsat body množiny „ M “ na ose x : $(M, 0)$. Tento zápis znamená, že na souřadnici „ x “ jsou hodnoty z množiny „ M “ a na souřadnici y je 0 (aby body ležely na ose x).

Díky této možnosti je možno vytvářet zajímavé tvary, např. $y = \frac{xM}{M-(k+1)} + M$ (rovnice 1), kde „ k “ je nejvyšší číslo z množiny. Pro lepší vizuální vzhled upravíme danou funkci použitím podmínky $x, y \geq 0$.



Obrázek 8: výpis bodů množiny „ M “ v grafu



Obrázek 9: graf pro předpis rovnice 1

4.5 Funkce – podle tvaru

V této kapitole se věnuji tvarům funkcí, které jsem podle této vlastnosti rozdělil do skupin

4.5.1 Přímka a její části

Přímky v kartézské soustavě jsou popsány lineární funkcí. Jeden ze speciálních případů lineární funkce je funkce s absolutní hodnotou. Další lineární funkcí může být funkce konstantní, která představuje vodorovnou přímku vůči ose x . Vodorovná přímka vůči ose y je zmíněna v kapitole 4.5.5, ale již se nejedná o funkci.

Předpis lineární funkce: $y = ax + b$

Předpis lineární funkce s absolutní hodnotou $y = |x|$

Předpis konstantní funkce: $y = 0$

4.5.2 Křivky

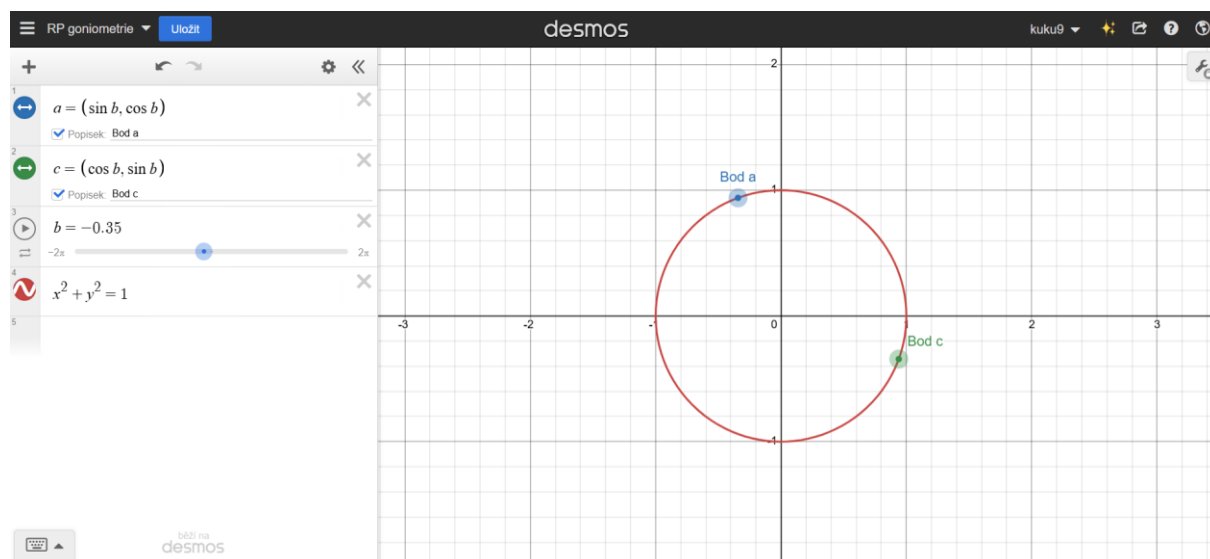
Tyto funkce mají využití, když je potřeba popsat zakřivenou linii. Lze použít mocninné funkce, které jsou schopny popsat většinu křivek, ale pro větší přesnost je lepší využít logaritmické a exponenciální funkce. Tyto funkce mají lepší využití, protože rostou nebo klesají plynule,

zatímco mocninné funkce na začátku rostou nebo klesají pomalu, ale následně se jejich růst nebo pokles výrazně zrychlí.

- Předpis mocninné funkce: $y = x^a$
- Předpis exponenciálních funkcí je: $y = a^x$
- Předpis logaritmické funkce je: $y = \log_a x$ (popřípadě $y = \ln x$, kde „ a “ je rovno Eulerově konstantě)

4.5.3 Goniometrie

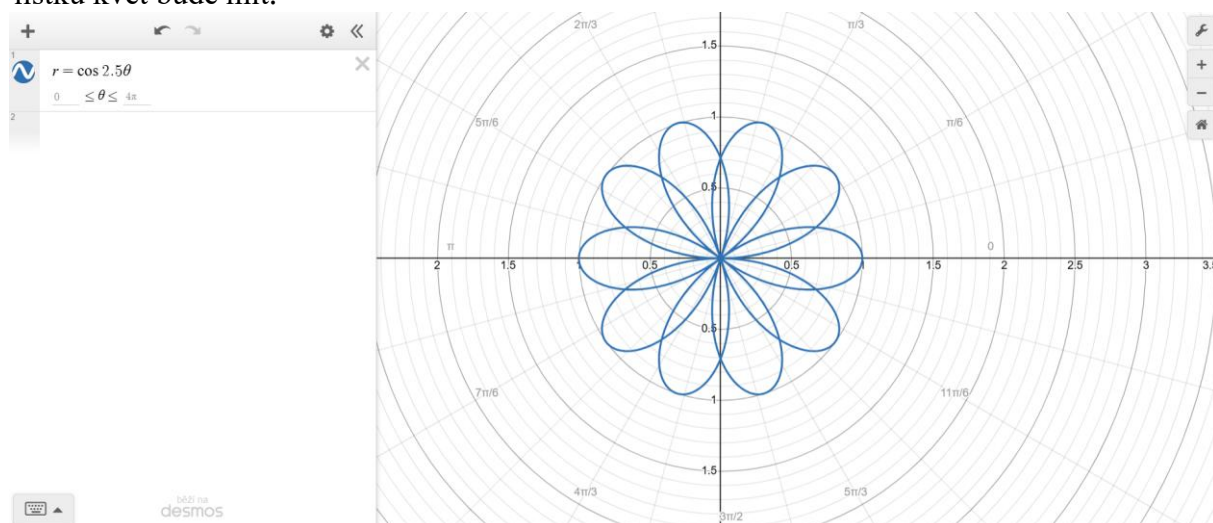
Goniometrické funkce se dají využít při popisování například vln nebo tvarů s opakováním (které se objevují několikrát za sebou). Největší využití mají funkce sinus a kosinus, které lze využít k popisu pohybu bodů po kružnici podle předpisu: $a = (\sin(b), \cos(b))$. Při rostoucí hodnotě „ b “ bude bod „ a “ obíhat kružnici po směru hodinových ručiček. Pro pohyb v protisměru je zapotřebí prohodit sinus a kosinus v předpisu: $a = (\cos(b), \sin(b))$. Při úpravách poměru funkcí sinus a kosinus vůči sobě se tvar opsané kružnice změní na elipsu.



Obrázek 10: ukázka využití sinu a kosinu při pohybu po kružnici

4.5.4 Polární grafy

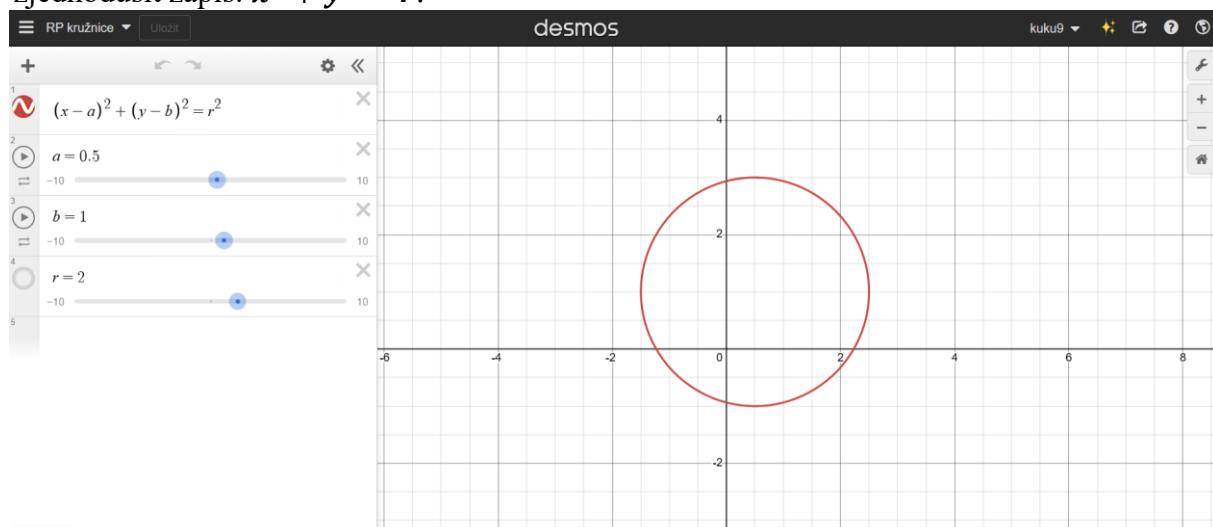
Polární graf je specifický typ grafu určený pro funkce cyklického tvaru. Oproti kartézským grafům, které využívají souřadnice „ x “ a „ y “, se u polárního grafu používají tzv. polární souřadnice „ r “ (určující vzdálenost od středu souřadného systému) a „ θ “ (úhel mezi spojnicí tohoto bodu a počátku, měřený od osy x). Mezi nejznámější grafy v polární soustavě patří lotosový květ. Pro tento graf platí předpis: $r = \cos(a\theta)$, přičemž za „ a “ dosadíme hodnotu 2,5, čímž vznikne květ s 10 okvětními lístky. Čím vyšší bude hodnota „ a “, tím více okvětních lístků květ bude mít.



Obrázek 11: Lotosový květ v polárním grafu

4.5.5 Rovnice

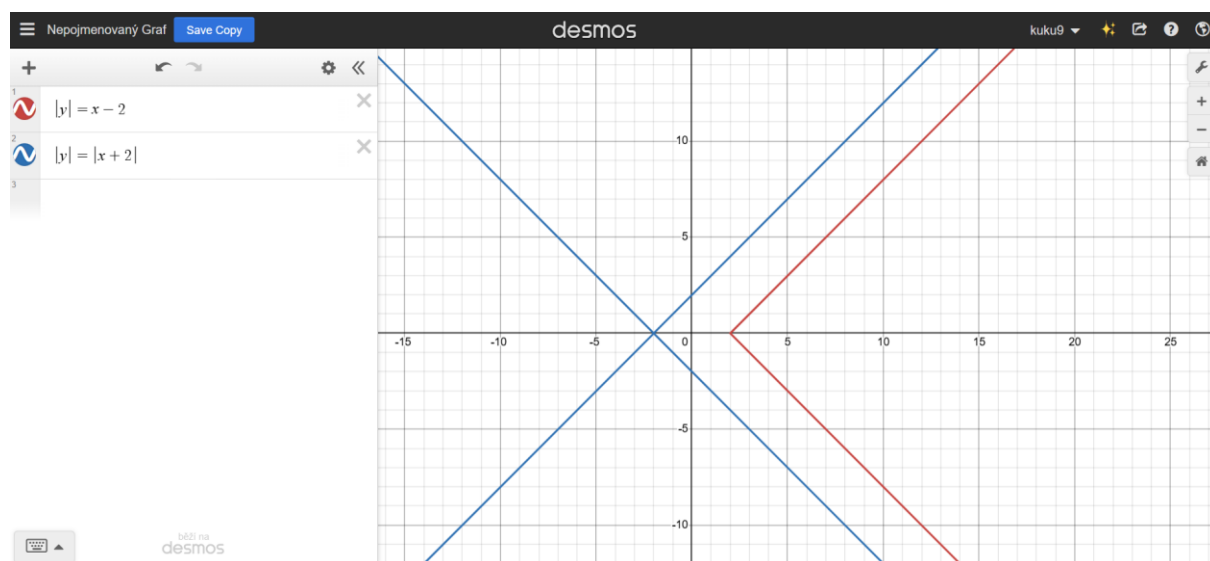
Kružnice - předpis pro kružnici je: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, kde „ a “ a „ b “ jsou souřadnice středu kružnice a jsou z množiny reálných čísel a $r > 0$, protože není možné mít záporný poloměr, respektive zápornou délku. Změnou hodnot „ a “ a „ b “ se posouvá kružnice. Pro kružnici se středem v počátku souřadného systému jsou hodnoty: $a, b = 0$, proto lze zjednodušit zápis: $x^2 + y^2 = r$.



Obrázek 12: rovnice kružnice s parametry a, b, r

Podobný tvar kružnici, se nazývá elipsa. Tohoto tvaru lze dosáhnout změněním poměru $\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{1}$. Když je poměr větší než 1, tj. $x^2 > y^2$, kružnice se zúží vpravo i vlevo. Při poměru menším než 1, tj. $x^2 < y^2$, dojde k zúžení kružnice nahoře i dole.

Funkce s „y“ v absolutní hodnotě – Desmos umožňuje používat absolutní hodnotu i pro „y“ souřadnice, např. předpis: $|y| = x$, což vytváří odraz grafu zrcadlenou podle osy x. Předpis: $|y| = |x|$, vytváří odraz grafu podle obou os – osy x a y.



Obrázek 13: rovnice s absolutní hodnotou, jsou posunuté, aby neměly společnou část

4.6 Nerovnice

Nerovnice, myšlené v grafickém znázornění, fungují následovně: Desmos vytvoří funkci na základě stejného předpisu, ale místo nerovnosti použije znaménko „=“ (rovná se). Následně, podle znaménka nerovnosti, vykreslí plochu buď nad touto funkcí, nebo pod ní. Když „ $f(x)$ “ nebo „ y “ je „ $>$ “ nebo „ $\geq$ “, Desmos vykreslí barevnou plochu nad danou funkcí. Když „ $f(x)$ “ nebo „ y “ je „ $<$ “ nebo „ $\leq$ “, vykreslí plochu pod funkcí.

4.7 Podmínky předpisů

Podmínky předpisů neboli omezení funkcí, se vztahují k směru, který v podmínce uvedu. Ukážu, co tím mám na mysli, na příkladu i s videem: Je množina „ M “, která obsahuje všechna reálná čísla. Teď chci, aby tam zůstala jen kladná reálná čísla. Mohu říct, že v množině „ M “ zůstanou jen čísla, která jsou větší než nula ($M \in \mathbf{R}^+$). Když to vezmu jako funkci, například konstantní $y = 0$, e to přímka, která obsahuje všechna čísla v intervalu $(-\infty; \infty)$. A když budu chtít tuto funkci omezit $y = 0$ stejně jako množinu „ M “, přidám předpis $\{x > 0\}$, který znamená: funkce $y = 0$ funguje pro všechny x větší než nula. V programu Desmos se pro předpisy používají složené závorky.

5 ODVĚTVÍ PROGRAMU DESMOS - GEOMETRIE

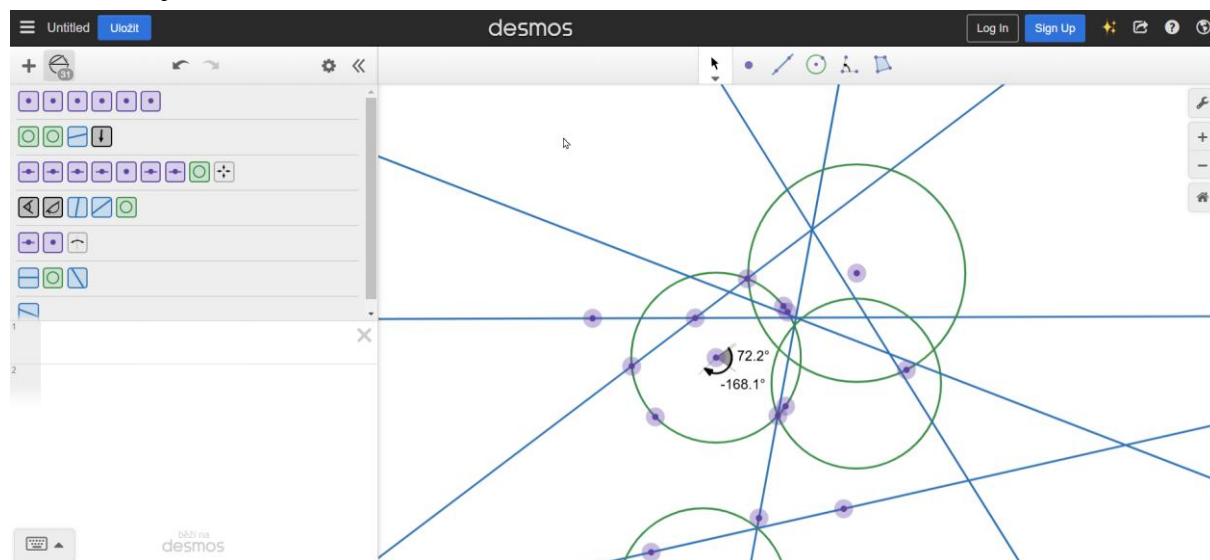
5.1 Změny v rozhraní 2D Desmos

Vzhled programu Desmos zaměřeného na geometrii je velmi podobný grafickému kalkulátoru. Přidaná horní lišta s nástroji, okénko pro všechny geometrické prvky a vypnuté osy x a y (v nastavení lze opět zapnout).

Horní světle šedá lišta obsahuje záložky, přičemž každá z nich zahrnuje určité geometrické prvky:

- **Záložka 1 (logo počítačové myši)** umožňuje uchopovat objekty a posouvat je nebo měnit jejich velikost. Zároveň umožňuje pohyb po ploše.
- **Záložka 2 (logo tečky – bod)** umožňuje vytvářet body a středy dvou různých bodů.
- **Záložka 3 (logo úsečky)** umožňuje vkládat přímky, úsečky, polopřímky, vektory, rovnoběžky, kolmice a osy úhlů.
- **Záložka 4 (logo kružnice)** umožňuje vkládat kružnice a kruhové výseče.
- **Záložka 5 (logo úhlu)** umožňuje měřit příslušné úhly.
- **Záložka 6 (logo n-úhelníku)** umožňuje rýsovat n-úhelníky.

Při výběru objektů lze objekty upravovat. Na liště se objeví možnosti úprav, jako jsou rozšiřování nebo shodná zobrazení: posunutí, osová/středová souměrnost a otáčení. Nahoře v okně pro předpisy funkcí se nachází záložka, která obsahuje všechny geometrické objekty vytvořené v okně předpisů. Při najetí myši na jakýkoliv objekt se ukáže, jaké další objekty jsou na tomto objektu závislé.



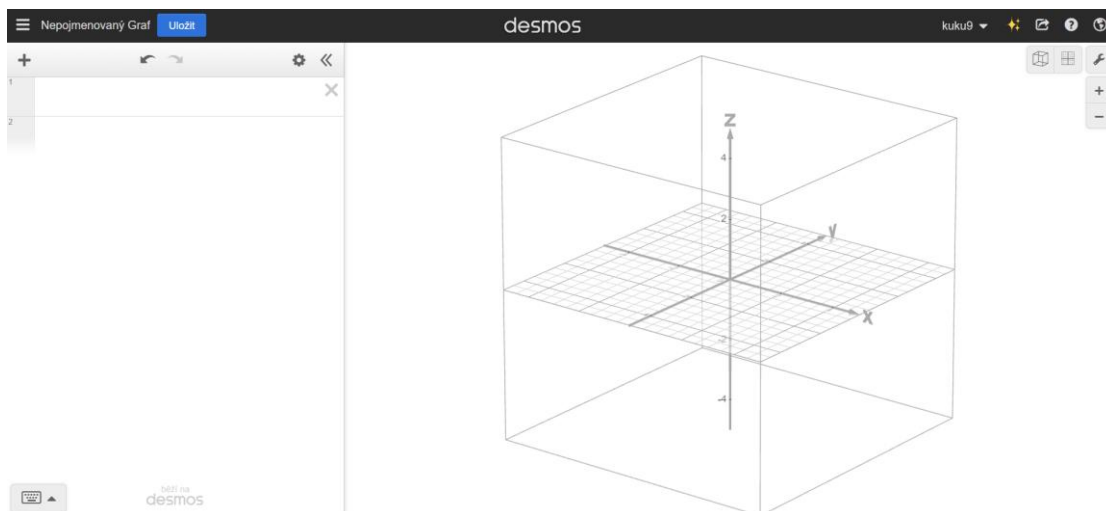
Obrázek 14: Rozhraní programu Desmos - Geometrie

6 3D GRAFICKÝ KALKULÁTOR

6.1 Kartézská soustava

Nejdříve je nutné probrat kartézskou soustavu tohoto odvětví programu Desmos, protože to je hlavní rozdíl, který ho odlišuje od ostatních odvětví programu.

Jedná se o pravotočivou třírozměrnou kartézskou soustavu, kde osa **z** směřuje kolmo vzhůru (výška). Tři dimenze neboli tři souřadnice: **x**, **y**, **z**.



Obrázek 15: 3D grafický kalkulátor - rozhraní

6.2 Rozhraní

Jediný rozdíl oproti 2D grafickému kalkulátoru spočívá v grafickém okně. Je zde vidět krychle, v níž jsou všechny osy a mřížka. Krychle slouží jako pole, ve kterém se vše vykresluje, a vše, co přesahuje její rozměry, je useknuto. Pomocí kolečka na myši nebo tlačítek plus a minus lze přibližovat nebo oddalovat zobrazení – mění se rozměry uvnitř krychle. Pohled lze také měnit pomocí posuvníku v nastavení (ikona klíče) mezi zobrazením reálným a perspektivním.

6.3 Grafické znázornění některých těles

Do předpisů lze používat všechny tři souřadnice. V předpisech, kde se nevyskytuje souřadnice **z**, se objeví tlačítko, které umožňuje prodloužení objektu. Například: Napišu předpis **y = 2**, což vygeneruje přímku, která leží v rovině XY (pro posun do výšky lze připsat podmínku, kde souřadnici **z** přiřadíme nějaké číslo), a Desmos ji nabídne prodloužit do osy **z** (vznikla by rovina vodorovná s osou **z**). Tímto způsobem lze vytvářet z přímek roviny, z kružnic válce apod.

Koule – $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, kde **r** je poloměr koule.

Válec – $x^2 + y^2 = r^2$, což je vzorec pro kružnici, ale program nabízí možnost prodloužit kružnici do 3. prostoru, čímž vznikne válec s nekonečnou výškou a pro definování určité výšky a pro omezení výšky lze připsat podmínku pro jaké **z** má válec být, např. $\{z \geq 0\}$, kde válec bude začínat ve výšce $z = 0$ a poroste do nekonečna.

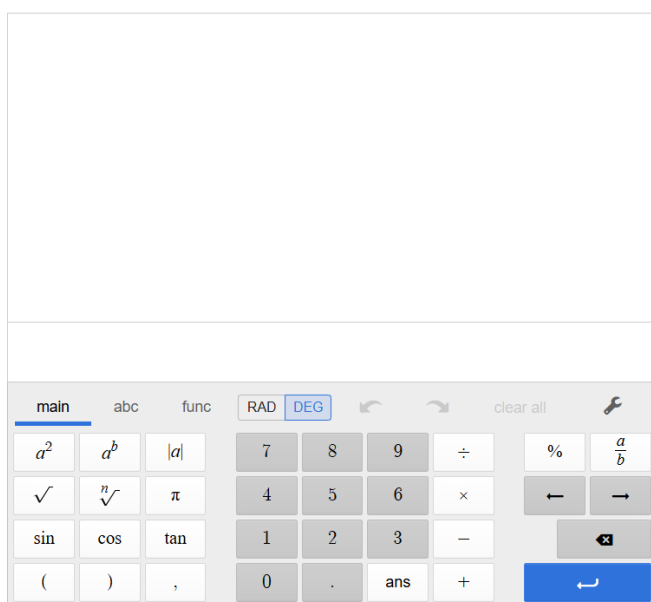
7 KALKULÁTORY

7.1 Vědecký kalkulátor

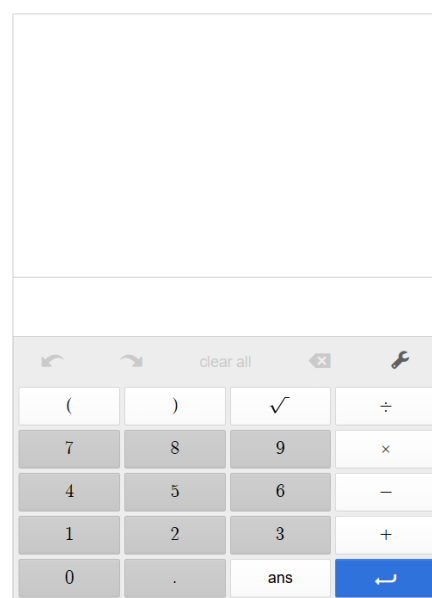
Tento kalkulátor nabízí početní operace, jako jsou: sčítání/odčítání, násobení/dělení, mocniny/odmocniny, logaritmy, hodnoty goniometrických funkcí, mnohočleny se zadanými hodnotami jednotlivých členů, příklady s komplexními čísly apod. Výsledky poskytuje pouze ve formě čísel. Nepodporuje rovnice.

7.2 Kalkulátor čtyř funkcí

Tento kalkulátor nabízí pouze operace (funkce) sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocniny. Odmocniny se jeví jako pátá operace, ale jsou zde z důvodu, že mocniny lze zapsat ve tvaru násobení, což není možné bez exponentu nebo odmocniny.



Obrázek 16: Vědecký kalkulátor



Obrázek 17: Kalkulátor čtyř funkcí

8 PRAKTICKÁ ČÁST

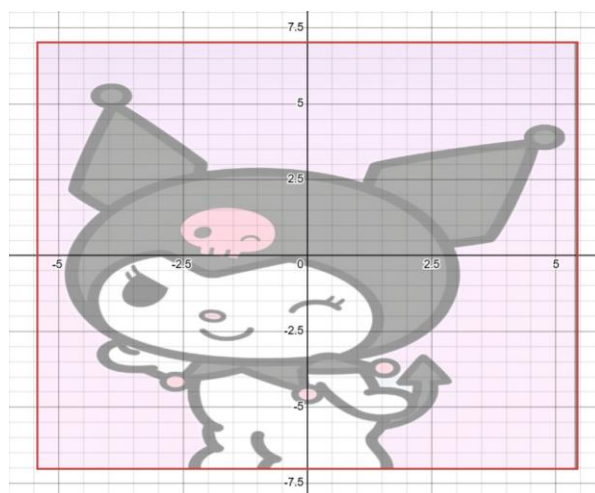
V praktické části jsem se zaměřil na využití grafického kalkulátoru Desmos k vytvoření identického, mnou zvoleného, obrázku pomocí matematických funkcí. Uvedl jsem průběh tvoření a popis myšlenkového postupu. Jako předlohu jsem si zvolil animovanou postavičku, kterou jsem si stáhl na internetu ve formátu obrázku. Program Desmos nabízí vkládání fotek do grafického okna.

Na začátku projektu jsem vložil do grafického okna obrázek. Každý obrázek má ve středu bod se souřadnicemi, na kterém je závislý a abych přemístil obrázek, musím posunout ten bod. Pro jednoduchost jsem bod nechal v počátku souřadného systému. Jelikož Desmos nabízí jen 6 barev, musel jsem si definovat vlastní barvy pomocí funkce **rgb()**, do závorek jsem napsal odstíny barev na obrázku (růžová, fialová a bílá) a každí funkce **rgb()** musela být zvlášť pojmenovaná, aby se zobrazila v nabídce změny barev – např. **A = rgb(255, 153, 255)** pro odstín světle fialové.



Obrázek 18: Animovaná postava Kuromi

Následně jsem si ohraničil obrázek pomocí geometrických rovnic přímky: $x = 5, y = 6$, např. čísla 5 a 6 (a připsal jsem k předpisům parametry (interval, pro který přímka funguje), z čehož mi vznikly úsečky. Potřeboval jsem vytvořit rámeček, a to jsem vytvořil osu souměrnosti s absolutní hodnotou u souřadnic x, y . Vznikly předpisy $|x| = 5, |y| = 6$. „Jaké x je rovno 5 v absolutní hodnotě?“ $x_1 = -5, x_2 = 5$.“ Takto jsem vytvořil rámeček pro obrázek (označen červenou barvou, aby byl vidět).



Obrázek 19: ukázka zvýrazněného rámečku obrázku

Dále už následovalo opisování postavičky pomocí funkcí, kde jsem neapeloval na přesném opisování obrázku. Začal jsem s obrysem hlavy, protože je největší a nejjednodušší, kterou jsem popsal rovnicí elipsy (rovnice kružnice: $x^2 + y^2 = r^2$, kde jsem zvětšil „ y “, aby vznikla elipsa). Na zbytek těla jsem využil funkce/rovnice vypsane v příložené tabulce:

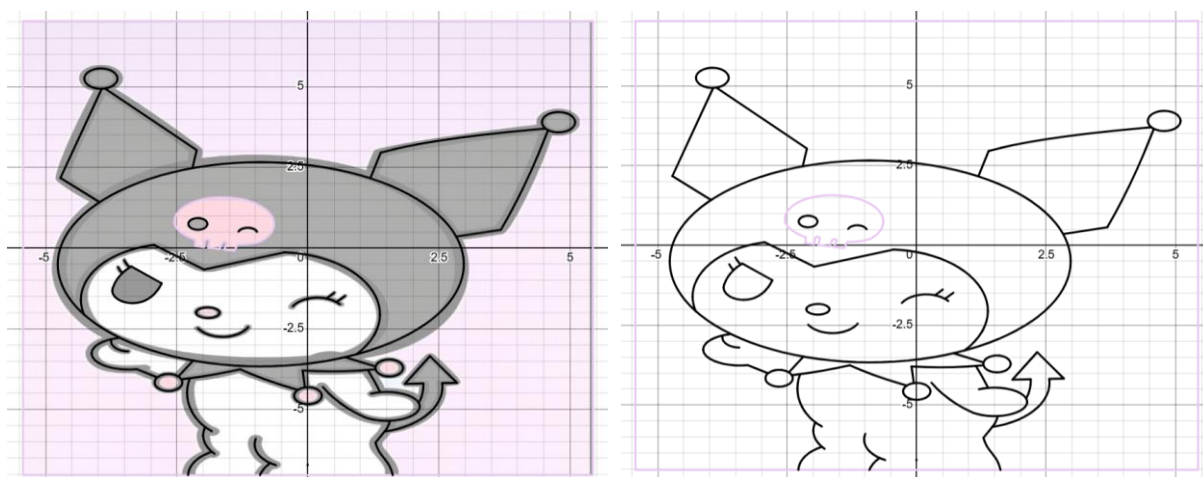
Lineární funkce	$y = ax + b$
Lomené funkce	$y = \frac{ax + c}{bx + d}$
Exponenciální funkce	$y = a^x$
Logaritmické funkce	$y = \log_a x$
Rovnice kružnice	$x^2 + y^2 = r^2$
Kotangens	$y = \cot(x)$

Tabulka 3: užívané funkce/rovnice v projektu

Opisování zbytku těla bylo náročné, protože se zde nacházely složitější tvary a ty jsem musel opisovat více funkcemi, které jsem pak navazoval na sebe. Tady je ukázka 1 předpisu, který jsem v projektu na vytvoření obrysu použil:

$$y = \frac{x}{30} - 4.265\{1.848113 \leq x \leq 2.843878\}\{x \leq 2.201067, x \geq 2.559087\}$$

Tento předpis je lineární funkce, kde x je děleno velkým číslem, takže funkce roste velmi pomalu, číslo 4.265 posouvá funkci dolů, protože je tam znaménko mínus. Za předpisem se nachází 2 složené závorky. Předpis platí jen, když všechny podmínky (závorky platí) – zároveň musí být splněna podmínka levé i pravé závorky. V pravé závorce se nachází 2 podmínky oddělené čárkou. V tomhle případě musí platit alespoň 1 z podmínek – buď je x menší, než to číslo, nebo musí být větší než to druhé číslo. Nebo aby platily obě nerovnosti, což v tomhle případě může platit vždy jen 1.



Obrázek 20: obrys Kuromi s pozadím (vlevo) a bez pozadí (vpravo)

Tady už je ukázka hotového obrysu. S obrázkem v pozadí to vypadá dobře, ale jakmile odeberu pozadí, zbude jen obrys bez ničeho. Proto jsem se rozhodl pokračovat v projektu a z obrysu udělat celý obrázek. To znamená, že jsem musel do předpisů musel přidat nerovnice, které vytváří plochu v kartézské soustavě. Začal jsem předpisy přepisovat z rovnic na nerovnice za pomoci znaménko **větší/menší** a nebo **větší/menší nebo rovno**.

Takto vypadá obrázek Kuromi poté, co jsem přepsal skoro všechny předpisy na nerovnice (neměnil jsem předpisy pro, z našeho pohledu, pravé oko). Je vidět, že je potřeba upravit, a i přidat další podmínky. Zneviditelnil jsem všechno a začal jsem od rámečku. Do podmínek jsem musel zahrnout celý obrys Kuromi. Celé pozadí nešlo vybarvit jedním předpisem, takže jsem to musel rozdělit na 4 předpisy, kde každý vyplňoval jinou část pozadí. Po dlouhých úpravách vznikl předpis:



Obrázek 21: Kuromi po přepsání rovnic na nerovnice

$$|y| \geq 7.03 \{ |x| \leq 5.435 \} \{ (x + 0.9)^2 + 1.5(y + 0.5)^2 > 15 \}$$

$$\{y < -x - 2.55, y > 3.5x + 18.7, y > -1.09x + 0.72, y < 7x + 17.9\}$$

$$\{(x + 3.95)^2 + (y - 5.25)^2 \geq 0.1\}$$

$$\{y > 4x - 2.6, y > 1.45 \log(x) + 2.75, y < 1.61^x - 5.2, y < 0.25x - 0.35\}$$

$$\{(x - 4.78)^2 + (y - 3.9)^2 > 0.1\}$$

$$\{y > -0.5x - 3.02, (x - 0.45)^2 + (y - 1.66)^2 > 30\}$$

$$\{(x - 1.55)^2 + (y + 3.71)^2 > 0.07\} \{y > -(x + 0.19)^2 - 2, -y > -3.75\}$$

$$\{(x - 1.5)^2 + 2(y + 4.9)^2 > 0.4\} \{(x - 0.47)^2 + (y + 4.25)^2 > 3\}$$

$$\left\{ y > 1.8x - 7.53, y > -1.6x + 0.38, y < \frac{x}{30} - 4.265 \right\}$$

$$\{(x - 1.15)^2 + (y + 4.3)^2 > 2\} \{y > 2x - 8.6\}$$

$$\{y > -6.02207, x > 1.7, x < 0\} \{(x + 1.45)^2 + (y + 7.05)^2 > 0.7\}$$

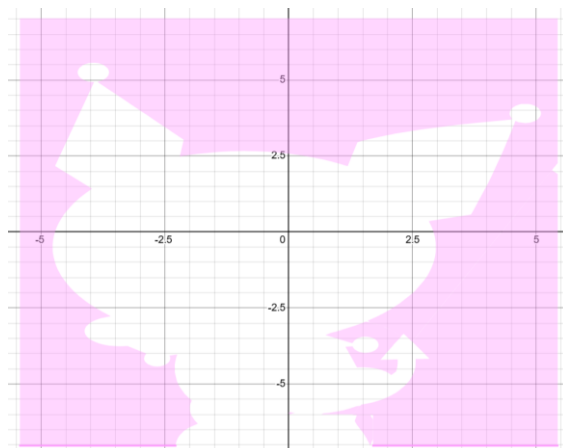
$$\{(x + 1)^2 + 1.2(y + 5.8)^2 > 1\} \{1.9(x + 1.28)^2 + (y + 4.48)^2 > 2\}$$

$$\{(x + 3.75)^2 + (y - 2.88)^2 > 50, y < -0.65x - 5.87, y + 3.7\}$$

$$\{(x + 2.66)^2 + (y + 4.16)^2 > 0.07\} \{(x + 3.42)^2 + 2(y + 3.26)^2 > 0.5\}$$

$$\{x < -1, y > -6\} \{y < 7.03\}$$

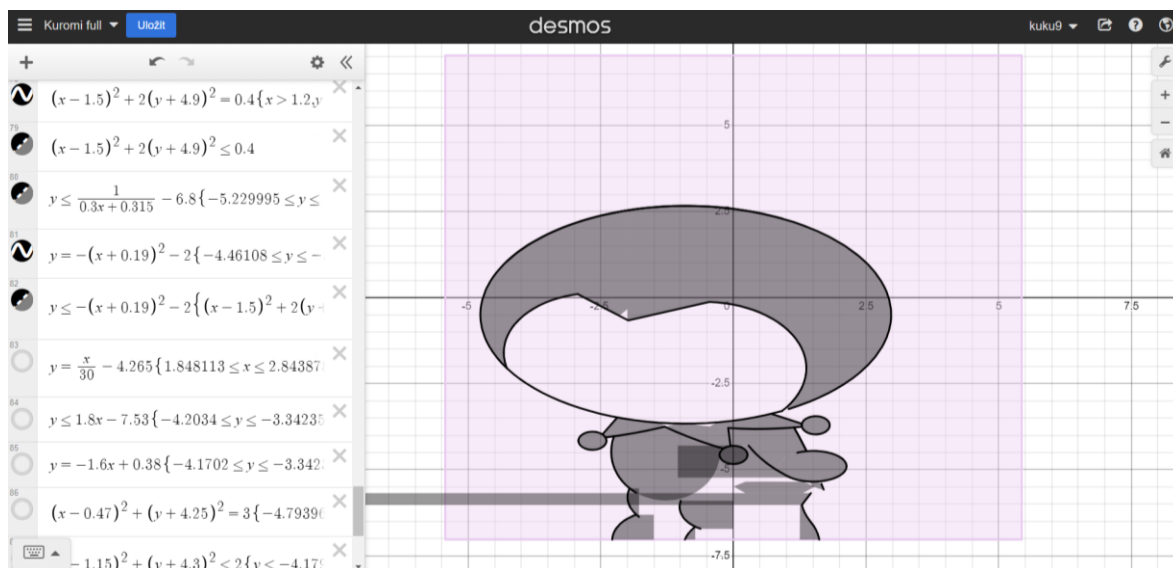
Předpis na předešlé straně dohromady obsahuje 21 podmínek, proto se nevešel na 1 řádek a musel jsem ho takto rozdělit. Při vytváření bylo zapotřebí vzít předpisy, které tvoří obrys Kuromi a vhodně je nakombinovat, aby růžově vybarvená část plochy nezasahovala dovnitř. Takto jsem pokračoval od hlavy až po zbytek těla.



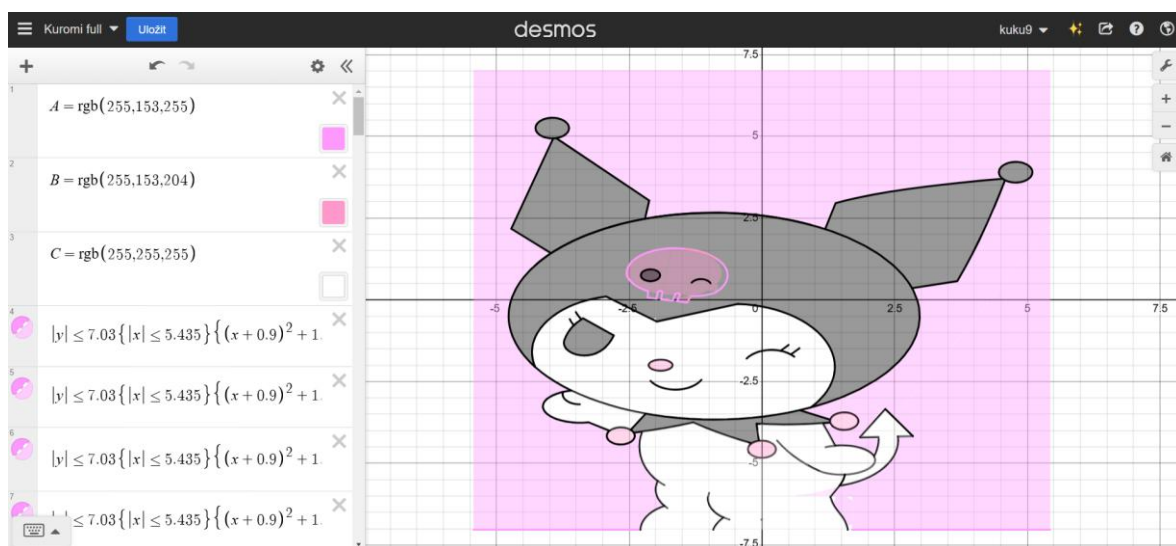
Obrázek 22: Obrys pozadí Kuromi

Následuje ukázka z průběhu tvoření, kde už jsem měl většinu částí těla hotovou (některé jsou jen schované, aby se mi tam nepletly) a dodělával jsem nejtěžší část, spodek těla. Někdy jsem kvůli podmínkám musel měnit typy funkcí, aby to vhodně fungovalo. Vybarvené plochy se nemohly překrývat, protože to měnilo sytost barvy a bylo by to vidět.

Celý projekt vyšel v programu Desmos na 102 řádků. I přes to, že program Desmos se nachází i na mobilu, pracoval jsem převážně na počítači, ať už z důvodu většího displeje a lepší přehlednosti, ale i snazší ovladatelnosti. Jediná nevýhoda u tvoření obrázků v programu Desmos jsou malé nebo slabé tvary/plochy. Desmos má problém je generovat a stává se, že se části těchto menších ploch nezobrazí.



Obrázek 23: Průběh tvoření a přepisování podmínek Kuromi



Obrázek 24: Hotový obrázek Kuromi

9 ZÁVĚR

Zaprvé měla tato práce za cíl seznámit čtenáře s grafickým programem Desmos a předvést jeho možnosti. Zadruhé měla rozšířit mé znalosti při využívání tohoto programu.

V úvodních kapitolách byla popsána historie a základní charakteristika programu. Následné části se detailně zaměřily na různé možnosti jeho využití, přičemž jsem stručně popsal práci s těmito funkcemi a přiložil ukázky. Součástí práce bylo také představení alternativ programu Desmos, jako jsou **3D Desmos**, **Geometrie** a **Kalkulátory**.

Závěrem lze konstatovat, že program Desmos může být užitečným pomocníkem jak v matematickém vzdělávání, tak v praxi.

10 INTERNETOVÉ ZDROJE

Des-blog. Online. 2024. Dostupné z: <https://blog.desmos.com/archive.html>. [cit. 2024-12-10].

Desmos. Online. 2024. Dostupné z: <https://www.desmos.com>. [cit. 2024-12-10].

Desmos classroom. Online. 2024. Dostupné z: <https://teacher.desmos.com>. [cit. 2024-12-10].

New Year, New Desmos. Youtube [online]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/embed/HLV6zKQSMX4>. [cit. 2024-12-10].

Desmos User Guide. Online. In: Desmos help center. 2024. Dostupné z: https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide.pdf. [cit. 2024-12-10].

Complex numbers. Online. 2024. Dostupné z: <https://help.desmos.com/hc/en-us/articles/31103542590733-Complex-Numbers>. [cit. 2024-12-10].

Polární soustava souřadnic. Online. In: Wikipedia: the free encyclopedia. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pol%C3%A1rn%C3%AD_soustava_sou%C5%99adnic. [cit. 2024-12-10].

Polární graf. Online. In: Wikipedia: the free encyclopedia. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pol%C3%A1rn%C3%AD_graf. [cit. 2024-12-10].

Absolute value. Online. In: Wikipedia: the free encyclopedia. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_value. [cit. 2024-12-10].

Goniometrická funkce. Online. In: Wikipedia: the free encyclopedia. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Goniometrick%C3%A1_funkce. [cit. 2024-12-10].

What is the graph of $|x| = |y|$ ($| \cdot |$ being modulus function).? Online. In: Quora. 2024. Dostupné z: <https://www.quora.com/What-is-the-graph-of-x-y-being-modulus-function>. [cit. 2024-12-10].

Lists. Online. In: Desmos. 2024. Dostupné z: <https://help.desmos.com/hc/en-us/articles/4407889068557-Lists>. [cit. 2024-12-10].

About Desmos. Online. In: Desmos. 2024. Dostupné z: <https://www.desmos.com/about>. [cit. 2024-12-10].

The List Of Startups Launching At TechCrunch Disrupt New York. Online. In: TechCrunch. 2011. Dostupné z: <https://techcrunch.com/2011/05/23/the-list-of-startups-launching-at-techcrunch-disrupt-new-york/>. [cit. 2024-12-10].

Our story. Online. In: Desmos. 2024. Dostupné z: <https://www.desmos.com/careers>. [cit. 2024-12-10].

2024 Art Expo. Online. In: Desmos. 2024. Dostupné z: <https://www.desmos.com/art#17>. [cit. 2024-12-10].

Polar graphing. Online. In: Desmos help center. 2024. Dostupné z: <https://help.desmos.com/hc/en-us/articles/4406895312781-Polar-Graphing>. [cit. 2024-12-10].

Kartézská soustava souřadnic. Online. In: Wikipedia: the free encyclopedia. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Kart%C3%A9zsk%C3%A1_soustava_sou%C5%99adnic. [cit. 2024-12-10].

Extending from 2D to 3D. Online. In: Desmos help center. 2024. Dostupné z: <https://help.desmos.com/hc/en-us/articles/19736835727885-Extending-from-2D-to-3D>. [cit. 2024-12-10].

11 SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK

Obrázek 1: Podoba programu Desmos v letech 2011, 2012, 2013, 2015.....	6
Obrázek 2: Interaktivní hra Marbleslides vytvořená na webu Desmos Classroom.....	6
Obrázek 3: Rozhraní programu Desmos – 1. Grafické okno, 2. Okno pro zápis předpisů, 3. Horní lišta, 4. Nastavení	7
Obrázek 4: Nástroje programu Desmos.....	8
Obrázek 5: Výsledkem soustavy 2 nerovnic je plocha vybarvená oběma barvami – modrou i červenou.....	9
Obrázek 6: Ukázka speciálních funkcí	12
Obrázek 7: Kartézská soustava 2D	13
Obrázek 8: výpis bodů množiny „M“ v grafu.....	14
Obrázek 9: graf pro předpis rovnice 1	14
Obrázek 10: ukázka využití sinu a kosinu při pohybu po kružnici.....	15
Obrázek 11: Lotosový květ v polárním grafu	16
Obrázek 12: rovnice kružnice s parametry a, b, r	16
Obrázek 13: rovnice s absolutní hodnotou, jsou posunuté, aby neměly společnou část	17
Obrázek 14: Rozhraní programu Desmos - Geometrie	18
Obrázek 15: 3D grafický kalkulátor - rozhraní.....	19
Obrázek 16: Vědecký kalkulátor	20
Obrázek 17: Kalkulátor čtyř funkcí	20
Obrázek 18: Animovaná postava Kuromi	21
Obrázek 19: ukázka zvýrazněného rámečku obrázku.....	21
Obrázek 20: obrys Kuromi s pozadím (vlevo) a bez pozadí (vpravo).....	22
Obrázek 21: Kuromi po přepsání rovnic na nerovnice	23
Obrázek 22: Obrys pozadí Kuromi	24
Obrázek 23: Průběh tvoření a přepisování podmínek Kuromi	24
Obrázek 24: Hotový obrázek Kuromi.....	25
 Tabulka 1: Prakticky využitelné goniometrické funkce	10
Tabulka 2: funkce z oddělení statistiky	11
Tabulka 3: užití funkce/rovnice v projektu	22

12 ZDROJE STAŽENÝCH OBRÁZKŮ

The Desmos Graphing Calculator In Action. Online. In: Des-blog. 2011. Dostupné z: <https://blog.desmos.com/articles/the-desmos-graphing-calculator-in-action/>. [cit. 2024-12-10].

A Better Calculator is Here!. Online. In: Des-blog. 2012. Dostupné z: <https://blog.desmos.com/articles/a-better-calculator-is-here/>. [cit. 2024-12-10].

Online Calculators. Online. In: Stuartmath.weebly. 2013. Dostupné z: <https://stuartmath.weebly.com/online-calculators.html>. [cit. 2024-12-10].

Searching and sharing on Activity Builder. Online. In: Des-blog. 2015. Dostupné z: <https://blog.desmos.com/articles/searching-and-sharing-on-activity-builder/>. [cit. 2024-12-10].

Marbleslides. Online. In: Desmos classroom. 2024. Dostupné z: <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/566b31734e38e1e21a10aac8?collections=651ca31cf69ee59aa9e3818a%2C5e73b204d560367270838c4b#preview/d0490916-ebd5-422a-8001-bf6d0ef63136>. [cit. 2024-12-11].